

建筑科学研究报告

REPORT OF BUILDING RESEARCH

1982

No. 7

预应力混凝土狭双曲抛物面壳板的 双向受弯与扭转研究

The Research on the Behavior of Prestressed Concrete
Hyperbolic Paraboloid Slender Shell-beam under
Bending and Torsion

中国建筑科学研究院

CHINESE ACADEMY OF BUILDING RESEARCH



提 要

预应力混凝土双曲抛物面壳板(以下简称壳板)在横向水平荷载作用下处于弯、扭复合受力状态。在过去的工程实践中,壳板大多按单向受弯设计,对弯、扭共同作用下壳板的受力状态研究不多,对它的破坏机理更缺乏感性认识。本文对此在理论上进行了探讨,并与模型试验作了对比,主要包括三个内容:

1. 提出壳板双向弯曲正截面强度计算方法;
2. 从水平分布荷载出发,推导了壳板扭角微分方程,并由初参数法求任意荷载时方程的通解;
3. 着重分析了试验壳板侧转受力的破坏机理,并对壳板在弯、扭同时发生时的有关问题提出初步意见。

目 录

一、概述	(2)
二、壳板的双向弯曲与扭转计算方法	(2)
三、壳板的试验	(7)
四、壳板的计算实例(以B—2板为例)	(9)
五、计算与试验结果的对比	(18)
六、结束语	(21)
参考资料	(21)

The Research on the Behavior of Prestressed Concrete
Hyperbolic Paraboloid Slender Shell-beam under
Bending and Torsion

Chen You-fan Zhu Zhi-xin Zhao Hong-xiang

Abstract

Roof element of prestressed concrete hyperbolic paraboloid slender shell-beam (simplified as shell-beam in the following text) may be subjected to lateral horizontal loads putting it under combined bending and torsion. In the past engineering practice, such shell-beams were mostly designed for simple bending only. There was little research done on the behavior of a shell-beam under bending and torsion and still less was known about its failure mechanism.

This paper gives an account of further research work in this field through model tests, and contains the following three main parts:

1. A Proposed calculating method of the normal strength for a shell-beam under two-way bending.
2. Derivation of the differential equation for the angle of twist of a shell-beam subjected to laterally distributed horizontal load alone, and a general solution applicable to an arbitrary loading condition obtained by the initial parameter method.
3. A detailed description of the failure mechanism of test shell-beams subjected to concentrated loads inclined at an angle α to the principal axes of symmetry of the cross-sections, and some suggestions relating to the shell-beam under combined bending and torsion.

预应力混凝土狭双曲抛物面壳板的

双向受弯与扭转研究

中国建筑科学研究院标准设计研究所

陈勖瑜 朱知信 赵鸿翔

一、概 述

预应力混凝土狭双曲抛物面壳板(以下简称壳板)在工程上存在横向水平力等作用的可能,因而必然涉及双向受弯和扭转问题。过去,国内工程上应用的壳板大多处于单向受弯状态,一般按梁式理论计算,对弯曲、扭转共同作用下壳板的受力状态研究不多,对它的破坏机理更缺乏感性认识,因而很有必要作深入的研究。

近年来,我们对一些小尺寸的预应力模型壳板进行了侧转和正态受力等多方面的试验,并进行了分析研究,取得了一些进展。

在这篇文章中,我们主要给出以下三个内容:1.提出壳板双向弯曲正截面强度计算方法(按梁式理论);
2.从水平分布荷载出发推导壳板扭角微分方程,并由初参数法求任意荷载时方程的通解(按开口薄壁构件理论);
3.研究分析试验壳板侧转受力的破坏机理,并对壳板在弯曲、扭转同时发生时的有关问题提出初步意见。

二、壳板的双向弯曲与扭转计算方法

1. 壳板的中面方程

我们采用这样的座标系统: x 、 y 、 z 三轴之间符合右手法则(图1),于是壳板的中面方程为:

$$z = f_x \frac{x^2}{a^2} - f_y \frac{y^2}{b^2} \quad (1)$$

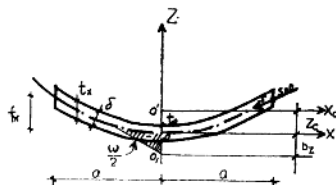
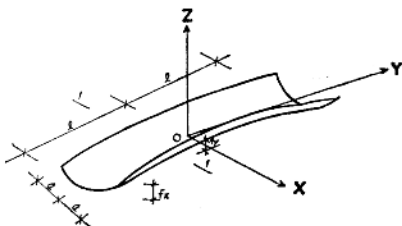


图 1

1-1

(S1)

a —— 1/2 曲面宽度

l —— 1/2 曲面长度

 f_x —— 曲面横向矢高(C) f_y —— 曲面纵向矢高

2. 截面特性计算

横截面见 1—1 剖面。壳板壁高为:

$$t_x = t_0 \left(1 + \lambda \frac{x^2}{a^2} \right) \quad (2)$$

式中:

 t_0 —— $x=0$ 处壳板壁高 λ —— 壳板壁高增大系数壳板横截面由 $x=0$ 到 x 的面积为:

$$A_x = t_0 x \left(1 + \frac{\lambda x^2}{3a^2} \right) \quad (3)$$

$$\text{截面重心到 } x \text{ 轴的距离 } Z_x = \frac{5+3\lambda}{5(3+\lambda)} f_x \quad (4)$$

