闽江水运及闽江船型研究
参 考 资 料 之 一

莱 茵 河
航运与船型译文集

福建省交通科学技术研究所
福建省造船工程学会船舶学组

编 辑 说 明

党的十二大提出把交通运输作为我国国民经济发展的战略重点之一。中央领导同志一再强调要充分利用水运并提出："振兴经济的战略决策在于依靠科学技术的进步。"最近省委领导同志指出："福建的交通单靠铁路是不行的，根本的出路在于发展水运，开发闽江航运是个战略性的问题。"

莱茵河的自然条件与我省的闽江相似，而莱茵河的航运事业在世界上则居于领先地位。莱茵河沿岸国家已发展成为当今世界工农业生产和经济最发达的地区之一。为配合省重点科研项目——《闽江水运及闽江船型的研究》课题的试验研究，我们从近几年来西德、荷兰、法国和苏联的有关刊物上选译了部分文章，汇编成这本译文集，并请省造船工程学会船舶学组根据国内外有关资料编写了"莱茵河航运与船型综述"一文一併发表。

本译文集由《闽江水运及闽江船型研究》课题组负责作技术校对，并对部分译文作了删节。由于受出版印刷条件的限制，省去了原文中的全部照片和部分插图。错误和不当之处，恳请批评指正。

一九八三年七月

著 者 前 言

本书与以往出版的船舶结构力学著作不同，对船舶结构力学的一些基本问题都以新的观点进行研究，即考虑到决定船体强度诸因素的随机性。

这样提出问题的必要性已经完全成熟，造船工作者当前对概率法的浓厚兴趣正说明生活实践的这一要求。

当然，本书与一切初次尝试一样，不能说已完善地解决了书中提到的问题，因为对其解决来说，还需结合实际，广泛开展试验研究工作。

很有成效地应用于许多现代技术领域中的概率法在船体结构力学中无疑也是大有前途的。

著者撰写本书的主要目的在于引起造船工作者对新方法的注意，使不持成见的读者能够对概率法的积极方面作出正确的评价，从而考虑其改进及在造船中的应用。

有关本书的批评请寄：列宁格勒，Д—65。果戈里路 8 号。

目　　录

目　　录

第 五 章　船体强度的几个专题

参考文献

序　言

在解一切工程问题，包括构筑物强度问题的时候，首先必须规定对所论问题有决定作用的各因素如何估计的方法。这类估计方法常因其对工程现象随机性考虑程度的差异而有所不同。

自然界的所有现象，总的说来，都带有随机成分。但在实际应用上重要的是考虑到随机性的影响怎样。

根据现象性质、研究目的以及结果的精度要求等等，在有些问题中随机性可看成次要因素而忽略不计。因此问题可用所谓确定性法来解。定态法把所有条件都看成确定无疑，不存在丝毫随机偏差。解出的结果自然也就表现为非随机变量或非随机函数的形式。

但自然界也有许多随机性影响很大因此不能忽略的现象，我们只有在考虑了有关因素的随机性以后才能正确认识它们并评定它们的结果。

因为概率法对造船工作人员来说仍然是新的方法，所以下面比较详细地介绍这类随机问题。

凡可能出现各种各样结局，而在给定的试验中会出现哪一种结局却又无从予料的现象，称为随机现象。从马克思主义辩证观点看来，每一个别结局偶然性同其规律性和物理特性是并不矛盾的。恩格斯写道：“…在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律。”*)

所以为了估计随机性，首先必须确定其规律性，然后方能作定量的估计。概率论就是研究这类问题的数学学科。

现代概率论包括随机现象的三个方面，即随机事件，随机变量和随机函数，如果变量是时间，后者也称为概率过程或随机过程。

前两方面内容奠定了这门学科的理论基础，第三方面的内容是在二十世纪初叶发展起来的，它的发展使我们得以把概率法推广应用于与动力系统振动有关的问题。

在对概率论中这一部分进行周密的研究以后，便创立了称为统计动力学的新学科。它研究在随机干扰力作用下动力系统的运动。

概率法就这样成为解决许多工程问题的有力工具。

必须指出，在随机过程论的发生发展中，苏联数学家柯尔莫哥洛夫[22]，辛钦[53]，雅格洛姆[58]，温特切尔[10]，布加乔夫[37]等都起了很大作用。

在布尼莫维奇，索洛多甫尼科夫，斯维什尼科夫和许多其他苏联学者的著作中研究了随机过程论的实用问题。随机过程论的应用范围极为广泛（无线电学，电工学，电子学，自动化学等）其推广也十分迅速。

