LIXUE

北京……材料科

力学

（下册）

漆安慎
杜婵英

目　　录

第六章 刚体力学

§6-1 刚 体

在第一章已指出，研究飞行炮弹的旋转，地球自转等问题时，物体的形状、大小起着关键作用，不能再用质点这个理想模型来讨论。并且，实际物体的形状、大小还可以变化，如桥梁的骨架，房屋的横梁，它们一方面在力的作用下保持平衡，另一方面又在力的作用下变形，而这些变形又会引起力的作用点、作用方向和大小的改变。突出形状和大小的作用，而忽略物体的变形，我们建立一个新的理想模型——“刚体”。所谓刚体就是在任何情况下，形状和大小都不发生变化的力学研究对象。

正象“质点”一样，“刚体”是实际中并不存在的一种“理想模型”，无论多么“硬”的物体，在力的作用下也会变形。但在某些情况下，可以把一个实际物体当作刚体来讨论，例如，房屋横梁处于平衡，在力的作用下发生变形，由于变形，所受各力的作用点、方向、大小也会有改变。但是因为变形很小，这些改变极不显著，考虑不考虑变形，力的作用状况相差无几。因此，在研究横梁平衡的问题上，可以把它当作刚体。物体是不是可以看作刚体，要由问题的性质决定。一个物体在这个问题中可以看作刚体，在另一个问题中就不一定可以看作刚体。例如，如果我们所研究的恰好是横梁变形的多少，当然，就不能不考虑它因负重而下沉，不可以再当作刚体了。

至于一个物体能否看作是刚体或其它理想模型，归根到底要靠实践的检验，使用理想模型研究实际问题所产生的误差也需要根据实际情况加以改正和补充，使它符合实际，以便更好地指导实践。

刚体力学研究是在质点力学基本规律的基础上进行的。为了应用质点动力学的知识研究刚体的运动，从已知规律出发研究未知的规律，我们把刚体分成许多部分，每一部分都小到可以看作是质点，这些小部分叫做刚体的“质元”。如果我们能够把握所有这些质元的运动情况，就算是掌握了刚体的运动。由于刚体不变形，各质元间的距离不发生变化，而质元间距离保持不变的质点组叫做“不变质点组”。把刚体看作不变质点组是研究刚体力学的基本方法。

§ 6-2 刚体的平动和转动

（一）平动和转动

刚体运动的情况多种多样，有时很复杂，其中最简单的两种运动是平动和转动。平动和转动又是刚体最基本的两种运动形式，刚体的一般运动可以看作是这两种基本运动合成的。

如果一个物体在运动过程中物体上任意一条直线在各个时刻的位置均互相平行，则物体作平动。

在图6·2-1中，物体是作平动的，因为无论刚体运动到哪个位置，AB 所在直线均彼此平行。

显然，物体平动时，其上各点的运动状况，即位移、速度和加速度都是相同的，因此，从运动学角度说来，只要了解物体上面一点的运动，就能够掌握整个刚体的运动。

刚体另一种最基本的运动是绕固定轴的转动。若物体运

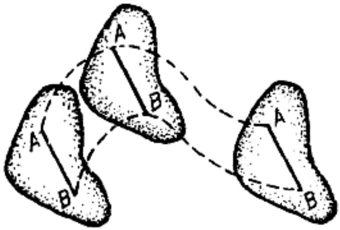


图 6·2-1

动时，**上面所有各点都绕一条共同的直线作圆周运动，则物体绕固定轴转动**。各点均绕其转动的直线叫做**转动轴线**。机床主轴的运动，各种车辆的车轮相对于车轴的运动以及飞机螺旋浆相对于机身的运动均属于绕固定轴的转动。

当刚体作平动时，上面各个质元的运动情况都是相同的，只要了解其中一个质元的运动，就可以全部掌握刚体整体的运动了，因此运用质点运动学的知识，就能够直接描述刚体的平动。当刚体绕定轴转动时，上面各个质元的运动情况不同，不能运用描述单个质元运动的方法去描述定轴转动，本节着重讨论刚体定轴转动的运动学。

（二）角位移

下面讨论刚体绕固定轴的转动。应该如何描述绕固定轴转动的刚体的位置？图6·2-2想象地用垂直于转动轴线的平面将刚体截出一平面图形，这个平面图形的位置一旦确定，刚体的位置也就确定了。在参照系上选择一通过转动轴线的坐标轴$O-a$作为标准方向。然后，在平面图形上任取一点A，并在平面内作出自A向转动轴线O所引的联线$\overline{OA}$、$\overline{OA}$与O a轴的夹角θ便可以说明平面图形或刚体的位置，刚体所在位

