近世代數學

B. L. van der Waerden 著

蕭 君 絳 譯

卷 上

近世代數學

·瓦尔登

B. L. van der Waerden 著

蕭 君 絳 譯

卷 上

1943

本書付印備感艱難幸承樂山樂昌紙廠鄧立文先生樂山文化印書館蕭寅秋先生及陸起周閻幼甫文詔雲王公遐周坦生楊端六葉靜遠諸先生多方協助始底於成謹此誌謝

譯者識

再版原序

茲當本書卷一改版之際，欲令之順應時流俾益臻于全然現代化之境，是所致力.就中首感必要者，厥爲賦値論 (Bewertungstheorie) 之原理，須更明細且更根本加以論列是已.顧此關于賦値體所新增一章之作成，則 Deuring 氏他山之助，至足感級.

次在本書原旨範圍內，務儘可能使此第一卷成功一利便初學之代數學階梯，第行式論斯爲例外.爲此目的計，Euler 氏終結式論與夫一次方程式論，適自卷二挹注於此卷一;而關于部分分數分解，聿新闢一節，微分學暨補間法爰再予擴充，因子分解論，則初等的立其基礎，其他多數細目，總期更易理解以事敍述.至向量空間與多元環兩概念，今於卷一中早予說明，而若干關于次元，範數，跡數等基本定理，亦直于必要一般性下(代替前此之僅對於可換體者)以證之.

三則對於號稱疑難之集合論推證法，在代數學上力予避免是務.代數學，思在鐲祛凡無構成力者之存在證明下，以成一完全「有限」構造，苟無重大犧牲，勢不可能，洵一憾事.蓋果如是，代數學之主要部分，將必加以芟夷，或定理形成，亦將多方制限，以致陳說寡味，令初學者致用末由.雖然，若至少將關于代數學「有限」建立之礎石，於其現已存在範圍內以事蒐集，良稱可能.如在體論中，不佞已付諸實施矣.是卽將體論演算在有限個步驟下以表現之，俾其理論之直觀論據，苟其常爲可能，直得由是以紬繹而出也.又因子分解論，其敍述亦使之初等化，因而亦更爲

「有限的」云.

本此趨向,貫徹追蹤,於是體論之基于選擇公準與完整列定理者之部分,於玆新版,遂付全刪.而賚補償者,同時有一認識用告決定.認識云何?即在一體完滿整列時,斯有一非代數學所固有者之元素外鑠而至.不寧唯是,若就幾及全般應用上言,凡可數體之特例,其中不事完滿整列而僅賦號數以數之者,已綽乎有餘裕.則思之復思之,以是點論,亦覺此元素不相涉也.關于體之代數理論,Steinitz氏典範論文,其綺麗之根本思想,就可數體言,允稱富有權威,極其重要,今且已單本發行,公諸萬衆矣.此完整列思想旣擯置未用,故本書篇幅,雖有如上述擴充,終不過略見增加已也.