为了在技术问题上正确地应用概率法，我们应了解并注意到它的某些特点。

---

*) 马克思恩格斯全集　中文本第二十一卷，341 页　人民出版社　1965 年

首先要指出，概率的数学概念只是随机现象可能实现的一个客观量度。人们在实践中常常迂到随机现象的经验频率，而在进行大量试验即在随机现象重复实现时，经验频率便趋近于理论概率。

由此可见，只在研究大量随机现象时，应用概率法才是正确的。

但在工程上我们不仅对大量事件，就是对稀有事件如结构破坏也很感兴趣。估计稀有事件的概率（虽然这概率很小）对于把研究对象在不同条件下的质量进行对比仍然具有一定的意义。

其次要指出，如果不利用所谓实际置信原理则在实际上应用概率法就毫无意义。

实际置信原理的实质如下：如果随机现象的概率充分地小，则它的实现就 可 不 予 考 虑。

关于概率的数值问题并无单值解。计算的概率法在这里同其它任何方法一样，归结为标准的制定。实际置信原理的应用只是对试验结果规定标准的一种特殊形式，在这里就是给结果规定许容概率。

同时须指出，确定性法与概率法在工程上的关系。这两个方法不仅不相矛盾而且是紧密相关。用概率法解工程问题需要用到动力系统的某些资料。为此就须解非随机干扰的问题，如动力系统在规则过程作用下的系统传递函数就是这类资料。

因此计算的确定性法的发展和完善乃是在工程上进一步充分利用概率法的必要条件。

最后要指出，概率法的特点使我们能够比较充分地估计和利用结构的实际工作条件，就是使计算条件尽量接近实际条件。因此，大约在十年以前概率法便开始在造船方面应用起来。

最初研究的对象是船在波浪上的摇摆。由克雷洛夫[27]深入研究，后经他的继承者加以发展的摇摆计算法是以定态原理为依据的。它的前提是给定计算波的非随机参数。由此求得的一切摇摆参数都是时间的非随机函数，其振幅正比于给定的波浪参数。

这样的计算结果是不能满足合理地设计消摇器，雷达站等现代化设备的要求的。

但是假如把船体看成受海浪随机过程作用的动力系统，同时利用近年来关于随机过程论的研究资料，这个问题便可获得解决。

应当指出，把随机过程论用于摇摆问题的构思属于克雷洛夫， 他早在1934年就让克鲁托夫[26]注意船在不规则波上的摇摆与线性振子的布朗运动之间的相似之处。

沃罗比尧夫[15]在1953年发展了这一思想。他在克鲁托夫的指导下首次研究了在平稳随机过程的波浪上的船舶摇摆。

几乎与此同时，美国公布了德尼斯和皮尔逊的论文。他们用随机过程论的方法研究了船在不规则波浪上的运动。

其后这方面的著作(如图佩谢夫[49]，沃兹涅先斯基[11，13，14]，费尔索夫[51])，对船舶在不规则波上的摇摆又都作了比较充分的分析，因此使概率法可用于实际计算。

目前，船舶结构力学这门学科的三个问题（确定外力，计算应力、变形和评定强度）对随机性都是以十分近似而且不明显的形式加以考虑的。

但容易看到在这三个问题中虽然程度不同却都含有随机成分，它们也都可用概率法进行相当严谨的探讨。其中首先是外力问题，它乃是船在波浪上摇摆问题的直接延伸。

1953 年在美国造船造机工程师协会就德尼斯和皮尔逊的论文 [18] 举行的讨论会上，卡明士，刘易士和赛贝希利已经指出有可能用随机过程来确定船体构件中的应力和计算船体的拍击。

