

初級中學課本

算術

下冊

算術
下冊
PD

目 錄

第三章	分數	1
I	基本概念	1
II	分數的變化	7
III	約分	11
IV	通分	14
V	分數的加法	18
VI	分數的減法	22
VII	求一個數的幾分之幾	28
VIII	分數的乘法	32
IX	已知某數的幾分之幾求這個數	45
X	分數的除法	48
第四章	小數	64
I	小數的基本性質	64
II	小數的運算	69
III	普通分數化小數	80
第五章	複名數	90
I	度量衡	90
II	複名數的通法和命法	98
III	複名數的四則	102
第六章	比和比例	108
I	比	108
II	比例	113

III	量的比例.....	119
IV	比例分配.....	129
第七章	面積和體積.....	137
I	直綫形的面積.....	137
II	圓和扇形的面積.....	147
III	不規則圖形的面積.....	151
IV	體積.....	154

第三章 分數

I 基本概念

106. 單位的劃分 我們用一尺作單位去量布，量到若干次後常常剩下不到一尺的一段。要正確地表出這布的長，就得將剩下的這一段不到一尺長的布量出來。爲了這樣，我們需要把單位一尺分成若干部分。現在我們用的，是將一尺分成十等分，每一份叫做一寸。換句話說，一寸就是一尺的十分之一份，或說十分之一尺。同樣，我們將重量的單位一斤，分成十六等分，每一份叫做一兩，一兩就是一斤的十六分之一份，或說十六分之一斤。同樣，一小時是一日的二十四分之一份或說二十四分之一日，一分鐘是一小時的六十分之一份，或說六十分之一小時。

107. 分數 把一個單位分成若干等分，這樣得出來的一份或若干份叫做分數。

例如將單位 1 分成十等分，一份就是十分之一，兩份就是十分之二，三份就是十分之三，……。

若將單位 1 分成五等分，一份就是五分之一，兩份就是五分之二，三份就是五分之三，……。

又若將單位 1 分成十二等分，一份就是十二分之一，兩份就是十二分之二，……，五份就是十二分之五，……。

一般地說，若把一個單位分成相等的 a 份而取 b 份，就叫做 a 分之 b 。

整數同分數在一起叫做帶分數。例如三又八分之七，就是

整數三還帶着一個分數八分之七，也就是在整數三上加上一個分數八分之七。

爲了和整數有區別，分數和帶分數都叫做分數。

108. 分數的寫法 分數的寫法是這樣：將分數裏所含的份數寫出來，在它的下面畫一段橫綫，在橫綫下面寫出將一個單位所等分成的份數。例如五分之三，就寫成 $\frac{3}{5}$ 。

橫綫上的數叫做分數的分子，橫綫下的數叫做分數的分母。

有時我們也把分子寫在一條斜綫的前面，分母寫在這斜綫的後面，如 $\frac{3}{5}$ 寫成 $3/5$ 。

帶分數是先寫整數，在整數的後面寫分數，如三又七分之二，就寫成 $3\frac{2}{7}$ 。

109. 由測量得到分數 在第106節，我們已經說到過，用一尺作單位去量一段布，常常量到若干次，例如7次還剩下不到一尺的一段。要測量這一段，就用比一尺小的單位，例如 $\frac{1}{10}$ 尺（就是1寸）來量，倘若量到3次正好量完，我們就說原來那段布的長是 $7\frac{3}{10}$ 尺。

同樣，由於測量重量，測量時間，也常常可以得到分數，如 $2\frac{1}{3}$ 斤， $\frac{29}{60}$ 小時。

110. 由等分整數得到分數 若有一斤一包的鹽5斤（就是5包），要平均分給8個人，我們可以先把每一斤（一包）平均分成8等分。這樣一來，一共就分成 $8 \times 5 = 40$ 等分。而每個人得到的是 $40 \div 8 = 5$ 等分。由此可知5斤的 $\frac{1}{8}$ 就等於1斤的 $\frac{5}{8}$ 。一般地說，一個整數 a 的 $\frac{1}{b}$ 就等於1的 $\frac{a}{b}$ 。

又如要把28縮小5倍，就是要求28的 $\frac{1}{5}$ 。因爲 $28 = 25 + 3$ ，

並且 25 的 $\frac{1}{5}$ 是 5, 3 的 $\frac{1}{5}$ 是 $\frac{3}{5}$; 所以 28 的 $\frac{1}{5}$ 就等於 1 的 $5\frac{3}{5}$.