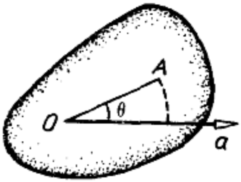


图 6·2-2

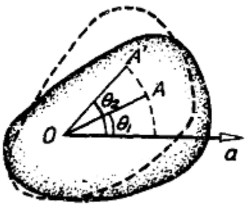


图 6·2-3

置与角度θ相对应。在刚体转动中，θ角和质点沿直线运动中质点坐标x所起的作用是类似的，我们叫它角坐标。

在质点沿直线的运动中，我们曾经用坐标x的增量即位移去描写质点位置的变动，与此类似，我们也可以用角坐标θ的增量去描写刚体绕固定轴转动时位置的变动。参考图6·2-3，设刚体于时刻t_1在θ_1处，于$t_2=t_1+\Delta t$时刻在θ_2处，则

$$\Delta\theta=\theta_2-\theta_1 \tag{6·2-1}$$

称为刚体在t_2-t_1时间内的角位移。

角坐标θ可能取正值也可能取负值，我们规定：从O-a轴开始沿逆时针方向去量度θ角，则θ为正，反之则为负。根据这一规定，角位移$\Delta\theta$可能取正值、也可能取负值。若刚体沿逆时针方向转动，$\theta_2-\theta_1>0$，角位移$\Delta\theta$为正，若刚体沿顺时针方向转动，$\theta_2-\theta_1<0$，角位移$\Delta\theta$为负。这样看来，逆时针方向不仅是角坐标的正方向，同时也是角位移的正方向。在国际制中，用弧度作为角位移的单位。

（三）角速度和角加速度

我们用角速度的概念说明转动的快慢。参考图6·2-3，若在某一时间t——$t+\Delta t$内，刚体的角位移为$\Delta\theta$，则角位

移与发生这一角位移所用时间之比叫做这段时间内的平均角速度，用$\overline{\omega}$表示，

$$\overline{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}。$$

t 至 $t+\Delta t$ 时间内的平均角速度当$\Delta t\to 0$时的极限叫做时刻 t 的瞬时角速度，有时简称角速度，用ω表示，

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\overline{\omega}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{d\theta}{dt}。\qquad(6.2\text{-}2)$$

因此，瞬时角速度等于角坐标对时间的导数。

因为角位移有正负，角速度亦应有正负。根据角位移的正负，刚体逆时针转动，瞬时角速度为正，刚体顺时针转动，角速度为负。

角速度是导出量，它的单位由角位移与时间的单位决定，在国际制中为弧度/秒，其量纲为$[\omega]=[T^{-1}]$。

在工程技术上，常常用每分钟转过的圈数说明转动的快慢，叫做转速或每分转数，单位为转/分，常用字母 n 表示。转速或每分转数同样说明转动的快慢，不过，角速度还能够通过正负说明转动的方向，而转速仅仅说明快慢，不反映转动方向。

角速度的大小可称作角速率，以下求角速率和每分转数的关系。若刚体每分转数为n，每转一周相当于转过 2π弧度，所以每分钟转$2\pi n$弧度，即每秒钟转$\frac{2\pi n}{60}=\frac{\pi n}{30}$弧度，于是得角速率（在不致引起混乱的情况下，仍用$\omega$表示）和每分转数的关系如下

$$\omega=\frac{\pi n}{30}\ [弧度/秒]。\qquad(6.2\text{-}3)$$

例题：铣床主轴转速$n=45$转/分，问主轴角速率的大小如何？

解：根据（6·2-3）式，

$$\omega=\frac{\pi n}{30}=\frac{3.1416\times 45}{30}\doteq 4.7\ 〔弧度/秒〕。$$

车辆起动时，车轮角速度逐渐增大，制动时，角速度逐渐减小，可见瞬时角速度是可以变化的。我们用角加速度的概念来说明角速度随时间变化的快慢。

设于某一瞬时t，刚体角速度为ω，在瞬时$t+\varDelta t$，角速度变为$\omega+\varDelta\omega$，则角速度增量$\varDelta\omega$与发生这一增量所用时间$\varDelta t$之比$\dfrac{\varDelta\omega}{\varDelta t}$叫做刚体在$\varDelta t$时间内的平均角加速度，即