稍后，刘易士 [30] 在试验池里进行了十分有趣的模型试验， 结果表明将谱理论用于不规则波上船体强度的计算是切实可行的。

1957 年本书作者在一篇论文 [20] 中探讨了把随机过程论的方法用于船舶外力和强度的估算问题。

这篇论文引起了造船界的重视。如果我们注意到在不规则波上航行的船舶是承受随机荷重的典型构筑物，那末就容易理解人们之所以对概率法感到兴趣了。这种随机荷重到目前为止都是以确定性形式给出的，唯一的原因就是一直没掌握关于这种荷重的随机性的可靠资料以及利用这些资料计算船体强度的方法。

现在大家都已确认必须采用概率法以科学地正确处理船在海上所受外力的试验结果。

至于如何运用这些试验结果，则许多专业人员倾向于坚持老方法，仅在论证计算荷重的确定性参数时才应用得自试验结果的概率特征。

其实，直接按试验所得概率特征的涵义利用概率特征数据，即用计及波浪随机过程的船体动态外力的计算取代静态外力的计算，是更为合理的。

在船速加快，适航性要求提高，动态因素的意义日益重要的情况下，采取上述方法的理由是比较充分的。

同时，人们已经肯定概率法是评定船体结构疲劳强度和寿命等现象的唯一工具。国内外都正在这方面进行大量的理论和试验工作。

目前尚未充分研究的是船在不规则波上摇摆时遭受随机拍击的船体强度问题。

从概率法观点看来，整个船舶外力问题的研究比之船舶摇摆问题为少，但最近几年有很大进展，其主要的就是对概率法在评价船舶运行实际条件上的作用已经有所认识。这方面特别令人感兴趣的是关于计算海浪谱和船舶外力的幅——频特征的研究。

关于上述研究方向的著作应予指出的有费尔索夫 [50]，拉赫马宁 [38]，沃兹涅先斯基，涅茨维塔耶夫 [12]，斯维什尼科夫 [42]，切蒂尔金 [55] 等人的论文以及许多实船试验研究报告等。

船舶结构力学的第二个问题即船体构件中应力和变形的计算，也有随机性的问题。

这与下列因素有关：材料的机械性质和疲劳特性，结构不同于正确形状的初始形状误差以及结构不符合设计尺寸的尺寸误差等。

这类随机性的估算方法在鲍罗丁的著作 [6] 中有所阐述，不过目前造船界尚未充分采用。

虽然第二个问题的随机性似乎不及船舶外力的随机性重要，但是毫无疑问，在船舶结构力学今后的发展过程中，它将随着概率法的应用而得到进一步的研究。

第三个问题，即船体强度的评定具有很大的意义。我们须注意其解决方法同外力的计算方法有密切联系。

斯特立列茨基 [46]，霍奇阿洛夫 [54]，尔柴尼津 [40,41]，凯尔迪什和戈尔邓勃拉脱 [21] 等人的许多著作促成了以概率原理为依据的强度储备系数的建立。上述著作的内

容总结在建筑结构的极限状态法计算标准中有所阐述。

目前在造船方面尚未采用极限状态法。这是解外力问题时依旧采用定态法的原因。

我国专业人员中第一个打算用概率法评定船舶强度的是库尔久莫夫[29]。本书作者在论文[20]中也探讨了给定外力概率特征的情况下不破坏保证率和概率储备系数的概念。

现在正在进行的研究是要确定按许用应力法设计的船舶的概率储备系数的数值[24, 31]。

可以设想，如果外力问题能够得到适当的解决，那么船体结构强度的评定就可以不用许用应力法而采用基于概率原理的比较先进的方法。

因此我们必须承认在船舶结构力学中概率法只是刚刚开始得到某种暂时还不很成熟的应用。

然而概率法已经引起了造船工作者很大的兴趣，因为从其评定船舶运行实际条件的可能性看来，概率法是很有发展前途的。

作者在提出全部问题时的基本出发点是进行船舶强度计算必须先给定运行状况，包括波浪状况，装载状态以及航行速度等，然后算出相应于上述工况的外力的一切概率特征并评定结构强度。

对长期运行船舶的计算状况的概率和强度的评定，我们只联系到船体结构材料的疲劳进行了讨论。

鉴于造船工程师在目前的日常工作中很少应用概率论这一数学工具，所以本书前二章介绍概率论和随机过程论的基本概念并列举造船方面的实例，借以有助于熟悉概率论和掌握新方法。同时有了这二章还可使以后对船舶强度专题的叙述统一起来。