我們也可以這樣設想: 1 的 $\frac{1}{5}$ 是 $\frac{1}{5}$, 我們取一個單位的 $\frac{1}{5}$ 的 28 份, 就得 $\frac{28}{5}$.

歸結起來:

分一個整數為若干等分, 就用這個整數做分數的分子, 而用所要分成的份數做分母.

例如 7 的 $\frac{1}{12}$ 是 $\frac{7}{12}$, 15 的 $\frac{1}{4}$ 是 $\frac{15}{4}$. 反過來, 分數 $\frac{8}{13}$ 是 8 的 $\frac{1}{13}$, 分數 $\frac{29}{6}$ 是 29 的 $\frac{1}{6}$.

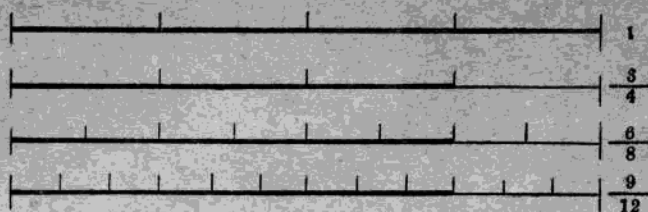
推論: 分數可以看成是一個單位的若干等分的和, 也可以看成是某一個數的若干分之一.

例如 $\frac{5}{8}$ 是 5 個 $\frac{1}{8}$ 的和, 也是 5 的 $\frac{1}{8}$.

習題三四(口答)

1. 把一張紙對摺再對摺, 又再對摺, 照這樣裁開得到的每一小張是原來的幾分之幾?
2. 二分之一小時是多少分鐘? 三分之一呢? 十二分之一呢? 二十分之一呢?
3. 一令紙是 500 張, 二分之一令是多少張? 四分之一令是多少張? 五分之一令呢?
4. 31 天用 4 斤糖, 平均每天用多少斤?
5. 2 裏有幾個 $\frac{1}{7}$, 4 裏呢? 5 裏呢?
6. 2 的五分之一是 1 的幾分之幾?
8 的四分之一是 1 的幾分之幾?
7 的十分之一是 1 的幾分之幾?
7. 把 3 斤梨平均分給 3 個人: 每人分得 3 斤的幾分之幾? 1 斤的幾分之幾? 得的是多少斤?

111. 分數的相等和不相等 假若對於同一個單位, 兩個分數所表示的量是相等的, 我們就說, 這兩個分數是相等的.



如上圖，我們把第一條粗的綫段表示單位 1。將這條綫段分成 4 等分，每份就表示 $\frac{1}{4}$ 單位。第二條綫段上粗的部分，有三個 $\frac{1}{4}$ 長，就表示 $\frac{3}{4}$ 單位。第三條綫段上粗的部分和第二條的一樣長，也表示 $\frac{3}{4}$ 單位。若把每一個表 $\frac{1}{4}$ 長的部分各分成兩等分，則在每一個 $\frac{1}{4}$ 長裏，這樣小的等分都有兩個，而單位 1 裏，這樣小的等分就有 $2 \times 4 = 8$ 個，因此每一等分是單位 1 的八分之一，而在單位 1 的 $\frac{3}{4}$ 裏，這樣小的等分一共有 $2 \times 3 = 6$ 個。這就是說，兩個分數 $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{6}{8}$ 是相等的。同理 $\frac{3}{4}$ 尺和 $\frac{6}{8}$ 尺， $\frac{3}{4}$ 斤和 $\frac{6}{8}$ 斤以及 $\frac{3}{4}$ 小時和 $\frac{6}{8}$ 小時也分別是相等的。再和第四條綫段一起看，可以知道 $\frac{3}{4}$ ， $\frac{6}{8}$ ， $\frac{9}{12}$ 是相等的。