$$\bar{\beta}=\frac{\varDelta\omega}{\varDelta t}。$$

为了进一步说明某一瞬时角速度变化的快慢，则需提出瞬时角加速度的概念，自瞬时t至瞬时$t+\varDelta t$的平均角加速度$\dfrac{\varDelta\omega}{\varDelta t}$当时间$\varDelta t$趋于零时的极限叫做刚体在瞬时$t$的瞬时角加速度，现用$\beta$表示，

$$\beta=\lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\varDelta\omega}{\varDelta t}=\frac{d\omega}{dt}, \qquad (6·2-4)$$

由此可见，瞬时角加速度等于角速度对时间的导数。

角速度有正负，角加速度也有正负。如果角加速度的符号与角速度相同，则刚体作加速转动；若角加速度的符号与角速度相反，则刚体作减速转动。

角加速度的单位由角速度和时间的单位决定，在国际制中为弧度/秒^2。

我们常常把质点运动的速度、加速度称为“线量”，把刚

体绕定轴转动的角速度、角加速度叫做“角量”。线量和角量在描述质点或刚体转动中所起的作用颇为相似，因此常常把它们对应起来看待，线速度与角速度相对应，线加速度与角加速度相对应。

（四）匀速转动与匀变速转动

匀速转动和匀变速转动是刚体绕定轴转动最基本最简单的两种类型。现在根据角速度和角加速度的定义以及这两种运动的特点讨论在这两种运动中角速度和角位移随时间变化的规律。

1. 匀速转动

瞬时角速度不随时间变化的转动就叫做匀速转动。一般机器在其正常运转的大部分时间内都是作匀速转动的。我们现在讨论匀速转动角坐标和时间的关系。

根据瞬时角速度的定义

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

得 $$d\theta = \omega dt \text{ 。}$$

对等式两端取不定积分

$$\int d\theta = \int \omega dt \text{ ，}$$

由于ω为恒量，因此

$$\int d\theta = \omega \int dt \text{ 。}$$

$$\theta = \omega t + c \text{ ，}$$

c 为积分常数；令$t = 0$，则$c = \theta$，所以c的物理意义是刚体在$t = 0$即计时起点的角坐标，若用θ_0表示，则$c = \theta_0$，得

$$\theta = \omega t + \theta_0 \text{ 。} \qquad (6\cdot2\text{-}5)$$

如果在$t = 0$时$\theta_0 = 0$，则上式简化为

$$\theta = \omega t \ , \tag{6·2-6}$$

上面两式反映了匀速转动的角坐标随时间变化的规律，显然，它们和匀速直线运动的运动规律是相对应的。

例题：电动机转子作匀速转动，转速$n=1450$转/分，求它在 1 分钟内转过的角度。

解：根据(6·2-3)式，

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \ ,$$

代入(6·2-6)式，得转过角度

$$\theta = \frac{\pi n t}{30} = \frac{3.1416 \times 1450 \times 60}{30} = 9110 \ \text{〔弧度〕}。$$

2．匀变速转动：

瞬时角加速度不随时间变化的转动叫做匀变速转动。一般机器在起动和制动时的运转，可以近似地看作是匀变速转动。我们首先讨论匀变速转动角速度ω随时间变化的规律。

根据瞬时角加速度的定义

$$\beta = \frac{d\omega}{dt}$$

得

$$d\omega = \beta \, dt \ 。$$

作不定积分得

$$\omega = \beta t + c \ 。$$

设$t=0$时的角速度为ω_0，则

$$\omega = \omega_0 + \beta t \ 。 \tag{6·2-7}$$

这就是匀变速转动角速度随时间变化的规律。它是和质点作匀变速直线运动的速度公式相对应的。

现在进一步求匀变速转动角坐标随时间变化的规律。由

瞬时角速度定义

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

得

$$d\theta = \omega dt \text{。}$$

取不定积分，

$$\int d\theta = \int \omega\, dt \text{。}$$

将(6·2-7)式代入，得

$$\int d\theta = \int (\omega_0 + \beta t) dt,$$

积分后，

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 + c\text{。}$$

设 $t = 0$ 时，角坐标 $\theta = 0$，则

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2, \tag{6·2-8}$$

这就是匀变速转动角坐标随时间变化的规律。它和质点匀变速直线运动的公式 $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ 相对应。