第三章阐述船舶总弯曲的外力问题，海浪谱特性，船体关于外力过程的幅——频特征的求法以及船舶运行计算状态的选择等。

第四章讨论用概率法评定船体总弯曲强度，提出用概率法校核强度和设计船体结构的方法。

第五章分析了船体强度的几个专题如疲劳强度，船体拍击强度和波浪引起的振动强度等。

关于船舶结构力学第二类问题中的许多问题本书都未予涉及。

作者着重研究了用概率法已能解决的一些迫切问题。从随机性观点看来，它们都同船体外荷重这个主要因素有关。

概率法的特点和适用条件使我们满有根据地认为：随着船舶结构力学的进一步发展，概率法在船体结构的强度和稳定性计算方面也将得到广泛的应用，因为这是目前实际上存在的强度和稳定性不符合其标准值的情况所迫切要求的。

第一章 船舶结构力学用到的概率论基本概念

§1 随机事件

在概率论里，所谓事件是指遵守某些条件的情况下进行的多次重复试验的结果。

事件的概率是该事件实现的客观可能性的定量测度。

事件按其各异的特征分类，这种分类对正确使用事件概率的基本定理很重要。

在实验过程中一定发生的事件称为必然事件。

必然事件 A 的概率

$$P(A)=1$$

是事件可能发生的概率上限。

在某实验中不会发生的事件称为不可能事件。

不可能事件 B 的概率

$$P(B)=0$$

是事件可能发生的概率下限。

以区间 $0<P(C)<1$ 内的某概率实现的事件称为随机事件。

在观察几个事件时，应注意它们的相容性，即它们同时发生的可能性，否则它们称为不相容事件。

如设事件为掷一颗骰子，若把 1 到 6 的几个数同时出现的现象作为所观察的事件，则这事件是互斥事件。

若把出现 2 点，点数不超过 5 的点和出现偶数点等现象作为所观察的事件，则这些事件是相容事件（2 点是小于 5 的偶数点）。

如在许多事件中每一事件实现的概率相等，则这些事件是等可能事件。例如掷一颗骰子，出现 1，2，3，4，5，6 点的事件就是等可能事件。

如果在实验过程中，必然的要在某些事件中出现一个事件，则这些事件构成一个事件的完备群。

构成完备群的两个互斥事件称为对立事件。例如事件 A——中靶，$\overline{A}$——不中靶，是射靶的两个对立事件。

有些事件组同时具备这三种性质：它们既互斥，又等可能且组成完备群。这样的事件称为基本事件。

其典型实例是在掷骰子时出现 1，2，3，4，5，6 各点。

概率问题通常都归结为基本事件和概型，即确定具有基本事件性质的那些基本事件。

而对基本事件概型推导其全部基本定理，以便据以计算复杂事件的概率。

若所观察的事件是一个不同于基本事件但在某实验中有可能实现的事件，则此事件可能与有一些基本事件相容而与另一些不相容。

与该事件相容的基本事件称为于它有利的基本事件，与之不相容的称为不利的。

例如掷一颗骰子的基本事件是出现 1 到 6 各点。设事件 A 是出现偶数点。那末对 A 有利的是三个基本事件 2,4,6。而基本事件 1,3,5 则对 A 是不利的。

用上述概念我们可给概率下一个数学的定义。

设有一实验，n 为基本事件总数，m 为有利于事件 A 的基本事件数， 那么事件 A 的概率可由下式来定义：

$$P(A)=\frac{m}{n}。 \tag{1.1}$$

自然，严格地说，式 (1.1) 仅对基本事件概型才成立。

能为此式给出非常清晰的解释的是所谓概率的几何概念。

设基本事件数为无限大。这是可能的，例如基本事件是落在线，面或体上的任一点。设事件 A 为落入该线，面或体上某有限域的事件。那么把整个线，面或体划为许多相同的无穷小的部分，就可取 n 为整个线的长度，面的面积或体的体积，取 m 为相应的单元域，式 (1.1) 也就可应用了。