截面对重心轴 x_c 的惯性矩 I_{xx} 及对 z 轴的惯性矩 I_z 分别按下式计算:

$$I_{xx} = 2t_0 a f_x^2 \left[\frac{\lambda^2}{7} + \frac{1}{5} - \frac{(5+3\lambda)^2}{75(3+\lambda)} \right] \quad (5)$$

$$I_z = 2t_0 a^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{\lambda}{5} \right) \quad (6)$$

利用弧线 S 作为度量截面中线各点的座标, 并选定开口端 $S=0$, 则弧线为 S 所截取的截面对 x_c 轴的静矩 S_{xx} 及对 z 轴的静矩 S_z 可按下式计算:

$$S_{xx} = -t_0 f_x x \left[\frac{\lambda x^4}{5a^4} + \frac{(5-\lambda^2)x^2}{5(3+\lambda)a^2} - \frac{5+3\lambda}{5(3+\lambda)} \right] \quad (7)$$

$$S_z = t_0 \left[a^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{4} \right) - x^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda x^2}{4a^2} \right) \right] \quad (8)$$

截面扭转中心 O_1 到 O 点的距离 b_x 按下式计算:

$$b_x = \frac{7+5\lambda}{7(5+3\lambda)} f_x \quad (9)$$

截面中线上各点的主扇性座标 (按右手法则为正):

$$\omega = -\frac{x^3}{3a^2} f_x + b_x x \quad (10)$$

截取面积的主扇性面积矩 S_ω 为:

$$S_\omega = -t_0 a^2 \left[\frac{2\lambda+3}{36} f_x - \frac{2+\lambda}{4} b_x \right] + t_0 x^2 \left[\left(\frac{\lambda x^4}{18a^4} + \frac{x^2}{12a^2} \right) f_x - \left(\frac{\lambda x^2}{4a^2} + \frac{1}{2} \right) b_x \right] \quad (11)$$

截面主扇性惯矩 I_ω 为:

$$I_w = 2t_0 a^3 \left[\frac{7\lambda + 9}{567} f_z^2 - \frac{2(5\lambda + 7)}{105} b_z f_z + \frac{3\lambda + 5}{15} b_z^2 \right] \quad (12)$$

截面扭转惯性矩 I_k 按下式计算:

$$I_k = \frac{1}{3} \int_{S_1} \delta^3 ds \quad (13)$$

对于等厚截面:

$$I_k = \frac{1}{3} \delta^3 S_1 \quad (13)'$$

式中:

S_1 ——弧线 S 的全长, 可按下式求得:

$$S_1 = \left[\sqrt{1 + \frac{4f_z^2}{a^2}} + \frac{a}{2f_z} \ln \left(\frac{2f_z}{a} + \sqrt{1 + \frac{4f_z^2}{a^2}} \right) \right] a \quad (14)$$

δ ——与 S 方向垂直的壁厚, 可由下式表达:

$$\delta = t_z \frac{1}{\sqrt{1 + 4f_z^2 x^2 / a^2}} \quad (15)$$

3. 内、外力(矩)及变位的正负号规定

图2给出了内、外力(矩)及变位的正方向, 我们规定, 沿 YO 轴看 Y 截面, 内、外力沿轴正向为正, 扭矩按右手法则为正; 在相反的截面上, 内力及内扭矩的正向与前者恰好相反。弯矩以截面上正象限中的点产生拉应力者为正, 如 M_x 使 $x > 0$ 各点产生拉应力时为正; 轴向位移 u 、 v 、 w 为相应于 x 、 y 、 z 轴方向的位移, 沿轴正向为正; 扭角 θ 按右手法则为正。正应力以拉应力为正, 反之为负。

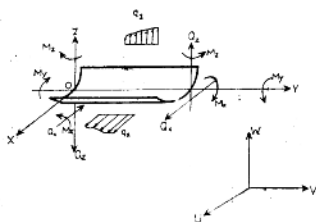


图 2

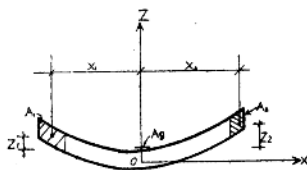


图 3

4. 双向受弯强度计算

壳板双向受弯强度计算可根据内、外弯矩作用平面相重合的条件求得, 由图3得:

$$KM_x = (A_1 Z_1 + A_2 Z_2) R_w \quad (16)$$

$$KM_y = (A_1 X_1 + A_2 X_2) R_w \quad (17)$$

式中:

K ——抗弯强度安全系数

$M_x (M_y)$ ——对 $X(Z)$ 轴的弯矩

$A_1 (A_2)$ ——壳板受压区面积。由于壳板很薄, 为简化计算, 取受压区底边与 Z 轴平行, 这对抗弯强度影响很小。

$x_1(x_2)$ ——相应于 $A_1(A_2)$ 重心的 x 座标

$z_1(z_2)$ ——相应于 $A_1(A_2)$ 重心到受拉钢筋 A_g 合力点的距离

R_w ——混凝土的弯曲抗压设计强度, 这里取负值。

若求得 A_1 、 A_2 (相应可求得 x_1 、 x_2 及 Z_1 、 Z_2), 并使之满足 (16)、(17) 式, 则问题得到解决。我们应用迭代法求 A_1 、 A_2 , 由 (16)、(17) 式可得

$$A_1 = \frac{x_2 - \operatorname{tg} \alpha \cdot z_2}{z_1 x_2 - x_1 z_2} \cdot \frac{KM_x}{R_w} \quad (18)$$

$$A_2 = \frac{z_1 \operatorname{tg} \alpha - x_1}{z_1 x_2 - x_1 z_2} \cdot \frac{KM_x}{R_w} \quad (19)$$