从(6·2-7)式中解出 $t = \frac{\omega - \omega_0}{\beta}$，代入（6·2-8）式中即可消去变量 t，得

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta\theta\text{。} \tag{6·2-9}$$

这是匀变速转动角速度随角坐标变化的规律。显然，它是和质点匀变速直线运动的公式 $v^2 = v_0^2 + 2ax$ 相对应的。

例题： 飞轮由静止开始作匀变速转动。若它在6秒钟后加速到300转/分，

问(1)角加速度 $\beta = ?$（2）在加速过程中，转了多少圈？

解：(1) 求角加速度β

根据(6·2-3)式，机器起动6秒后，飞轮角速度

$$\omega=\frac{\pi n}{30}=\frac{3.1416\times 300}{30}\doteq 31.4\ 〔弧度/秒〕,$$

代入(6·2-7)式，已知$\omega_0=0$得角加速度，

$$\beta=\frac{\omega}{t}=\frac{31.4}{6}\doteq 5.23\ 〔弧度/秒^2〕。$$

(2) 求飞轮加速过程转过的圈数：

已知加速始末的角速度和角加速度，去求转过的角度，不必牵涉时间t，用公式(6·2-9)比较方便。由(6·2-9)式解出θ并考虑到$\omega_0=0$，

$$\theta=\frac{\omega^2}{2\beta}$$

因每圈2π弧度，故飞轮转过的圈数

$$H=\frac{\omega^2}{2\beta\cdot 2\pi}=\frac{\omega^2}{4\pi\beta}\doteq\frac{31.4^2}{4\times 3.1416\times 5.23}$$

$$\doteq 15\ 〔圈〕。$$

(五) 转动刚体上某一点的运动

刚体绕固定轴转动时，上面各点的运动既有共性又有个性。角位移、角速度和角加速度反映了各点运动的共性，但没有反映出各点运动不同的地方，即各点绕共同轴线作圆周运动的特点。然而，研究绕固定轴转动的刚体上各点作圆周运动的规律性也是十分重要的。例如在生产上，对磨削用的砂轮的转速是有限制的，如果转速过高，则砂轮边缘各质点的速度和向心加速度过大，以致边缘砂粒沿圆周运动所需要的向心力超过砂粒间的粘着力，会造成砂轮的断裂。这个问题就涉及转动刚体上一点的运动。

1. 绕固定轴转动的刚体上一点的线速度

绕固定轴转动的刚体上某一点沿圆周运动的瞬时速度叫做该点的线速度。

设刚体上某点沿半径为r的圆周运动，根据圆周运动的知识，此点线速度的方向是沿着切线方向的，需要讨论的是线速度大小即线速率和刚体转动角速率的关系。设刚体角坐标的大小为θ，与此相对应，半径为r的点沿圆周经历的弧长为S，根据弧角关系

$$S=\theta r 。$$

将此式左右对时间求导数

$$\frac{ds}{dt}=r\frac{d\theta}{dt}。$$

由此可得出转动刚体上一点的线速率等于此点所在半径与角速率的乘积，即

$$v=\omega r 。\qquad (6\cdot2\text{-}10)$$

这个公式是很有用的。

例题1：车床加工圆柱体时柱体表面上一点的线速率称为切削速度。

车工车削直径$D_1=50$毫米的构件，采用转速$n_1=1200$转/分，车削$D_2=80$毫米的构件，转速$n_2=950$转/分。试计算两种情况下的切削速度。

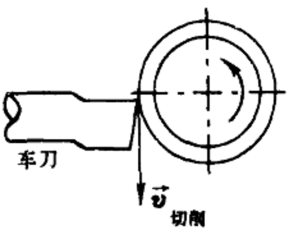


图 6·2-4

解：第一种情况：根据（6·2-3）式及（6·2-10）式，切削速度

$$v_1=\omega_1 r_1=\frac{\pi n_1 D_1}{60}=\frac{3.1416\times1200\times0.05}{60}$$

$\doteq 3.14$〔米/秒〕。

第二种情况:

$$v_2=\frac{\pi n_2 D_2}{60}=\frac{3.1416\times950\times0.08}{60}\doteq 3.96\text{〔米/秒〕。}$$