概率的几何概念在概率加法中应用很广，而且不仅应用在直接同几何概念有关的概率问题中。

可是有许多事件不能归结为基本事件概型。例如有些事件具有不相容性同时又组成完备群，但它们可能是非等可能事件。

对这类事件常采用与实验有关的所谓概率的统计概念。这种概率也叫做事件的频率。

设进行 n 次实验，事件 A 出现 m 次，比值

$$P^*(A)=\frac{m}{n}$$

称为事件的频率。

此比值具有很奇特的性质，并为可归结到基本事件概型的事件的实验所证实。对次数不多的实验，事件的频率带有随机性。但实验次数是足够多时，频率就趋于稳定而接近事件的概率。如果我们把频率看成是随机事件的经验频率绕以波动的某理论值。那么频率的这个性质便可推广适用于任何事件。

概率的概念与实验有关。但这并不是说，为了确定事件的概率一定要进行实验。有许多不同的确定概率的方法，它们构成概率论的内容。而且概率这个概念只有在把它理解为大量试验中事件出现的频率时才有实际意义。

由此可见，仅对具有大量性质的事件来说概率论的结论才是合理的。

在讨论事件时，也须考虑到它们之间的概率关系。如果在事件 A 与 B 中，一事件的概率取决于另一事件的出现与否，则事件 A 与 B 称为概率相关事件，否则称为独立事件。

对相关事件要用到所谓条件概率 $P\left(\frac{A}{B}\right)$，即在事件 B 发生的条件下事件 A 出现

的概率。

事件 B 的条件概率为 $P\left(\frac{B}{A}\right)$，即在事件 A 实现的条件下，出现事件 B 的概率。

设 A 和 B 为独立事件，则

$$\left.\begin{aligned} P\left(\frac{A}{B}\right)&=P(A)\\ P\left(\frac{B}{A}\right)&=P(B)\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

事件的相关性或独立性常依所论问题的实质而定。

事件可组合成不同的事件组。

事件之和是一个新事件，它是组成该新事件的事件中至少有一事件出现的事件。

如有两个事件 A 和 B，则其和可写成

$$C=A+B=(\text{或实现 }A\text{，或实现 }B\text{，或 }A\text{ 和 }B\text{ 同时实现}) \tag{1.4}$$

显然，A 和 B 同时实现的条件只能是事件 A 和 B 为相容事件。

事件之积是一个新事件，它是所有该积的因子事件同时出现的事件。

两事件之积可写成

$$C=AB=(A\text{ 和 }B\text{ 同时实现}) \tag{1.5}$$

显然，不相容事件之积是不可能事件。

计算复杂事件的概率常要利用由基本事件概型引出的基本定理。

为此，先把复杂事件分成其概率已知的一些基本事件（给定或由经验确定）的事件组即事件和与事件积。

例如，设一实验由三次射击目标所构成。

A_1，A_2，A_3 为当第一、二、三次射击命中；

$\overline{A}_1$，$\overline{A}_2$，$\overline{A}_3$ 为相应的对立事件或落空。

现考虑一复杂事件 B——至少两次命中目标。该复杂事件可表示为：

$$B=A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3+A_1A_2A_3。$$

和中每一项是至少命中两次的事件积，此和式的所有项都是不相容事件，因此整个和式表示由命中和落空的任意组合但至少命中两次所构成的事件，可见，为了计算复杂事件 B 的概率，须会计算事件和与事件积的概率。

对基本事件概型证得概率的普遍定理。并以公理的形式推广应用于不能归结为基本事件概型的问题。

这类证明在任何一本概率论教科书中都能看到，所以下面我们将不加证明地引用概率的普遍定理。

1. 不相容事件的和的概率等于这些事件的概率的和

对 n 个不相容事件 A_i，有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{1.6}$$

而且，如不相容事件构成完备群，则

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1。 \tag{1.7}$$

对于对立事件 A 和 $\overline{A}$，有

$$P(A)=1-P(\overline{A})。 \tag{1.8}$$

如果计算 $P(\overline{A})$ 比 $P(A)$ 容易，常采用 (1.8) 以简化解题。

2. 相容事件之和的概率以事件之积的概率来表示

对 n 个相容事件 A_i，有

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{ij} P(A_iA_j)+\sum_{i,j,k} P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1, A_2\cdots A_n), \tag{1.9}$$