若對於同一個單位，兩個分數所表示的量不相等，我們就說這兩個分數不相等。所表示的量的分數大，所表示的量的分數小。例如 $\frac{1}{5}$ 大於 $\frac{1}{8}$ ， $\frac{1}{5}$ 寸大於 $\frac{1}{8}$ 寸， $\frac{1}{5}$ 斤大於 $\frac{1}{8}$ 斤， $\frac{1}{5}$ 小時大於 $\frac{1}{8}$ 小時。

這是很容易明白的：

分子相同的兩個分數，分母小的一個大，分母大的一個小。

例如 $\frac{2}{3}$ 大於 $\frac{2}{5}$ 。

分母相同的兩個分數，分子大的一個大，分子小的一個小。

例如 $\frac{5}{8}$ 大於 $\frac{3}{8}$ 。

112. 真分數和假分數 分子小於分母的分數叫做真分數；反過來，分子大於或等於分母的分數叫做假分數。很明顯的，真分數總小於 1，而假分數則大於或等於 1。例如：

真分數， $\frac{7}{8} < 1$ ， 假分數， $\frac{9}{8} > 1$ ， $\frac{8}{8} = 1$ 。

113. 化整數為假分數 一切整數都可化成以任何數做分母的假分數，例如要把 8 化成以 20 作分母的假分數，我們知道 1 含有 20 個 $\frac{1}{20}$ ，所以 8 就含有 $20 \times 8 = 160$ 個 $\frac{1}{20}$ 。這就是說，

$$8 = \frac{20 \times 8}{20} = \frac{160}{20}.$$

同樣， $25 = \frac{4 \times 25}{4} = \frac{100}{4},$

$$100 = \frac{17 \times 100}{17} = \frac{1,700}{17}.$$

法則：化整數為已知分母的分數，是用這個整數乘已知分母所得的積作分子，已知分母作分母。

〔注意〕 有時需要將一個整數化成以 1 作分母的假分數，這個分數的分子就是這個整數而分母是 1。例如我們可以用 $\frac{5}{1}$ 代替 5。某數的一分之幾，就是這個數的幾倍。如 3 的 $\frac{7}{1}$ 就是 3 的 7 倍。

114. 化帶分數為假分數 例如要將 $8\frac{3}{5}$ 化成假分數，就是要求出 8 個單位和一個單位的 $\frac{3}{5}$ 中一共含有多少個 $\frac{1}{5}$ 。因為一個單位含 5 個 $\frac{1}{5}$ ，所以 8 個單位就含有 $5 \times 8 = 40$ 個 $\frac{1}{5}$ ，而 $\frac{3}{5}$ 含有 3 個 $\frac{1}{5}$ 。所以， $8\frac{3}{5}$ 中，一共就含有 $40 + 3 = 43$ 個 $\frac{1}{5}$ 。即

$$8\frac{3}{5} = \frac{43}{5}.$$

同樣，

$$3\frac{7}{8} = \frac{8 \times 3 + 7}{8} = \frac{31}{8},$$

$$10\frac{1}{4} = \frac{4 \times 10 + 1}{4} = \frac{41}{4}.$$

法則：化帶分數爲假分數，將整數乘分母所得的積與分子的和作分子，而用原來的分母作分母。

115. 化假分數爲帶分數 例如要化 $\frac{101}{8}$ 爲帶分數，就是要求出它所含的整數和真分數。因爲 $\frac{8}{8}$ 就是8個 $\frac{1}{8}$ 而等於1，所以 $\frac{101}{8}$ 裏含有多少個 $\frac{8}{8}$ 就含有多少個1。但 $101 \div 8 = 12$ 餘5。由此可知 $\frac{101}{8}$ 裏含有12個 $\frac{8}{8}$ ，還剩 $\frac{5}{8}$ 。這就是說， $\frac{101}{8}$ 裏有12個單位1和5個 $\frac{1}{8}$ 即

$$\frac{101}{8} = 12\frac{5}{8}.$$

同樣， $\frac{59}{8} = 7\frac{3}{8}, \frac{314}{25} = 12\frac{14}{25}, \frac{85}{17} = 5, \frac{25}{25} = 1.$