式中:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_z}{M_x}$$

一般来说, 在工程上主要是验算同一块壳板侧转受力时其承载能力是否会降低? 因而进行以上计算可先按壳板正放时的受压区重心位置 $x_1(z_1)$ 作为初始值, 代入 (18)、(19) 二式即得 A_{10} 、 A_{20} ; 由 A_{10} 、 A_{20} 再求相应的 $x_{10}(z_{10})$ 、 $x_{20}(z_{20})$ ……, 如此逐次逼近, 最终可求得 A_1 、 A_2 。求得之 A_1 、 A_2 应满足规范对受压区高度的规定, 并由此计算所需受力钢筋的数量。

5. 壳板的扭转计算

壳板在横向水平荷载作用下, 由于壳板纵向起拱, 其扭转中心的连线为一根曲线, 因而一水平力对某一截面不产生扭转时, 对其它截面则要产生扭转。这样, 与直梁的扭角微分方程相比就比较复杂, 但我们可以在直梁扭角微分方程的基础上引入水平力的影响, 即可导出类似的方程和求得相似的解。下面我们先从水平分布荷载着手建立扭角微分方程, 然后再推广到一般的荷载情况。

为计算方便, 我们将壳板纵向中线曲线座标系移到图 4 所示的位置, 于是得壳板纵向中线方程:

$$z = f_y - f_y \frac{(y-l)^2}{l^2} \quad (20)$$

在壳板上任意取出一微分单元 ds , 在横向水平荷载 q'_x 作用下, 由扭矩平衡得:

$$M_s + dM_s + M_s + (Q_x + dQ_x)dz - q'_x ds(D + \frac{1}{2}dz) = 0$$

略去高阶微量得:

$$dM_s + Q_x dz - q'_x D ds = 0 \quad (21)$$

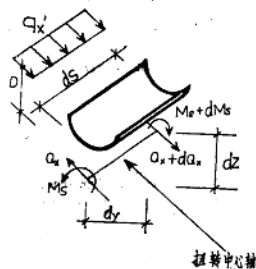
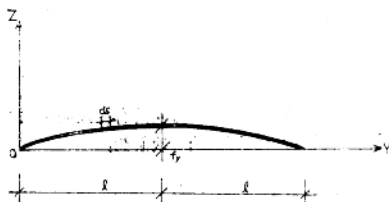


图 4

由一般薄壁构件约束扭转理论可知,截面上扭矩 M_s 由自由扭转扭矩 M_k 及约束扭转扭矩 M_o 组成,即

$$M_s = M_k + M_o = GI_k' \frac{d\theta}{ds} - E_k I_o' \frac{d^2\theta}{ds^2}$$

由于壳板纵向起拱很小,工程上一般 $l/f_s \approx 30$ 左右,因而可近似取 $M_s = M_k$, $I_k = I_k'$, $I_o = I_o'$

……,且考虑 $\frac{dy}{ds} \approx 1$ 以及 y 对 s 一阶以上的导数接近于零,于是可得:

$$M_s = GI_k \frac{d\theta}{dy} - E_k I_o \frac{d^2\theta}{dy^2}$$

另外,在工程上给出的分布荷载一般是以水平面为基准的,因而有 $q_s = q_x \frac{ds}{dy}$

将这些关系式代入 (21) 式,并除以 dy 得:

$$GI_k \theta'' - E_k I_o \theta''' - 2f_y \frac{(y-l)}{l^2} Q_x + q_x D = 0$$

令 $k^2 = \frac{GI_k}{E_k I_o}$, 代入上式整理后得:

$$\theta''' - k^2 \theta'' = \frac{1}{E_k I_o} (q_x D + 2f_y \frac{l-y}{l^2} Q_x) \quad (22)$$

(22) 式即壳板在横向水平分布荷载作用下的扭角微分方程。其中:

θ —— 为壳板的扭角。 $\theta''' = \frac{d^3\theta}{dy^3}$, $\theta'' = \frac{d^2\theta}{dy^2}$, $E_k I_o$

G —— 混凝土弹性模量及剪切弹性模量,并取 $G = 0.425 E_k$ 。

I_k —— 壳板垂直于 y 轴的截面扭转惯性矩。

I_o —— 壳板垂直于 y 轴的截面主扇性惯矩。

D —— 水平分布荷载到截面扭转中心的距离。沿 y 轴可以为变量,但在单元体 dy 上可看作常量。

q_x —— 沿 y 轴分布的水平荷载强度。可以为变量,但在单元体 dy 上可看作常量。

Q_x —— y 截面上沿 x 轴向的剪力。

(22) 式等号右边括号中的第二项即为起拱由剪力 Q_x 引起的单位长度上的扭矩:

令 $m = q_x D + 2f_y \frac{l-y}{l^2} Q_x$, 代入 (22) 式得:

$$\theta''' - k^2 \theta'' = \frac{m}{E_k I_o} \quad (22)'$$

这样, (22)' 式即与一般等截面直梁在分布扭矩作用下的扭角微分方程具有一致的形式。我们称 m 为当量分布扭矩,应用初参数法可求得 (22) 或 (22)' 式的齐次解为:

$$\theta = \theta_0 + \theta_0' \frac{\text{sh}ky}{k} + \frac{B_0}{GI_k} (1 - \text{ch}ky) + \frac{M_0}{kGI_k} (ky - \text{sh}ky) \quad (23)$$