式中和式遍及各种下标值 i；i，j；i，j，k 等等。

3. 独立事件之积的概率等于这些事件的概率积

记

$$\prod_{i=1}^{n} A_i=A_1A_2\cdots A_n。 \tag{1.10}$$

对 n 个独立事件，有

$$P(\prod_{i=1}^{n} A_i)=\prod_{i=1}^{n} P(A_i)。 \tag{1.11}$$

4. 相关事件之积的概率以这些事件的条件概率来表示

对 n 个相关事件 A_i，有

$$P(\prod_{i=1}^{n} A_i)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdots P(A_n/A_1A_2\cdots A_{n-1})。 \tag{1.12}$$

式 (1.12) 中每个后一事件的条件概率的计算都以其前各事件的实现为条件。

5. 理想事件和事件的全概率

组成完备群的互不相容事件称为理想事件，与基本事件不同，理想事件可以是不等可能的。记 H_i 为理想事件。由上所述，理想事件的概率 $P(H_i)$ 可以是不相同的。但有 n 个理想事件时，条件

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i)=1 \tag{1.13}$$

仍满足。

例如，在一年期间某海区海浪状况的浪级可看成是理想事件。

浪级不同的海浪，其概率不同，各浪级本身互不相容。所以在一年内，条件(1.13)满足。

在理想事件已知的情况下，可以探讨某事件 A，它在每一理想事件中的条件概率为

$$P\left(\frac{A}{H_i}\right)。$$

例如上例中，可取出现浪高 2 米为事件 A，这种波浪在各种浪级的海况中都可能迂到，而且其概率是不同的。

在全部理想事件都实现的条件下事件 A 的概率称为 A 的全概率。上例中，这就是一年内碰到浪高 2 米的波浪的概率。

事件的全概率以下式定义：

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P\left(\frac{A}{H_i}\right), \tag{1.14}$$

式中 $P(H_i)$ 和 $P\left(\frac{A}{H_i}\right)$ 认为是已知的。

有些问题要我们在实验确定了事件 A 的出现情况后，求理想事件的条件概率。例如在海上观察了浪高 2 米的海浪，要求计算海况为 4 级的概率等于多少？

为解决此问题，可采用巴叶斯公式：

$$P\left(\frac{H_i}{A}\right)=\frac{P(H_i)P\left(\frac{A}{H_i}\right)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P\left(\frac{A}{H_i}\right)}, \tag{1.15}$$

式中 $P(H_i)$ 和 $P\left(\frac{A}{H_i}\right)$ 为发生事件 A 的实验进行之前便已知的概率。

6. 重复实验的概率

常有这样的问题，它的实验有两个可能结果 A 和 $\overline{A}$，而且多次重复，从概率意义上说，这些实验是独立的。

对这类问题，我们要研究的往往不是个别实验的结果，而是在一系列的实验结果里，事件 A 出现的总次数和该总次数的概率。

设实验次数为 n，事件 A 出现 m 次，若每次实验中事件 A 的概率相同并等于 P。

其对立事件的概率为 $P(\overline{A})=1-p=q$。

则事件 A 在 n 次实验中出现 m 次的概率为 (1.16)

$$P_{m,n}=C_m^n p^m q^{n-m}, \tag{1.17}$$

式中 n 次实验里出现 m 次的组合数

$$C_m^n=\frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{1.18}$$

在 $m=0, 1, \cdots n$ 时，(1.17) 式的诸值之和等于 1（事件完备群），且等于二项式 $(q+p)^n$，即

$$\sum_{i=0}^{n}p_{i,n}=(q+p)^n=1。 \tag{1.19}$$

因此称形如 (1.17) 的概率分布为二项分布。

据 (1.19) 可得事件 A 出现 m 次到 k 次的概率表达式：

$$P_{(m-k)n}=\sum_{i=m}^{k} P_{i,n}=\sum_{i=m}^{k} C_n^i p^i q^{n-i} \tag{1.20}$$