法則：化假分數爲帶分數，是用分母除分子所得的商作整數部分，餘數作分數部分的分子，原來的分母作分數部分的分母。若分母正好除盡分子，則化得的只是整數。

化假分數爲帶分數，有時又叫做從分數中把整數分出來。

習題三五 (1—4口答)

1. 2裏有幾個 $\frac{1}{8}$? 4裏呢? 5裏呢? 6裏呢?

2. $3\frac{1}{5}, 5\frac{2}{5}, 10\frac{3}{5}$ 各有幾個 $\frac{1}{5}$?

3. 1天, 3天, 6天各是一星期的幾分之幾?

4. 說出三個小於1的分數, 三個等於1的分數, 三個大於1的分數。

5. 指出下列各分數中的真分數, 假分數:

$$\frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{10}{7}, \frac{8}{11}, \frac{12}{5}, \frac{16}{5}, \frac{79}{15}, \frac{107}{15}, \frac{1,000}{9}, \frac{1,375}{16}.$$

6. 亞洲佔全陸地的 $\frac{1}{3}$, 歐洲佔 $\frac{1}{16}$, 非洲佔 $\frac{1}{6}$, 美洲佔 $\frac{1}{4}$, 澳洲佔 $\frac{1}{19}$, 南極洲佔 $\frac{1}{10}$, 依照各洲所佔陸地的大小, 把它們順次序排出來。

7. 將下列各分數由小到大地排好:

$$\frac{1}{19}, \frac{13}{19}, \frac{7}{19}, \frac{4}{19}, \frac{9}{19}, \frac{6}{19}.$$

8. 將下列各分數由大到小地排好:

$$\frac{7}{9}, \frac{7}{11}, \frac{7}{8}, \frac{7}{12}, \frac{7}{10}, \frac{7}{15}, \frac{7}{13}.$$

9. 化下列各分數成假分數。

$$1\frac{1}{2}, 8\frac{5}{13}, 3\frac{4}{7}, 9\frac{4}{15}, 18\frac{5}{16}, 116\frac{2}{3}, 2\frac{101}{107}.$$

10. 將下列各分數化成帶分數:

$$\frac{5}{2}, \frac{17}{4}, \frac{12}{5}, \frac{13}{6}, \frac{19}{11}, \frac{79}{15}, \frac{1,375}{16}, \frac{8,743}{78}.$$

II 分數的變化

116. 分子和分母擴大或縮小相同的倍數 由第111節的圖和說明, 我們已經知道:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}.$$

若我們將圖中表示 $\frac{1}{4}$ 單位的各部分, 再依次分成 4, 5, ……等分, 則得出一串相等的分數:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \dots\dots$$

這一串分數, 由第二個起, 每一個分數依次是由於用 2, 3, 4, 5, …… 同時分別去乘第一個分數的分子和分母得出來的。即

一個分數的分子和分母同時乘以相同的數（或說擴大相同的倍數），原分數的值不變。

這個性質可以寫成公式，

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}.$$

由此可以得出：

一個分數的分子和分母同時除以相同的數（或說縮小相同的倍數），原分數的值不變。

例如：

$$\frac{20}{60} = \frac{10}{30} = \frac{5}{15} = \frac{4}{12} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

從第二個分數起，是同時分別用 2, 4, 5, 10, 20 去除第一個分數的分子和分母得出來的。

117. 分子或分母的擴大或縮小所引起分數值的變化：

(1) 分子擴大（或縮小）若干倍，分母不變，分數的值也擴大（或縮小）同樣的倍數。

例如將 $\frac{3}{10}$ 的分子擴大 4 倍，則得 $\frac{12}{10}$ 。 $\frac{3}{10}$ 含有 3 個 $\frac{1}{10}$ ，而 $\frac{12}{10}$ 含有 12 個 $\frac{1}{10}$ ，就是這個分數所含 $\frac{1}{10}$ 的個數，比原來的分數所含 $\frac{1}{10}$ 的個數擴大了 4 倍。因而分數的值也就擴大了 4 倍。