有了 (23) 式,我们可不必专门求 (22) 或 (22)' 式的特解,而直接应用 (23) 式中初参数

的形式, 即可求得壳板在任意荷载作用下的扭角方程式为:

$$\begin{aligned} \theta = \theta_0 + \theta'_0 \frac{\text{sh}ky}{k} + \frac{B_0}{G I_k} (1 - \text{ch}ky) + \frac{M_0}{k G I_k} (ky - \text{sh}ky) \\ - \left\|_{y_1} \frac{B}{G I_k} [1 - \text{ch}k(y - y_1)] - \left\|_{y_1} \frac{M_y}{k G I_k} [k(y - y_1) - \text{sh}k(y - y_1)] \right. \\ \left. - \left\|_{y_1} \int_{y_1}^y \frac{m(\xi)}{k G I_k} [k(y - \xi) - \text{sh}k(y - \xi)] d\xi \right. \right. \quad (24) \end{aligned}$$

式中 θ_0 、 θ'_0 、 B_0 、 M_0 分别为 $y = 0$ 处的扭角、扭率、双力矩及扭矩, B 、 M_y 、 $m(\xi)$ 分别为外双力矩、扭矩、当量分布扭矩。式中含有 $\left\|_{y_1}$ 的项表示 $y > y_1$ 时才计入该项, 其中积分项中之 $m(\xi)$ 若仅出现在区域 $[y_1, y_2]$ 上, 则当计算截面为 $y_1 < y < y_2$ 时, 积分上限取 y_2 ; 当 $y \geq y_2$ 时, 积分上限取 y_2 。

这里要指出, 由于初参数所在的截面为沿 OY 轴向看到的截面, 因而 (24) 式中外荷载的正方向应与初参数的正方向一致, 所以 (24) 式 $\left\|_{y_1}$ 项为负号。双力矩 B 是使主扇性座标 ω 在正值处产生拉应力者为正。

三、壳板的试验

1、壳板中面方程各参数的确定

参照工程壳板的常用尺寸及各参数之间的比例关系, 本试验壳板尺寸见表 1。

表 1

板 号	a (cm)	l (cm)	f_4 (cm)	f_2 (cm)	t_0 (cm)	λ (cm)
B-2	15	90	7.88	3	0.75	1.4/3
B 2-10	15	90	7.88	3	0.75	1.4/3
B 2-9	15	90	7.95	3	1.1	5/11

由于试验壳板很薄, 因而采用高标号水泥砂浆制作, 砂浆强度指标暂按混凝土强度指标取值, 壳板配置高强钢丝, 并施加预应力, 具体数据见表 2。

表 2

板 号	R (kg/cm ²)	R_w^b (kg/cm ²)	R_c^b (kg/cm ²)	A_f (cm ²)	R_f (kg/cm ²)	E_k (kg/cm ²)	E_g (kg/cm ²)	α (cm)	β (度)	Z_g (cm)
B-2	388	340	25.0	0.11	19000	3.26×10^5	1.8×10^6	11.5	5.87	0.39
B 2-10	391	342	25.1	0.11	19000	3.27×10^5	1.8×10^6	11.5	5.87	0.39
B 2-9	354	309	23.4	0.14	19000	3.16×10^5	1.8×10^6	11.6	5.84	0.4

表中布筋宽度 (图 5)

$$\Delta = 2a \left(1 - \sqrt{\frac{f_f}{f_s}} \right)$$

• 这里还包括水平荷载以外因素引起的分布扭矩。

预应力钢丝与 y 轴的夹角

$$\beta = \arctg \frac{2a - \Delta}{2l}$$

跨中预应力钢丝重心到 x 轴的距离: $Z_g = \frac{f_x}{3} \left(\frac{\Delta}{2a} \right)^2$

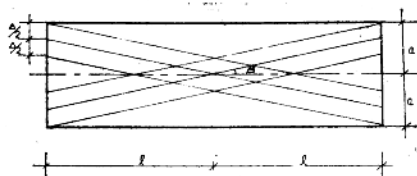


图 5

2、试验方案

壳板侧转 19° 放置, 跨中作用三个集中荷载 (图 6)。为了测定壳板的应力与变位, 我们在跨中布置了一台倾角仪。同时, 在跨中和支座截面以及在跨中开口端两侧, 均沿 Z 轴向布置了百分表, 以测定壳板跨中截面的扭角及相应点的位移, 并在跨中截面外侧布置了电阻应变片, 以测定壳板的应力和应变。仪表布置详见图 6。

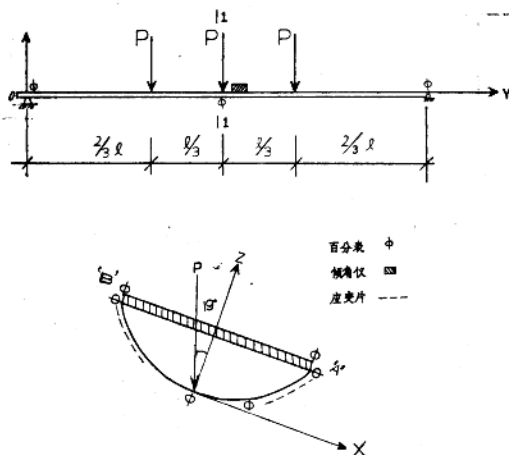


图 6

3、试验过程简介

在试验过程中, 三块板反映出的特征具有非常明显的一致性: 正截面开裂前, 壳板变

位、应变大致与荷载按比例发展；正截面开裂后，变位增长越来越快，应变变化也较大。

壳板自始至终发生扭转，正截面开裂后，扭角增长幅度越来越大，跨中截面开口端顺扭转方向出现外鼓现象，且随荷载的增长而更趋明显。

第一条斜裂缝均出现在近支座X为负值的内表面上，且不贯通到壳板的外侧面上去。此时壳板扭转猛然增大，新的斜裂缝逐渐出现，很快即在相同部位的外侧面上形成与之交叉的斜裂缝，壳板扭转不断发展而突然顺扭转方向倾倒折断破坏。裂缝见图7。