在一系列概率 $P_{m,n}$ 中有一个随 n 和 p 而定的最大值，与其相应的 m_1 称为事件 A 出现的最大可能数。

m_1 可由下列不等式求出：

$$pn+p\geqslant m_1\geqslant pn-q \tag{1.21}$$

因为 $p\leqslant 1$ 及 $q\leqslant 1$，所以由 (1.21) 可知，最大可能数 m_1 与 pn 之差不会超过 1。

事件 A 出现的最大可能频率为

$$p^*=\frac{m_1}{n} \tag{1.22}$$

于是不等式 (1.21) 可表示成

$$p+\frac{p}{n}\geqslant p^*\geqslant p-\frac{q}{n} \tag{1.23}$$

由此可见，在 n 增加时，p^* 将在概率的意义上趋近 p，即趋近事件 A 在每次实验中的概率。

7. 大量实验的事件

若实验次数 n 很大，则用式 (1.17) 就很不方便，因为这要计算如 (1.18) 所示含有阶乘的组合数 C_n^m。

此时可利用由 (1.17) 所得的近似公式，即按斯特林公式取代阶乘：

$$n!\approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,。 \tag{1.24}$$

将 (1.24) 代入 (1.17) 得

$$P_{m,n}=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-t^2}。 \tag{1.25}$$

式中

$$t=\frac{m-np}{\sqrt{2\pi pq}}。 \tag{1.26}$$

在 n 增大时，式 (1.25) 成为拉普拉斯渐近公式。

在区间 (m_1, m_2) 内实现 m 次的概率为

$$P\{m_1<m<m_2\}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^{t_2} e^{-t^2}dt-\int_0^{t_1} e^{-t^2}dt\right\} \tag{1.27}$$

概率论中广泛应用拉普拉斯函数或概率积分：

$$\Phi(a)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{a} e^{-t^2}dt\,。 \tag{1.28}$$

此函数已制成表格，载于各数学手册。

计及 (1.28)，式 (1.27) 成为

$$P\{m_1\leqslant m\leqslant m_2\}=\frac{1}{2}\{\Phi(t_2)-\Phi(t_1)\} \tag{1.29}$$

式中 t_1，t_2 系分别由 m_1 和 m_2，依（1.26）求得。

因此，在 n 很大时，概率计算变成十分简单的运算。

这里我们熟悉一下后面经常要用到的拉普拉斯函数是有益的：

(1) $\alpha=0$ 时，

$$\Phi(0)=0; \tag{1.30}$$

(2) $\Phi(\alpha)$ 随 α 增加而渐近于1，而当 $\alpha=\infty$ 时

$$\Phi(\infty)=1; \tag{1.31}$$

(3) 拉普拉斯函数为奇函数：

$$\Phi(-\alpha)=-\Phi(\alpha)。 \tag{1.32}$$

所以 $\Phi(\alpha)$ 的函数表仅对 $\alpha>0$ 的情况编制。

§2 随机变量，分布律及其特征值

在工程应用上，借随机变量进行的运算很重要，因为它是更概括更广义的随机事件。随机事件可看成是只取两种数值的随机变量，即事件实现时，取值1，不实现，取值0。

前面对随机事件导得的一切结果，都适用于随机变量。

一个在实验结果中可能取这个或那个数值，但不能予先知道取什么值的变量叫做随机变量。

随机变量可分为离散型和连续型两类。离散型随机变量可能取给定区间内某几个一定的数值。其典型例子是前面谈到的在 n 次实验的系列中，某事件出现的次数可能取0，1，2…等离散值。

连续型随机变量可能取给定区间内的任意值、其实例如海浪参数，船舶摇摆角和船体构件中的应力值等等。

在工程上，这些变量特别重要，因为它们经过概括就可形成随机函数的概念。

下面我们将研究连续型随机变量，为了了解随机变量，须了解其分布律。

随机变量的全部可能值和这些可能值的概率合在一起构成随机变量的分布律。

随机变量以大写字母 X，Y，Z…表示，而它们所取的可能值以相应的小写字母 x，y，z…表示。

离散型和连续型随机变量都适用的最一般的分布律形式是分布函数的形式。分布函数也叫做分布的累积律。

依赖于可能值 x 的函数 $F(x)$ 称为随机变量 X 的分布函数。它表示 X 小于每个给定 x 的概率，即、

$$F(x)=P\{X<x\} \tag{2.1}$$

分布函数为无因次函数，它具有下列特性：

(1) 分布函数是 x 的非降函数；

(2) 在 $x=-\infty$ 时，$F(-\infty)=0$；

(3) 在 $x=+\infty$ 时，$F(\infty)=1$。

在这种情况下，随机变量总位于区间 $-\infty<X<\infty$。实际上，区间常为有限值，例如