2．绕固定轴转动的刚体上一点的加速度

刚体绕固定轴转动时，刚体上任意一点作圆周运动，我们可以把这一点的加速度分解成为切向加速度和法向加速度。切向加速度等于线速度的大小对时间的变化率，将(6·2-10)式两端对时间求导数，得

$$\frac{dv}{dt}=\frac{d\omega}{dt}r。$$

由此得转动刚体上一点切向加速度的大小等于角加速度的大小和该点所在半径的乘积，用下式表示

$$a_t=\beta r。\tag{6·2-11}$$

大家知道，质点沿圆周运动的法向加速度的大小等于$a_n=\frac{v^2}{r}$。将$v=\omega r$代入此式即可求出法向加速度的大小与角度的关系

$$a_n=\omega^2 r。\tag{6·2-12}$$

从(6·2-10)、(6·2-11)和(6·2-12)式可知，只需了解刚体绕固定轴转动的角速度和角加速度，就可以求出刚体上任意一点作圆周运动的线速度、切向加速度和法向加速度，即可根据刚体整体的转动状态求出任意一点的运动状态。

例题2: 地球半径为6.37×10^3千米，考虑地球的自转，求地球赤道上一点的向心加速度。

解：向心加速度

$$a_n = \omega_{自}^2 \quad R_{地}。$$

$R_{地}$为地球半径，$\omega_{自}$为地球自转角速度。

地球每24小时自转 2π 弧度，24小时等于8.64×10^4秒，故

$$\omega_{自} = \frac{2\times3.1416}{8.64\times10^4}〔弧度/秒〕。$$

代入前式，得

$$a_n = \left(\frac{3.1416}{4.32\times10^4}\right)^2\times6.37\times10^6 \doteq 0.034〔米/秒^2〕。$$

§ 6-3　角速度矢量

在刚体绕固定轴线转动时转动轴线在空间的方位是不变的，这时，只有两种转动方向，通过角速度的正负就可以说明，就象研究质点沿直线运动时，通过速度的正负来反映质点运动的方向那样。如果转动轴线的方位是可以变化的，仅仅通过正负就不好显示出转动的方向了。

可以证明，角速度也是矢量，即角速度具有大小和方向，且角速度相加服从平行四边形的合成法则。

角速度矢量的方向是沿着转动轴线的，并且和刚体上面各点的旋转运动组成右手螺旋；换句话说，面对角速度矢量的矢端去观察刚体的转动，则刚体是沿逆时针方向转动的，如图6·3-1所示。

图6·3-2 表示按平行四边形法则进行角速度的合成的含义：如果刚体绕OA轴以角速度$\vec{\omega}_1$转动，同时又绕OA'轴以角速度$\vec{\omega}_2$转动，则刚体绕OA''轴以角速度$\vec{\omega}=\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2$转动。图6·3-3的例子则可以帮助我们更好地理解角速度

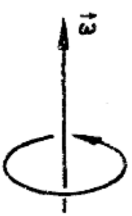


图 6·3-1

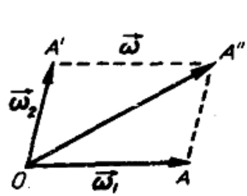
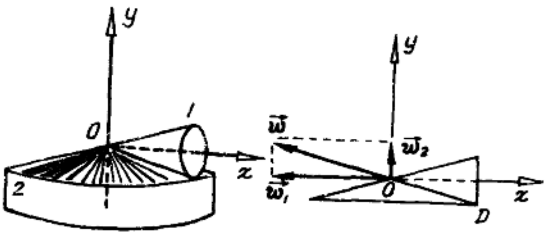


图 6·3-2



（a）　　　　　　　　（b）

图 6·3-3

的 合 成。图中锥体1和锥面2的顶角之和为 180°，锥体1在锥面2上面无滑滚动*并保持顶点O不动。锥体 1 同时参与两种转动，一为绕自身对称轴线Ox的转动，其角速度为$\vec{\omega}_1$，当然，$\vec{\omega}_1$的方向是不断改变的，另一种转动是绕Oy轴的转动。Ox和Oy轴互相垂直，刚体的合成运动应为按角速度$\vec{\omega}=\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2$的转动，而$\vec{\omega}$的方向沿着锥体 1 和锥面 2 的交线；换句话说，刚体的合成运动是绕瞬时轴线OD的纯转动；** 如图6·3-3(b)所示。我们还可以进一步看到，在此例中，为了实现锥体 1 在锥面 2 上的无滑滚动，即以OD为瞬时轴的纯转动，

* 无滑滚动的含义见§6-4

** 纯转动的含义见§6-4