壳板破坏前，跨中截面的最大实测线位移及开口端处混凝土的压应变均不大，毫无正截面破坏的征兆。

试验壳板的开裂、破坏荷载以及破坏前跨中截面最大实测线位移，“A”、“B”点的压应变值列于表3。

表 3

板号	分项 实测值	正截面开裂荷载 P_c (kg)	斜截面开裂荷载 P_c' (kg)	破坏荷载 P_u (kg)	Z方向位移 W (cm)	X方向位移 u (cm)	"A"点压应变 ϵ_A %	"B"点压应变 ϵ_B %
B-2		45	55.1	65.3	1.105	0.53	-0.085	-0.098
B2-10		54.8	63	67	1.23	0.28	*-0.042	*-0.071
B2-9		65.5	89.5	89.5	1.18	0.15	-0.074	-0.105

注：B2-10板电测应变值来回飘动，估计贴片质量不好。

四、壳板的计算实例（以B-2板为例）

1、双向受弯强度计算

由（3）式可得由 $x=0$ 到 x 的面积：

$$A_x = 0.75x \left(1 + \frac{1.4x^2}{2025} \right) \quad (3)'$$

$$\text{横截面面积之半 } A = t_s a \left(1 + \frac{\lambda}{3} \right) = 13 \text{ cm}^2$$

由表2中所列数据可按下式求得壳板正放时的受压区面积：

$$A_s = \frac{A_y R_y \cos \beta}{R_z^2} = 6.114 \text{ cm}^2$$

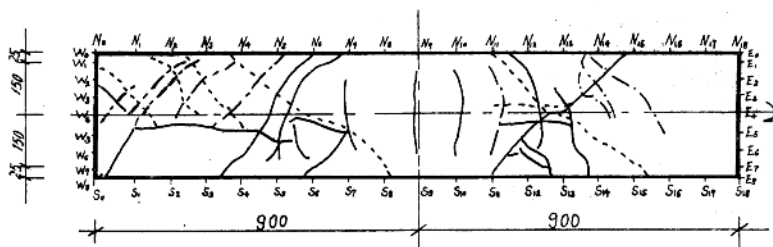
相应的 $x_0 = 13.6 \text{ cm}$, $z_0 = z - z_g = 6.48 - 0.39 = 6.09 \text{ cm}$ 极限抗弯弯矩, $M_u = 12650 \text{ kg-cm}$.

壳板侧转 19° 放置时, 设壳板具有相同的承载能力, 此时 $M_x = -M_u \cdot \cos 19^\circ = -11960 \text{ kg-cm}$

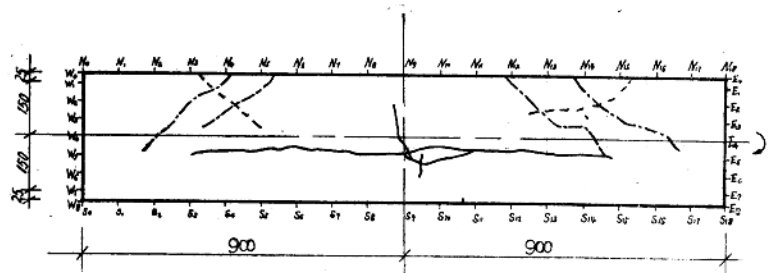
$$M_x = M_u \sin 19^\circ, \quad \therefore \tan \alpha = \frac{M_x}{M_y} = -\tan 19^\circ = -0.3443$$

$$\text{令 } -x_{10} = x_{10} = x_0 = 13.6 \text{ cm}$$

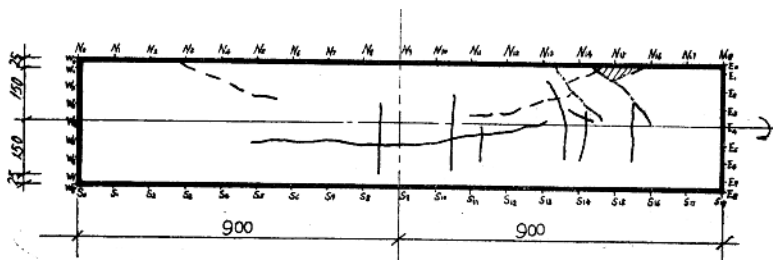
$$z_{10} = z_{10} = z_0 = 6.09 \text{ cm}$$



B-2



B-10



B-9

图 7

—— 贯穿裂缝
 - - - 板面裂缝
 板底裂缝

代入(18)、(19)式得:

$$A_{10} = \frac{11960}{2 \times 340} \left(\frac{1}{6.09} + \frac{0.3443}{13.6} \right) = 3.333 \text{ cm}^2$$

$$A_{20} = \frac{11960}{2 \times 340} \left(\frac{1}{6.09} - \frac{0.3443}{13.6} \right) = 2.443 \text{ cm}^2$$