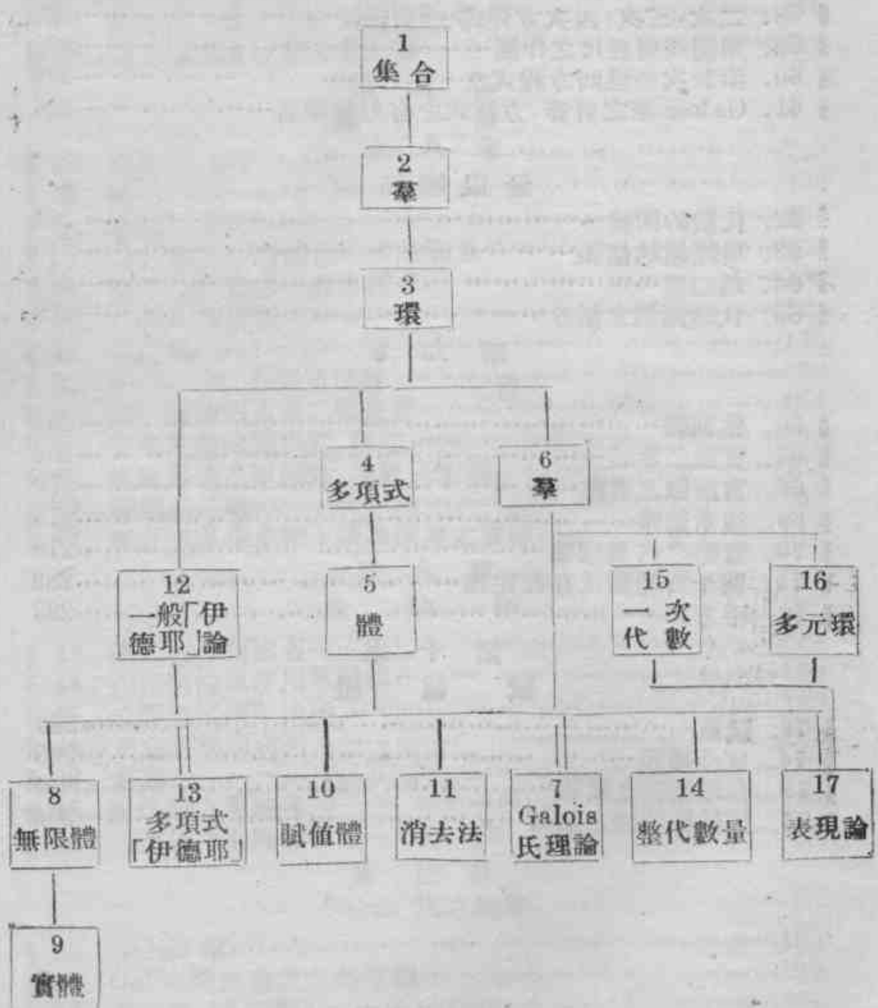
此外尙有稍加改良之點頗多,其性質大率屬於教授法方面者,此所負於友人在編制上之批評者大,謹于此衷心誌謝.所望由此番敍述之更初等化,且有多處亦更明晰化,而尤以利便初學一點,使本書價值因而增高,幸甚幸甚!

於Leipzig,一九三七年,一月.

B. L. van der Waerden

系　統　表

（本表乃兩卷各章及其邏輯的關聯性之鳥瞰）



目錄

導　　言

本書之目的：輓近以還，代數學之所以有嶄新發展者，所負於抽象化，形式化或公理化之動向至鉅；此動向特在體論（Körpertheorie），「伊德耶」論(Idealtheorie)，羣論 (Gruppentheorie) 與夫多元數論（Theorie der hyperkomplexen Zahlen）中，已導之使形成新概念之一系，促進新關係間之理解，並產生廣大之成果．茲欲引讀者以趣于此抽象（概念）世界，是乃本書之主要鵠的．

職是之由，若欲將一般概念與方法發其凡，雖各項結果之須視爲屬於代數學之古典論中者，在此現代組織之範圍中，尚須予以一相關的注意．

本書之編制．並告讀者：對於代數學欲徹底得一「抽象的」理解者，此一般的觀點也，顧爲使此觀點充分明確顯示起見，則羣論以及初等代數學之主要基礎，開端時仍有重新一述之必要．

在最近出版之羣論，古典代數學暨體論之佳著中，已能使吾人得此發凡部分之(完備的）概要；如欲求詳，其可讀之籍亦所在多有．【注：關於羣論，可參閱 Speiser, A.: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 二版. Berlin: Julius Springer 1927. 體論: Hasse, M.: Höhere Algebra I, II. 以及 Aufgabensammlung zur Höheren Algebra. Sammlung Göschen 1926/27. Haupt, O.: Einführung in die Algebra I, II. Leipzig 1929. 古典代數學: Perron, O.: Algebra I, II. 1927. 一次代數學 (lineare Algebra): Bôcher, M.: Introduction to higher Algebra. New York 1908（尚有 H. Beck 之德譯本, Leipzig 1910). Dickson, L. E.: Modern algebraic Theories, Chicago 1926(此書亦有E. Bodewig 之德譯本, Leipzig 1929).】

且本書各部分,務使能單獨理解,此亦編制上之又一綱領.以故欲攻一般「伊德耶」論或多元數論者,可不先讀 Galois 氏理論,反之如欲習後者,亦可不先及前者;如或欲攻消去法(Elimination)或一次代數,又可不為繁冗之「伊德耶」論的概念所懾伏也.