(2) 分母擴大（或縮小）若干倍，分子不變，分數的值反縮小（或擴大）同樣的倍數。

例如將 $\frac{3}{10}$ 的分母擴大 5 倍，則得 $\frac{3}{50}$ 。由前節

$$\frac{3}{10} = \frac{3 \times 5}{10 \times 5} = \frac{15}{50}.$$

但 $\frac{15}{50}$ 和 $\frac{3}{50}$ 分母相同，只是分子 15 縮小 5 倍成爲 3。因而分數 $\frac{3}{10}$

的值也就縮小了 5 倍。

118. 分數值的擴大或縮小 根據前節所說的，我們得出使一個分數擴大或縮小若干倍的法則：

(1) 要使一個分數的值擴大若干倍，須將分子擴大同樣的倍數或分母縮小同樣的倍數。

(2) 要使一個分數的值縮小若干倍，須將分子縮小同樣的倍數或分母擴大同樣的倍數。

例如： $\frac{7}{12}$ 擴大 5 倍是 $\frac{35}{12}$ ；

$\frac{7}{12}$ 擴大 6 倍是 $\frac{42}{12}$ 或 $\frac{7}{2}$ ；

$\frac{8}{9}$ 縮小 7 倍是 $\frac{8}{63}$ ；

$\frac{8}{9}$ 縮小 4 倍是 $\frac{8}{36}$ 或 $\frac{2}{9}$ 。

當然上面所說的，將分子縮小使分數的值縮小，或將分母縮小使分數的值擴大，都只有在分子或分母可以被所縮小的倍數整除的時候，才能作到。

119. 分子和分母同時加上或減去某數 我們先來看下面的例：

(1) $\frac{1}{2}$ 的分子和分母都加上 1，得 $\frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3}$ ，它比 $\frac{1}{2}$ 大。

(2) $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ 的分子和分母都加上 1，得 $\frac{3+1}{2+1} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ ，它比 $1\frac{1}{2}$ 即 $\frac{3}{2}$ 小。

(3) $\frac{3}{5}$ 的分子和分母都減去 2，得 $\frac{3-2}{5-2} = \frac{1}{3}$ ，它比 $\frac{3}{5}$ 小。

(4) $\frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$ 的分子和分母都減去 2，得 $\frac{7-2}{5-2} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$ ，它

比 $1\frac{2}{5}$ 即 $\frac{7}{5}$ 大。

*一般的，分數 $\frac{a}{b}$ 的分子和分母都加上一個數 m ，得 $\frac{a+m}{b+m}$ 。

現在我們來比較 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{a+m}{b+m}$ 的大小。要比較它們的大小，必須使它們的分母相同。我們將 $b+m$ 去乘原分數的分子和分母，而將 b 去乘新分數的分子和分母，即得

$$\frac{a}{b} = \frac{a(b+m)}{b(b+m)}, \quad \frac{a+m}{b+m} = \frac{(a+m)b}{(b+m)b}.$$

現在這兩個分數的分母已經相同了，所以只須比較它們的分子。

$$a(b+m) = ab + am, \quad (a+m)b = ab + bm,$$

從所得的兩個和裏各減去 ab ，分別得 am 和 bm 。因此：

若 $a < b$ 則 $am < bm$ 而 $a(b+m) < (a+m)b$, $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$ ；就是分數的值增大了。

若 $a > b$ 則 $am > bm$ 而 $a(b+m) > (a+m)b$, $\frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}$ ；就是分數的值減小了。

所以：一個分數的分子和分母都加上同一個數，若原分數的值小於1，則分數的值增大；若原分數的值大於1，則分數的值減小。

又由例(3)(4)可以看出：

一個分數的分子和分母都減去同一個數，若原分數的值小於1，則分數的值減小；若原分數的值大於1，則分數的值增大。

習題三六 (1—6 口答)