应用试算法求受压区底边到 Z 轴的距离 X'_1 、 X'_2 ，取 $X'_1 = 11.76 \text{ cm}$ $X'_2 = 12.68 \text{ cm}$ ，则由 (3)' 式得:

$$Ax'_1 = 9.663 \text{ cm}^2 \approx A - A_{10} = 9.667 \text{ cm}^2$$

$$Ax'_2 = 10.567 \text{ cm}^2 \approx A - A_{20} = 10.557 \text{ cm}^2$$

由壳板受压区壁高变化不大，为简化计算，受压区重心可近似取

$$x_1 = - \left(\frac{x'_1 + a}{2} \right) = -13.38 \text{ cm}$$

$$x_2 = \frac{x'_2 + a}{2} = 13.84 \text{ cm}$$

$$z_1 = f_x \frac{x_1^2}{a^3} - z_g = 5.89 \text{ cm}$$

$$z_2 = f_x \frac{x_2^2}{a^3} - z_g = 6.32 \text{ cm}$$

代入(18)、(19)式得

$$A_1 = \frac{11960}{340} \left(\frac{13.84 + 0.3443 \times 6.32}{13.38 \times 6.32 + 13.84 \times 5.89} \right) = 3.391 \text{ cm}^2 \approx A_{10} = 3.333 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \frac{11960}{340} \left(\frac{13.38 - 0.3443 \times 5.89}{13.38 \times 6.32 + 13.84 \times 5.89} \right) = 2.406 \text{ cm}^2 \approx A_{20} = 2.443 \text{ cm}^2$$

即一次迭代就得到比较满意的结果，于是

$$A_1 + A_2 = 5.797 \text{ cm}^2 < A_0 = 6.114 \text{ cm}^2$$

这表明，壳板侧转 19° 后，对于同一个 M_x ，其预应力钢丝的数量可以减少，即其承载能力有所提高。此外，还应进行受压区高度的验算。∵ $A_1 > A_{10}$ ，所以仅需验算 A_1 即可。相应于 A_1 底边中点的座标近似取 $x'_1 = 11.76 \text{ cm}$ ，于是受压区高度可近似取

$$z_h = f_x - f_x \frac{x'^2_1}{a^2} = 3.04 \text{ cm}$$

$$h_0 = f_x - z_g = 7.49 \text{ cm}$$

$$z_h/h_0 = 0.406 < 0.45 \quad \text{可以。}$$

2. 扭转计算

(1) 截面特性计算

$$\text{截面重心到 } x \text{ 轴的距离: } z_0 = \frac{5+3\lambda}{5(3+\lambda)} f_x = 2.91 \text{ cm}$$

截面对重心轴 x_c 的惯性矩 I_{xc} 及对 z 轴的惯性矩 I_z 分别按(5)、(6)式计算:

$$I_{xc} = 152.5 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 2160 \text{ cm}^4$$

由(7)、(8)式可得:

$$S_{xc} = -5.91 \times \left(0.0933 \frac{x'}{15'} + 0.276 \frac{x^2}{15^2} - 0.3693 \right) (\text{cm}^2)$$

$$S_z = 0.75 \left[138.825 - x' \left(0.5 + 0.117 \frac{x^2}{15^2} \right) \right] (\text{cm}')$$

截面扭转中心 O_1 到 O 点的距离由 (9) 式得:

$$b_s = 1.642 \text{ cm}$$

截面中线上各点的主扇性座标由(10)式得:

$$\omega = x \left(1.642 - 2.627 \frac{x^2}{15^2} \right) (\text{cm}')$$

由 (11) 式可得主扇性面积矩为:

$$S_o = 25.5825 - 0.75 x' \left(0.821 - 0.4651 \frac{x^2}{15^2} - 0.2043 \frac{x^4}{15^4} \right) (\text{cm}')$$

截面主扇性惯矩由(12)式得:

$$I_o = 980 \text{ cm}^4$$

开口端壁厚按(15)式计算:

$$\delta_s = t_s \frac{1}{\sqrt{1 + 4f_s^2/a^2}} = 0.758 \text{ cm}$$

由于截面壁厚变化很小, 因而可近似看作等厚截面计算, 取平均壁厚:

$$\delta = \frac{\delta_s + t_s}{2} = 0.754 \text{ cm}$$

由(14)式可求得弧线全长为:

$$S_1 = 34.8 \text{ cm}$$

于是可由(13)'式求得扭转惯性矩:

$$I_K = 5 \text{ cm}^4$$

$$k = \sqrt{\frac{G I_K}{E_b I_o}} = 0.0466 / \text{cm}$$

$$kl = 0.0466 \times 90 = 4.194$$

$$GI_K = 0.425 \times 3.26 \times 10^3 \times 5 = 6.93 \times 10^3 \text{ kg-cm}^2$$

(2) 转角计算

$$P_x = P \sin 19^\circ = 0.3256 P$$

$$D = b_s + \frac{1}{2} t_s = 2.017 \text{ cm}$$

$$Z_{s1/3} = f_r - f_r \frac{1}{9} = \frac{8}{9} f_r$$

壳体两端简支支承, 于是 $\theta_s = 0$, $B_s = 0$,

$$M_s = P_x (Z_{s1/3} + D) + \frac{1}{2} P_x (f_r + D) = P_x \left(\frac{25}{18} f_r + 1.5 D \right)$$

$$q_s = 0, \quad Q_s = 1.5 P_x$$

$$m_1(\xi) = 2f_y \frac{l - \xi}{l^2} Q_s = 3f_y P_s \frac{l - \xi}{l^2} \quad \xi > 0$$