是以自編制上言,首三章所占篇幅極少,其所含僅係對餘凡諸章準備上之必要者,即關於:1.集合(Menge);2.羣,3.環(Ring),「伊德耶」與體之基本概念而已.至卷一其他各章,旨在充可換體論之用,大都根據Steinitz 氏 Crelle雜誌卷 137(1910) 上所發表之基本論文【注:此論文已另有單行本發行. Steinitz, E.: Algebraische Theorie der Körper, mit Erläuterungen und einem Anhang von R.Baer und H. Hasse, Berlin 1930.】者也.卷二所論,在各自獨立之章節中為模(加羣)(Modul)論,環及「伊德耶」論與其在消去法論,單因子(Elementarteiler),多元數及羣之表現(Darstellung)上之應用焉.

此外若代數函數論,若連續羣論,因二者欲據實以論,皆有需乎超越的概念與方法,故當然在所不述,而不變式論,以篇幅關係亦未及之.至行列式乃假定為已知,且書中用之者鮮也.

指歸扼要,端涉目錄,而弁首「系統表」尤宜細參,蓋由是可知每章與前數章之關係其必要為何如也,可收按圖索驥之效.

至理論之次要或艱深者,統書以小字體.

而卷一末三章,在初授時可略之.

若夫散見各章中之問題,其採擇方法,率以使讀者能試驗已否領會本

文爲主旨，且亦有包含例題及補充定理偶作後面之關聯用者．解答方面，大抵無他謬巧，否則略示眉目，而以方括弧域之．

本書之取材：本書係由講義稿分部蒐集而成，其主要者如次：

E. Artin 氏代數學講義（Hamburg, 夏期1926）；

E. Artin, W. Blaschke, O. Schreier 諸氏與著者之「伊德耶」論研究會報（Hamburg, 冬期1926/27）；

E. Noether 氏羣論與多元數論二講義，(Göttingen, 冬期1927/28）【注：最後所舉之 E. Noether 氏一講義稿，已發表于 Math. Zeitschrift Bd. 30(1929)頁641－692中．】

又書中如有新證或新證法者，雖有時未指明來源，然恆可溯諸上述講義及研究會報得之．

第 一 章

數 與 集 合

因某種邏輯的與「一般數學」的概念—尤其集合槪念—雖初攻數學者屢屢有所未嫻，但在本書中有使用時，故特闢一短章論之以開其先．不過關於基本上之困難點【注：關乎此，可參閱 A. Fraenkel, Einführung in die Mengenlehre, 3版，(Berlin 1928).】不事深入，僅全然立于「素樸的立場」，以求避免產生奇論(Paradox)之循環定義而已．且此後其所圖認識者，惟本章中 $\in$，$\subset$，$\supset$，$\cap$，$\vee$ 與 $\{\cdots\}$ 諸記號之意義，其他皆可弗顧也．

§1. 集 合

玆就某種得以想像之對象物如數字，文字或其結合等考之，作諸凡數學的思考之出發點．一性質，其爲此各個對象物所有或所無者，乃定一集合 (Menge) 或一類 (Klasse) 之義；而集合之元素 (Element)（或簡曰元），斯爲凡對象物之具有是性質者．記號

$$a \in \mathfrak{M}$$

卽 a 爲 $\mathfrak{M}$ 之元素之意．幾何學的以言，則謂 a 在 $\mathfrak{M}$ 內．一集合，當其不含元素時，曰空 (leer) 集合．

玆假定數（或文字等）之敍列與集合，其自身又能視爲對象物及集合之元素，係所容許者（後之集合，有時亦呼曰第二階(Stufe)集合）．此種第二階集合，復能爲更高階集合之元素．餘準此．但諸如「凡所有集合之集合」等概念，其構成在所宜儆，無他，以其能致矛盾之起因故

（實已致之矣）；而新集合之形成，寧僅自對象物（新集合尙不屬于其中者）之一已先事制限之種類者而後可.