1. $\frac{1}{2}$ 是 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{8}$ 、 $\frac{1}{16}$ 各數的幾倍？ $\frac{1}{3}$ 是 $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{1}{9}$ 、 $\frac{1}{12}$ 各數的幾倍？
2. $\frac{1}{100}$ 是 $\frac{1}{50}$ 、 $\frac{1}{25}$ 、 $\frac{1}{5}$ 各數的幾分之幾？
3. 用 7、9、5 分別乘一個分數的分子，分數的值怎樣？

4. 用 5、3、11 分別除一個分數的分子，分數的值怎樣？
5. 用 10、5、7 分別乘一個分數的分母，分數的值怎樣？
6. 用 8、9、13 分別除一個分數的分母，分數的值怎樣？
7. 將下列各分數的分母取消，所得各數的值比原來分數的值怎樣？

$$\frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{4}{11}, \frac{1}{7}, \frac{8}{25}.$$

8. 將下列各分數分別擴大 2 倍，3 倍，5 倍：

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{11}{18}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{30}.$$

9. 將下列各分數分別縮小 2 倍，3 倍。

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{8}{9}, \frac{12}{13}.$$

III 約分

120. 既約分數 我們已經知道，用同一個數去除一個分數的分子和分母，分數的值不變。若將一個分數的分子和分母的公約數去除這個分數的分子和分母，就可以得出一個和原分數等值的分數；這種演算叫做約分。

自然，只有分數的分子和分母含有 1 以外的公約數的時候，才能夠約分。例如 $\frac{8}{12}$ 的分子和分母有 1 以外的公約數 2 和 4，所以可以約成 $\frac{4}{6}$ 和 $\frac{2}{3}$ ；而 $\frac{9}{20}$ 的分子和分母沒有 1 以外的公約數，就不能夠約了。

不能約分的分數叫做既約分數。

既約分數的分子和分母沒有 1 以外的公約數，即它們是互質數。反過來，分子和分母是互質數的分數，也就是既約分數。

121. 約分法 約分的方法可以分成兩種：

(1) 逐步約分法 首先確定分數的分子和分母有沒有 1 以

外的公約數。若有這樣的公約數，就用它去除分數的分子和分母。若得出來的分數的分子和分母還有1以外的公約數，又用這個公約數去約它。這樣繼續約下去，到所得出來的分數分子和分母沒有1以外的公約數為止。

【例題 1】 約簡 $\frac{24}{42}$ 。

$$\text{解 } \frac{\overset{2}{\cancel{24}}}{\underset{6}{\cancel{42}}} = \frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{\underset{7}{\cancel{21}}} = \frac{4}{7}.$$

【例題 2】 約簡 $\frac{840}{3,600}$ 。

$$\text{解 } \frac{\overset{10}{\cancel{840}}}{\underset{40}{\cancel{3,600}}} = \frac{\overset{4}{\cancel{84}}}{\underset{90}{\cancel{360}}} = \frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{30}{\cancel{90}}} = \frac{7}{30}.$$

【注意 1】 上面各分數頂上的數是用來約分的分子和分母的公約數。計算熟練後可以不寫出來。

【注意 2】 上面的演算也可以用下面的寫法：

$$1. \quad \begin{array}{r} 4 \\ 12 \\ 24 \\ \hline 42 \\ 21 \\ 7 \end{array} = \frac{4}{7}.$$

$$2. \quad \begin{array}{r} 7 \\ 21 \\ 84 \\ \hline 840 \\ 3600 \\ 280 \\ 90 \\ 30 \end{array} = \frac{7}{30}.$$

(2) 一次約分法 先求出分子和分母的最大公約數，若所得的最大公約數不是1，就用它去除分子和分母。因為兩個數的最大公約數包含了它們的一切公約數，所以這樣約得的分數就是一個既約分數。

【例題 1】 約簡 $\frac{144}{396}$ 。

解 先求分子和分母的 G. C. M.

$$\begin{array}{r|rr} 4 & 1 & 4 & 4 & 3 & 9 & 6 \\ & 9 & 3 & 6 & 9 & 9 & \\ \hline & 4 & & & 1 & 1 & \end{array} \quad G.C.M. = 4 \times 9 = 36,$$

$$\frac{144}{396} = \frac{144 \div 36}{396 \div 36} = \frac{4}{11}.$$

【例題 2】約簡 $\frac{391}{527}$.