在 $y = \frac{1}{2}l$ 处有 $M_{y/l} = P_s D$, $Q_s = -P_s$

$$m_2(\xi) = -2f_y P_s \frac{l - \xi}{l^2} \quad \xi > 2l/3$$

$\theta'_i = 0$, 代入(24)式, 并考虑荷载对称, 仅需列出半跨扭角方程式:

$$\begin{aligned} \theta = \theta'_i &= \frac{Shky}{k} + \frac{P_s}{kGI_K} \left(\frac{25}{18} f_y + 1.5 D \right) (ky - Shky) - \int_0^y \frac{3f_y P_s (l - \xi)}{kGI_K l^2} [k(y \\ &- \xi) - Shk(y - \xi)] d\xi - \left\|_{y/l} \frac{P_s D}{kGI_K} \left[k \left(y - \frac{2l}{3} \right) - Shk \left(y - \frac{2l}{3} \right) \right] \right. \\ &\left. - \left\|_{y/l} \int_{2l/3}^y \frac{2f_y P_s (l - \xi)}{kGI_K l^2} [k(y - \xi) - Shk(y - \xi)] d\xi \right. \right. \quad (24) \end{aligned}$$

式中积分项可应用分部积分求得, 以下列积分为例:

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^y (\xi - l) [k(y - \xi) - Shk(y - \xi)] d\xi &= \int_{y_1}^y [k(\xi - l)(y - \xi) - (\xi - l)Shk(y \\ &- \xi)] d\xi = k \left[\frac{y^3}{6} - \frac{l}{2} y^2 + \left(l - \frac{y_1}{2} \right) y_1 y - \left(\frac{l}{2} - \frac{y_1}{3} \right) y_1^2 \right] + \frac{l}{k} [chk(y - y_1) \\ &- 1] - \int_{y_1}^y \xi Shk(y - \xi) d\xi = k \left[\frac{y^3}{6} - \frac{l}{2} y^2 + \left(l - \frac{y_1}{2} \right) y_1 y - \left(\frac{l}{2} - \frac{y_1}{3} \right) y_1^2 \right] \\ &+ \frac{l}{k} [chk(y - y_1) - 1] + \left[\frac{\xi}{k} chk(y - \xi) \right] \Big|_{y_1}^y - \frac{1}{k} \int_{y_1}^y chk(y - \xi) d\xi \\ &= k \left[\frac{y^3}{6} - \frac{l}{2} y^2 + \left(l - \frac{y_1}{2} \right) y_1 y - \left(\frac{l}{2} - \frac{y_1}{3} \right) y_1^2 \right] + \frac{l}{k} [chk(y - y_1) - 1] \\ &+ \frac{y}{k} - \frac{y_1}{k} chk(y - y_1) - \frac{1}{k} Shk(y - y_1) \end{aligned}$$

将此积分代入上式, 并以各自的积分下限代入, 即可得到相应的积分项。(24)式对 y 求一次导数, 由于荷载对称, $\theta'_i = 0$, 以具体数据代入并整理后得:

$$\theta'_i = \frac{P_s}{GI_K} (0.843 f_y + 1.42 D)$$

代入(24)式即得:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{P_s}{kGI_K} (0.843 f_y + 1.42 D) Shky + \frac{P_s}{kGI_K} \left(\frac{25}{18} f_y + 1.5 D \right) (ky - Shky) \\ &- \left\|_{y/l} \frac{P_s D}{kGI_K} \left[k \left(y - \frac{2l}{3} \right) - Shk \left(y - \frac{2l}{3} \right) \right] - \left\|_{y/l} \frac{2f_y P_s}{k^2 GI_K l^2} \left[y \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{2l}{3} chk \left(y - \frac{2l}{3} \right) \right] - \left\|_{y/l} \frac{2f_y P_s}{kGI_K l^2} \left\{ k \left(\frac{y^3}{6} - \frac{l}{2} y^2 + \frac{4l^2}{9} y - \frac{10}{81} l^3 \right) \right. \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{l}{k}\left[1-\operatorname{ch}k\left(y-\frac{2l}{3}\right)\right]-\frac{1}{k^2}\operatorname{Sh}k\left(y-\frac{2l}{3}\right)\left\}+\frac{3f_yP_x}{kGI_Kl^2}\left[k\left(\frac{y^3}{6}-\frac{l}{2}y^2\right)-\frac{l}{k}(1-\operatorname{ch}ky)+\frac{1}{k}\left(y-\frac{1}{k}\operatorname{Sh}ky\right)\right]\right.$$

经整理后可改写为:

$$\theta=\theta_s+\theta_c \quad (24)'$$

其中:

$$\theta_s=\frac{P_xD}{kGI_K}\left\{1.5ky-0.08\operatorname{Sh}ky-\frac{1}{k}\left[k\left(y-\frac{2l}{3}\right)-\operatorname{Sh}k\left(y-\frac{2l}{3}\right)\right]\right\}$$

$$\begin{aligned} \theta_c=\frac{P_xf_y}{kGI_K}\left[-0.546\operatorname{Sh}ky+\frac{25}{18}ky+\frac{3k}{l^2}\left(\frac{y^3}{6}-\frac{l}{2}y^2\right)-\frac{3}{kl}(1-\operatorname{ch}ky)\right. \\ \left.+\frac{3}{kl^2}\left(y-\frac{1}{k}\operatorname{Sh}ky\right)\right]-\frac{1}{kGI_K}\left\{k\left(\frac{y^3}{3l^2}-\frac{y^2}{l}+\frac{8y}{9}-\frac{20l}{81}\right)\right. \\ \left.-\frac{2}{kl}\left[1-\frac{y}{l}-\frac{1}{3}\operatorname{ch}k\left(y-\frac{2l}{3}\right)\right]-\frac{2}{k^2l^2}\operatorname{Sh}k\left(y-\frac{2l}{3}\right)\right\} \end{aligned}$$