一集合 $\mathfrak{N}$，其所有元素，同時又爲 $\mathfrak{M}$ 之元素時，曰 $\mathfrak{N}$ 爲 $\mathfrak{M}$ 之部分集合 (Untermenge 或 Teilmenge). 書爲

$$\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{M}.$$

$\mathfrak{M}$ 曰 $\mathfrak{N}$ 之包括集合 (Obermenge 或 umfassende Menge). 記號:

$$\mathfrak{M} \supseteqq \mathfrak{N}.$$

由 $\mathfrak{A} \subseteqq \mathfrak{B}$ 與 $\mathfrak{B} \subseteqq \mathfrak{C}$，卽得 $\mathfrak{A} \subseteqq \mathfrak{C}$.

空集合含於每集合之內.

若 $\mathfrak{M}$ 之全部元含于 $\mathfrak{N}$；而 $\mathfrak{N}$ 之全部元又含于 $\mathfrak{M}$，曰兩集合 $\mathfrak{M}$，$\mathfrak{N}$ 相等 (gleich):

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}.$$

故相等性，卽謂次兩關係同時成立:

$$\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{N}, \qquad \mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{M}.$$

亦卽謂：兩集合，當其含有同一元素時，爲相等也.

若 $\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{M}$ 而不 $= \mathfrak{M}$，曰 $\mathfrak{N}$ 爲 $\mathfrak{M}$ 之純 (echt) 部分集合，$\mathfrak{M}$ 曰 $\mathfrak{N}$ 之純包括集合，而書爲:

$$\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}, \qquad \mathfrak{M} \supset \mathfrak{N}.$$

故 $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ 卽謂 $\mathfrak{N}$ 之全部元咸在 $\mathfrak{M}$ 內，且 $\mathfrak{M}$ 除此外至少另有一元之不屬于 $\mathfrak{N}$ 者在也.

命 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$ 爲任兩集合．於是，一集合 $\mathfrak{D}$，由所有元素之屬于 $\mathfrak{A}$ 且屬于 $\mathfrak{B}$ 者而成時，曰 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$ 之共通集合 (Durchschnitt)，書爲

$$\mathfrak{D}=[\mathfrak{A},\mathfrak{B}]=\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}.$$

$\mathfrak{D}$ 爲 $\mathfrak{A}$ 且爲 $\mathfrak{B}$ 之部分集合，而凡集合之有此性質者皆含于 $\mathfrak{D}$.

集合 $\mathfrak{V}$，由所有元素之屬于集合 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$ 之至少一個而成者，曰 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$ 之合併集合 (Vereinigungsmenge)：

$$\mathfrak{V}=\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B},$$

$\mathfrak{V}$ 包括 $\mathfrak{A}$ 及 $\mathfrak{B}$，而凡集合之包括 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$ 者，亦包括 $\mathfrak{V}$.

同樣，集合 $\mathfrak{A},\mathfrak{B},\cdots$ 之任一集合 Σ 其共通，合併集合之義亦得定之．如對於其共通集合（卽凡元素之在集合 Σ 之所有集合 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$，… 中者之集合），可書之爲

$$\mathfrak{D}(\Sigma)=[\mathfrak{A},\mathfrak{B},\cdots].$$

兩集合，當其共通集合爲空集合時，卽二者無元素公共時曰相互無緣 (zueinander fremd).

當一集合得由枚舉其元素而得時，如集合 $\mathfrak{M}$ 由元素 a, b, c，而成時，書之爲

$$\mathfrak{M}=\{a,b,c\}.$$

據集合之相等性定義，一集合得以列舉其元素而決定，此卽上記法之根據所在也．而定義的性質之著 $\mathfrak{M}$ 之元素之特徵者；對 a 或 b 或 c 應視爲同等．

§2. 映像. 濃度

當由某一規則，對一集合 $\mathfrak{M}$ 之每元素 a，有一單獨新對象物 $\varphi(a)$ 相與對應時，曰此對應爲一函數 (Funktion)，而集合 $\mathfrak{M}$ 曰此函數之定義域 (Definitionsbereich). 所有函數値 $\varphi(a)$ 之集合 $\mathfrak{N}$ 曰函數之值集 (Wertevorrat). 一對應，由之對于 $\mathfrak{M}$ 之每元恰有 $\mathfrak{N}$ 之一元相與對應，而 $\mathfrak{N}$ 之全部元至少一度被使用者，又名曰集合 $\mathfrak{M}$ 對集合 $\mathfrak{N}$ 上之一(一意的)映像 (Abbildung). 元素 $\varphi(a)$ 曰 a 之像 (Bild)，a 曰 $\varphi(a)$ 之原像 (Urbild). 像 $\varphi(a)$ 固由 a 一意以定，但反之 a 由 $\varphi(a)$ 不必爾爾. 映像一語在全書中將統以一意者而使用之.

若 $\mathfrak{N}$ 之每元皆僅一度而爲像元，此映像曰可逆一意的 (umkehrbar eindeutig) 或曰一一意的 (一對一的) (eineindeutig). 於是得有一「逆」(inverse) 映像，對于 $\mathfrak{N}$ 之每元 b，卽有 $\mathfrak{M}$ 之該元其像爲 b 者相與對應也.

兩集合得以相互一意的映像時曰濃度相等 (gleichmächtig). 記號:

$$\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}.$$

濃度相等之集合曰其有「同一的濃度」(Mächtigkeit).

例. 若對每自然數 n，依 n 之爲偶或奇，使 0 或 1 相與對應，則得自然數集合對集合 $\{0, 1\}$ 上之一映像，此映像非一對一的. 若對每數 n 使數 $2n$ 相與對應，斯得所有自然數之集合對于所有偶數之集合上之一個一對一的映像. 故自然數之集合與所有偶數之集合爲濃度相等者.

問題.試證記號～之次三性質:

1. $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{A}$.

2. 若 $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}$,則 $\mathfrak{B}\sim\mathfrak{A}$.

3. 若 $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}$ 而 $\mathfrak{B}\sim\mathfrak{C}$,則 $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{C}$.

一集合竟能與一純包括集合爲濃度相等.上例之第二者已示此矣.而次例亦然:對于自然數 n,使數 $n-1$ 相與對應,則自然數集合,一對一的映像於一集合之除自然數外尚含零者之上也.但在後節中,將見對于「有限」集合,此情形不能有.

§3. 數　列

自然數之集合:　　$1, 2, 3, \cdots\cdots$

與夫此集合之如次的基本性質(Peano 氏公理)假定爲已知者:

I. 1爲一自然數.

II. 在自然數之集合中每數【注:「數」云者,姑即以爲自然數而稱之.】a 皆有一確定的後繼者(Nachfolger) $a^{\dagger}$.

III.　　$a^{\dagger}\neq 1$.　(且恆如此)

即謂數,其後繼者爲1者無有也.

IV.　若 $a^{\dagger}=b^{\dagger}$, 則 $a=b$.

即謂對每一數言,凡以此一數作後繼者之數,或無有或恰有一個也.

V. 「完全歸納法(vollständige Induktion)之原理」:自然數之每集合;若其含數1,且對其所含之每數 a, 又含其後繼者 $a^{\dagger}$, 則含所有自然數.