解 先求分子和分母的 $G.C.M.$

$$\begin{array}{r|rr} 1 & 3 & 9 & 1 & 5 & 2 & 7 \\ & 2 & 7 & 2 & 3 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 9 & 1 & 3 & 6 & 2 \\ & 1 & 1 & 9 & 1 & 1 & 9 & \\ \hline & 0 & & & 1 & 7 & & 7 \end{array} \quad G.C.M. = 17,$$

$$\therefore \frac{391}{527} = \frac{391 \div 17}{527 \div 17} = \frac{23}{31}.$$

***122. 定理** 若一個分數等於某一個既約分數，則這個分數的分子和分母分別等於這個既約分數的分子和分母乘以同一個數。

設 $\frac{a}{b}$ 是一個既約分數，並且

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}.$$

用 b 乘第一個分數的分子和分母，用 b_1 乘第二個分數的分子和分母，

$$\frac{a_1 b}{b b_1} = \frac{a b_1}{b b_1}.$$

因為兩個分數以及它們的分母分別相等，所以它們的分子也相等，

$$a_1 b = a b_1.$$

由此可知 a 能夠整除 $a_1 b$ ，但 a 和 b 沒有 1 以外的公約數，所以 a 必能整除 a_1 (參看上冊第 92 節)，用 m 表示 a 除 a_1 所得的商，則 $a_1 = am$.

$$\therefore a m b = a b_1.$$

用 a 除上式的兩邊，

$$m b = b_1.$$

這就証明了, a_1 和 b_1 分別是 a 和 b 的 m 倍.

推論 1: 若兩個既約分數相等, 則這兩個分數的分子和分母分別相等.

推論 2: 任意一個分數必等於一個也只等於一個既約分數.

由約分的第二種方法可知任意一個分數必等於一個既約分數. 由推論 1 可知這樣的既約分數只有一個.

習題三七

1. 用逐步約分法約簡下列各分數

$$\frac{18}{24}, \frac{17}{170}, \frac{35}{84}, \frac{120}{150}, \frac{45}{75}, \frac{51}{85}, \frac{840}{960}, \frac{875}{975}.$$

2. 用一次約分法約簡下列各分數:

$$\frac{52}{65}, \frac{95}{133}, \frac{308}{385}, \frac{217}{341}, \frac{217}{651}.$$

IV 通分

123. 通分 $\frac{5}{12}$ 含有 5 個 $\frac{1}{12}$, $\frac{7}{15}$ 含有 7 個 $\frac{1}{15}$, 這兩個分數是用兩個不同的分數單位 $\frac{1}{12}$ 和 $\frac{1}{15}$ 分別表示的. 我們能不能用一個相同的分數單位(分母相同分子是 1 的分數)分別表示它們呢? 這裏我們就來講這個問題.

$\frac{5}{12}$ 是一個既約分數, 因此和它相等的一切分數的分母都應當是 12 的倍數, 如 24, 36, 48, 60……. 同樣的, $\frac{7}{15}$ 也是一個既約分數, 因此和它相等的一切分數的分母都應當是 15 的倍數, 如 30, 45, 60, …… . 由此, 我們可以知道, 和 $\frac{5}{12}$ 相等的各分數以及和 $\frac{7}{15}$ 相等的各分數中, 有些分母是相同的, 如 60, 120, ……; 它們都是原來兩個分母的公倍數, 而 60 是最小的一個.

現在我們來求用 60 作分母而分別等於 $\frac{5}{12}$ 和 $\frac{7}{15}$ 的兩個分數.