θ_s ——为直梁的扭角方程式

θ_c ——为起拱引起的扭角方程式

有了(24)式,壳板的变位及应力均可求得。

3. 抗裂计算

(1) 跨中正截面抗裂计算

由于设备原因,试验壳板预应力值以伸长率控制,张拉控制应力

$$\sigma_K=0.45 R_y=8550 \text{ kg/cm}^2$$

因预应力钢丝配置不多,这里不考虑钢丝的换算面积。张拉端锚具变形值取 $\lambda_1=3 \text{ mm}$,台座 $L=200 \text{ cm}$,预应力损失:

$$\sigma_{s1}=\frac{\lambda_1}{L}E_s=2700 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{s4}=0.07 \sigma_K=600 \text{ kg/cm}^2$$

第一阶段预应力的合力: $N_{y1}=A_y(\sigma_K-\sigma_{s1}-\sigma_{s4})=578 \text{ kg}$

预应力合力点处的预压应力为:

$$\sigma_h=\left[\frac{-N_{y1}}{2A}-\frac{N_{y1}(z_c-z_g)^2}{I_{xc}}\right]\cos\beta=-46.1 \text{ kg/cm}^2$$

放张时砂浆的立方强度 $R'=315 \text{ kg/cm}^2$, $\frac{\sigma_h}{R'}=0.146$, 由 TJ 10—74表24得: $\sigma_{s5}=640 \text{ kg/cm}^2$, 于是得钢丝永存应力:

$$\sigma_y=\sigma_K-\sigma_{s1}-\sigma_{s4}-\sigma_{s5}=4610 \text{ kg/cm}^2$$

跨中截面外侧各点的预应力值为:

$$\sigma_{yh}=\left[\frac{-\sigma_y A_y}{2A}+\frac{\sigma_y A_y(Z_c-Z_g)}{I_{xc}}\right]\left(Z-Z_c-\frac{l_x}{2}\right)\cos\beta=0.286 X^2-46.79$$

跨中截面外侧各点由弯曲和扭转引起的正应力分别按下列公式计算:

正应力

$$M = (1.5 Pl - \frac{1}{3} Pl) = \frac{3.5}{3} Pl$$

$$M_x = -M \cos 19^\circ = -99.28 \text{ P}$$

$$M_z = M \sin 19^\circ = 34.18 \text{ P}$$

于是得:

$$\sigma_b = \frac{M_x}{I_{xc}} \left(Z - Z_c - \frac{t_x}{2} \right) + \frac{M_z}{I_z} X = (2.139 + 0.0158 X - 0.0223 X^2) P$$

② 扇性正应力

$$\text{跨中双力矩: } B_l = -E_k I_o \theta'_l = 25.62 \text{ P}$$

于是得扇性正应力:

$$\sigma_u = \frac{B_l}{I_o} \omega = (0.0429 X - 0.000305 X^3) P$$

这里要指出, 由于纵向曲线曲率半径 \$R\$ 很大, 我们略去了压应力 \$\frac{M}{2RA}\$ 项, 由此可得跨中截面外侧各点的正应力为:

$$\sigma = \sigma_b + \sigma_u = (2.139 + 0.0587 X - 0.0223 X^2 - 0.000305 X^3) P$$

现将部分点的正应力列于表 4。

表 4

X (cm)	-15	-14	-12	-10	-8	-6	-4	-2
σ_b	-3.118 P	-2.453 P	-1.262 P	-0.314 P	0.585 P	1.241 P	1.719 P	2.018 P
σ_u	0.386 P	0.236 P	0.012 P	-0.124 P	-0.187 P	-0.191 P	-0.152 P	-0.083 P
σ	-2.733 P	-2.217 P	-1.25 P	-0.438 P	0.398 P	1.05 P	1.567 P	1.935 P

X (cm)	0	2	4	6	8	10	12	14	15
σ_b	2.139 P	2.081 P	1.845 P	1.431 P	0.838 P	0.132 P	-0.883 P	-2.011 P	-2.642 P
σ_u	0	0.083 P	0.152 P	0.191 P	0.187 P	0.124 P	-0.012 P	-0.236 P	-0.386 P
σ	2.139 P	2.164 P	1.997 P	1.622 P	1.025 P	0.256 P	-0.895 P	-2.247 P	-3.028 P

由表 4 可知最大拉应力约位于 \$X=2\$ cm 处, 即 \$\sigma=2.164\$ P, 该点的预压应力 \$\sigma_{y1} = -45.65\$ kg/cm², 取 \$\nu=1.75\$, 并令 \$\sigma = -\sigma_{y1} + \nu R^2\$, 则求得抗裂荷载为:

$$P_c = \frac{45.65 + 1.75 \times 25}{2.164} = 41.3 \text{ kg}$$

(2) 支座斜截面抗裂计算

支座截面预应力钢丝合力点位置近似取 \$Z_k = \frac{1}{3} f_k = 2.63\$ cm, 则内侧曲线各点的预应力为:

$$\sigma_{y1} = \left[\frac{-\sigma_y A_y}{2A} + \frac{\sigma_y A_y (Z_k - Z_c)}{I_{xc}} \left(Z - Z_c + \frac{t_x}{2} \right) \right] \cos \beta = -21.75 + 0.0332 X^2$$

外侧曲线各点的预应力为: