

高等学校通用教材

解析几何

(二 稿)

方德植 编

厦门数学会 印

一九八一年七月

说 明

这本教材基本上是按照教育部于1989年制订的综合大学数学系数学专业教学计划中，对解析几何这门课程的教学大纲而写成的。但在编写过程中，考虑到目前中学平面解析几何的情况和高等学校招生的质量，在内容的广度方面作了适当的调整，以便各校根据具体情况灵活掌握。

解析几何利用坐标方法，密切地联系数学的基本对象（空间形式与数量关系）之间的关系，对整个数学的发展起了巨大的作用。

在高等学校的数学专业教学计划中，解析几何是第一个几何课程。在本教材里，除了初等平面解析几何（在中学已学过）外，重点是运用代数方法作为工具论述空间解析几何，即空间中的直线、平面和二次曲面等。为了扩大数学专业学生的视野与培养现代数学工作者的需要，还简略地论述射影解析几何（包括仿射几何）。此外，通过最近几年来的教学实践，鉴于学生在中学里所学到的平面解析几何知识，不但不顽固，而且还远远不能满足本专业学生应该掌握的必要内容，所以在本教材里还列入《平面解析几何复习和补充》。这样，把内容分为三部分：第一部分（第一章到第三章），平面解析几何复习和补充；第二部分（第四章到第七章），空间解析几何；第三部分（即第八章）射影解析几何概要（各校根据具体情况，本章内容可作为机动教材）。

解析几何在工程技术、物理、化学、生物、经济，等等

其他领域内都具有广泛的应用。

本课程的目的，在于培养学生运用解析方法解决几何问题及其在实际中应用的能力，并为以后学习其他数学课程作准备。解析几何与分析 and 代数有密切的关系，分析中经常用到解析几何的方法与图形的许多性质，解析几何为代数中不少对象提供了具体的解释，给代数以直观的几何形象，加强数量关系的直观鲜明性，使几何，分析与代数构成了一个不可分割的有机整体。

本教材总的特点是：由浅入深，由易到难，循序渐进，以不多的篇幅叙述了解析几何的基本内容；而且特别注意理论基础的系统性与严密性；还注意到与实际的联系。此外，在编写过程中，为了符合学生的接受能力，力求做到：概念、公式和方法的引入尽可能的通俗易懂。在引言中从几何发展简史的阐述，贯彻辩证唯物主义和历史唯物主义的思想。为了使學生把所学到的理论与方法加以巩固和应用，在每节之末一般配有一定数量的习题，其中个别习题还补充了正文的内容。在每章之末附有全章复习提纲与总习题，使读者学完一个阶段后作一次有系统的复习，以达到对整个阶段的内容有较全面的理解；通过总习题使读者能把每章的主要理论和方法灵活地运用到解决比较综合性的问题。

教材中不带星号的内容都是必要的，但是带星号的内容也是重要的，可以根据讲课时数与学生水平作适当的取舍。

本课程的周时数为4学时，总时数为68学时，讲授学时与习题课的分配，各校可根据具体情况作适当的安排。

由于本教材是作为全国高等学校的“通用教材”，“初稿”，在上学期作过我校试用教材，根据试用情况，最近进

行了修改编成这本“二稿”。由于时间仓促，水平有限，一定有很多不妥和错误之处，恳切地希望读者多多提出宝贵意见，以供编写三稿时再作修改的主要依据。

本教材也可作为数学系其他专业，大专院校数学系各专业以及高等工业学校相近专业的教材或教学参考教材。

方 德 植

一九八一年三月于厦门大学

目 录

说明.....	(VI)
引言.....	(1)

第一章 向量和平面坐标系

§ 1 向量.....	(7)
1、向量的概念 2、向量的加法和减法 3、数乘向量 4、两个向量的数量积	
§ 2 向量及其运算的坐标表示.....	(17)
1、直线上的向量和坐标法 2、平面上的向量和坐标法 3、向量运算的坐标表示：1)向量的模与方向 2)两点间的距离 3)分线段为定比 4)数量积的坐标表示	
§ 3 曲线的表示.....	(27)
1、曲线与方程 2、圆的方程 3、曲线的参数方程 4、两曲线的交点	
§ 4 第一章复习提纲与总习题.....	(34)

第二章 直 线

§ 5 直线的方程.....	(37)
1、点向式的直线方程 2、两点式的直线方程、参数式方程与截距式方程 3、一般形式的直线方程	
§ 6 两条直线的夹角及其平行和垂直的条件.....	(43)
1、两条直线的夹角 2、两条直线的平行和垂直	

的条件

- §7 直线和点的相互位置、直线的法线式方程…… (47)
1、直线和点的相互位置 2、直线的法线式方程
- §8 直线束…………… (50)
- §9 平面上的坐标变换…………… (53)
1、原点的变换 2、坐标向量的变换 2、一般的坐标变换
- §10 第二章复习提纲与总习题…………… (59)

第三章 二次曲线

- §11 三种常见的二次曲线…………… (63)
1、椭圆 2、双曲线 3、抛物线
- §12 椭圆、双曲线、抛物线的共同性质…………… (80)
1、焦点和准线的性质 2、光学性质 3、圆锥截线 4、二次曲线的直径
- §13 二次曲线的切线和法线…………… (88)
- §14 二次曲线的分类…………… (92)
- §15 极坐标和曲线的极坐标方程…………… (97)
1、极坐标系 2、极坐标和直角坐标的关系
3、曲线的极坐标方程 4、二次曲线的极坐标方程
- §16 第三章复习提纲与总习题…………… (101)

第四章 向量和空间坐标系

- §17 空间向量及其运算的坐标表示…………… (104)
1、向量的向量积 2、向量的混合积 3、向量的

坐标 4、空间坐标系

§18 空间解析几何中几个最简单的问题……………(116)

1、分线段为定比 2 两平面的距离 3、三角形的面积 4、四面体的体积

§19 曲面和空间曲线的表示……………(118)

1、曲面与方程 2、空间曲线的方程

§20 球面坐标与柱面坐标……………(124)

1、球面坐标 2、柱面坐标

§21 空间中的坐标变换公式……………(126)

1、空间仿射坐标系的变换公式 2、空间直角坐标系的变换公式 *3、欧拉角(*表示可讲可不讲)

§22 第四章复习提纲与总习题……………(131)

第五章 空间的平面与直线

§23 平面的方程……………(134)

1、平面的一般方程 2、平面的截距式方程
3、平面关于坐标系的位置 4、平面的法线方程
5、平面的参数方程

§24 二平面间的相互位置……………(142)

§25 空间直线的方程……………(143)

1、直线的一般方程 2、直线的标准方程 3、直线的参数方程

§26 直线与平面、二直线间的相互位置……………(146)

1、直线与平面的交角、平行和垂直的条件
2、二直线间的相互位置 3、一点到一直线的距离 4、两交叉直线间的最短距离

§27	平面的线性组·····	(153)
§28	第五章复习提纲与总习题·····	(163)

第六章 二次曲面

§29	椭球面·····	(167)
§30	双曲面·····	(169)
§31	抛物面·····	(172)
§32	锥面与柱面·····	(176)
§33	二次曲面的分类·····	(179)
§34	二次曲面上的母线·····	(187)
§35	二次曲面的直径与直径平面·····	(191)
§36	第六章复习提纲与总习题·····	(194)

第七章 二次曲线与二次曲面的一般性质

§37	二次型(形式)的变换·····	(197)
§38	二次曲线和二次曲面的不变量·····	(200)
§39	二次曲线的化简和分类·····	(205)
§40	二次曲面的化简和分类·····	(211)
§41	曲线的直径、曲面的直径平面、 曲线和曲面的中心·····	(216)
§42	曲线的对称轴、曲面的对称平面·····	(218)
§43	双曲线的渐近线、双曲面的渐近锥面·····	(221)
* §44	二次曲线的切线和法线、二次曲面 的切面和法线·····	(222)
§45	第七章复习提纲与总习题·····	(225)

*第八章 射影解标几何概要(包括仿射几何)

§46	正交变换.....	(229)
	1、平面上的正交变换 2、空间中的正交变换	
§47	仿射变换.....	(236)
	1、平面上的仿射变换 2、空间中的仿射变换	
§48	二次曲线和二次曲面的仿射几何.....	(246)
§49	射影变换.....	(249)
	1、平面上的射影变换 2、交叉比 3、空间中的射影变换	
§50	齐次坐标、平面上和空间中无穷远元素的补充.....	(254)
	1、推广平面 2、推广空间	
§51	二次曲线和二次曲面的射影几何.....	(257)
§52	配极论.....	(260)
§53	切坐标.....	(264)
	1、直线和平面的齐次坐标、曲线和曲面的切方程 2、对射变换	
§54	对偶原则.....	(268)
	1、平面上的对偶原则 2、平面上的射影坐标系 3、德沙格定理与巴普斯定理 4、巴斯卡定理与布里安松定理 5、空间中的对偶原则	
§55	变换群和几何分类.....	(280)
	1、变换及其性质 2、变换群 3、几何分类(克来因纲领)	
§56	第八章复习提纲总习题.....	(284)

引 言

从自然界中，经常接触到具有一定形状的物体，例如：光线或整齐的树木是直的，太阳是圆的，江河的面是平的，等等。这些形象早在人类以前就已经存在于现实世界中，以后也经常出现在人们的眼目中，不过人们在自然界中很少看到很直的线，尤其是三角形、圆形等图形。由于自然界中这些图形的观念时时刻刻反映到人们的头脑中来，人们按照自己的实践的要求逐步地制造出越来越规则的形状的物体。例如建筑自己的住所，划出一块土地；拉紧一条绳索；制造器皿和家具，等等，从而相应地建立起各种各样图形的概念。比如人们制造出来的桌子是长方形的；碗是圆形的；拉紧的弦是直的；某些构件是三角形的；等等。概括这些物体在形状下的共同性，就得到了长方形、圆、三角形、立方体、球体等概念。这样，现实世界中的物体以及人类的实践活动成了建立几何抽象概念的基础。正如恩格斯所指出的：“和数的概念一样，形的概念也完全是从外部世界得来的，而不是在头脑中由纯粹的思维产生出来的，必须先存在具有一定形状的物体，把这些形状加以比较，然后才构成形的概念。”

“几何”最初所考察的主要对象就是“物体”的空间关系和形状；后来，逐步地发展与推广，以至在结构上与空间关系和形状相类似的关系与形状。我们要认清几何所研究的“物体”是抽掉物体的物质内容的，就是说仅仅从它的空间形式的观点来考察现实的物体，因此几何对象的概念和结论是以抽象的形式反映现实。事实上，几何的抽象都是客观世界规

律的反映，正因为如此，几何及其最抽象的推广，在其他科学与生产实践中，都有着广泛的应用。可是几何的这个特点经常被唯心论者所曲解：他们强调几何的所谓先验性，并认为几何的概念是独立的存在，认为这些概念乃是人类智力活动的结果，而跟实在事物的世界无关。这种论调是极端荒谬的，这是由于他们不懂得在认识事物的过程中，抽象的客观起源以及它的必要性和重要性，如果从辩证唯物主义的观点来理解抽象的本质，就会看到抽象反映着实在，而不是“理性的自由创造”，还会认识到几何的抽象如同一切科学的抽象一样，都更深刻，更正确，更全面地反映出事物的本质。因为科学可以利用抽象揭露出客观事物中和变化过程中最本质的东西；同时更可以认识到不能将它们从现实的起源孤立地分离出来，而且不但看到抽象的实际起源，还要用实践来验证抽象的真实性，否则就会失掉它的现实的基础和真正的使命，那就是认识现实和改造现实的作用。列宁指出：“从生动的直观到抽象的思维，从思维到实践——这就是认识真理，认识客观现实的辩证法的道路。”因此，认识客观事物，首先通过感性认识，从此逐渐地产生了抽象的概念，就是上面已经指出的几何与其他科学一样，所有的概念都是从具体事物中抽象出来的。例如拿长方形来说罢，不管长方形的物体是一张桌子，是一块土地，或是一个球场，而我们只研究这个长方形本身的性质而把它和具体事物相分离，可是离开了土地、桌子、球场以及一切长方形的物体，在几何中就不可能有长方形这个观念。从一般概念，使用判断和推理的方法，就有了科学的理论，转过来通过理论来指导对现实作进一步的认识，并以此为基础得出更完整的理论，由现实而抽

象，再由抽象来指导现实，这完全是辩证唯物论的。

从以上的叙述，已经可以理解，科学的理论只能从实践中来。但是为了更明确地领会这个正确的论断，现在单从初等几何的产生和发展的过程来阐明。

上面已经指出，自然界中具有各种各样的形状的物体以及人类的实践活动成为几何抽象概念的基础。关于几何量的概念，比如长度、面积、体积等也是从实践活动中产生出来的。人们为了生产的需要，去测量长度，确定距离，估计面积和体积等。几何就是这样从生产和日常生活中产生的。正如古希腊历史所记载的，“几何是埃及人发现的，从测量土地中产生的，由于尼罗河的定期泛滥，经常把地界冲掉，需要重新分划田地。”在纪元前七世纪，几何从埃及传到希腊，这时正当欧洲奴隶社会初期，经济文化正在欣欣向荣，几何也因之迅速地发展。到了纪元前三世纪，希腊的欧几里德总结了劳动人民在长期生产实践中所积累的丰富成果，写成了“几何原本”一书。现在中学里的几何教科书可以说就是“几何原本”的通俗改写本，通称为“欧氏几何”。

在纪元前后，随着希腊罗马奴隶制度的没落，几何和其他科学一样停滞了一千多年之久。这是因为在欧洲封建社会初期，日耳曼侵略者极端残酷的统治摧残了生产力，而在整个封建社会期间，极端保守的宗教思想又占了统治地位，生产力无法发展，因而科学文化也就无所进展。

在我国，农业社会里有了土地私有制，由于农业生产的需要，就产生了量地术。在三千年前，商高为农业的生产，定历法而测日高，从此发现了“勾股定理”。在春秋战国到秦汉时期（纪元前八世纪到二世纪），由于天文、治河、工

程、建筑等种种需要，在几何方面获得了不少成果。例如张衡（78—136）造浑天仪，得出圆周率两个值， $\pi = \sqrt{10}$ ， $\pi = 3.16$ 及 $\pi = \frac{92}{26}$ 。（在这以后 200 年，阿拉伯数学书中才出现 $\pi = \sqrt{10}$ ）。

此后祖冲之（429—500）研究割圆术，算出 $\pi = \frac{355}{113}$ ， $\pi = \frac{22}{7}$ 和 π 介于 3.1415926 与 3.1415927 之间，一千多年以后欧洲才有人发现相同的结果。他的儿子祖暅之（又叫祖日恒之）有开圆术，求出球的体积 $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ 。就这些史料看来，我国古代对于几何的贡献是由于实际的需要得到很先进的，但比较孤立的公式和结果。可是由于我国长期以来受到封建制度的统治以及帝国主义的侵略，几何这个学科的进展就很缓慢。由此可见，几何概念正是人类历史发展中某一特定阶段的产物，它的产生只有当社会物质条件的发展已经提供了产生几何以及其他科学的需要和条件时，才有可能。

应当指出，各门科学的内部各有其特殊的矛盾，正是这种特殊矛盾决定它的特有的内容与发展的形式。比如，解析几何的研究对象是形与数，这一对矛盾，它的特点是通过坐标法，把点与坐标（有次序的数）对立起来，把曲线与方程对立起来，从而用代数方法研究几何问题。详细地说，解析几何的内容和方法就是：以具有变量的方程表示几何图形，并根据方程的代数性质来研究相应图形的几何性质，反过来，根据给出的图形的几何条件，找出它的方程，然后再依方程的代数性质来研究这个图形的几何性质，几何问题可以

用这样的方法归结为代数问题以及最后归结为计算。由此可见，几何、代数和一般变量概念的结合是这个方法的起源。解析几何在17世纪前半叶的出现决不是偶然的，当在欧洲过渡到新的资本主义的生产方式时，有一系列的科学部门需要整个地加以改进。比如，当许多资本主义国家为了争取海上霸权，大量发展了航海事业，为了测定船只的位置的迫切需要而产生了球面坐标；测定在海上的位置这个工作又促进了天文学的研究。为了掌握天体运动而产生各种天文坐标，就是在日常生活中，人们也经常按这样的方法来确定地点的位置。

此外，人们在发现行星沿着椭圆形的轨道绕着太阳运动；抛射出去的石子沿着抛物线的轨道飞去时，就有必要来计算这些椭圆和抛物线的方程。解析几何的方法正是解决这种迫切问题的需要而发展起来的。这个方法是由以前数学的发展所准备好的，在这个基础上，17世纪前半叶由笛卡儿加以总结而创立了解析几何。恩格斯指出：“笛卡儿的变量是数学中的转折点，因此动运与辩证法进入了数学，……”

解析几何的主要内容是论述平面上的直线和二次曲线以及空间中的直线、平面、和二次曲面等图形的性质。

解析几何进一步的重要发展是几何中引入了变换理论，就是引进几何变换群的概念，把这些图形和它们的性质加以分类。

变换群是几何中一个核心概念，通过变换群和图形的几何性质的关系，使我们能够掌握各类几何性质的本质与它们之间的内在联系；因而从较高的观点来理解和处理欧氏几何的问题。

在这里通过某些几何变换来考察图形性质的变化，正是为研究图形在某个变换群下某些不变量和不变性质。根据这种不变性，就引起各种不同的变换群来分类几何的思想。如我们在第八章中所论述的主要内容就是在正交变换群、仿射变换群、射影变换群之下研究图形的不变量和不变性质，从而分别引出度量几何、仿射几何、射影几何等概念以及几何的分类，并阐述了各种不同几何是如何统一在群论观点之下进行研究的。

解析几何到十九世纪经历了这样长的发展道路，已经给出了那么多的观念。接着，在这个基础上，还发展了四维和一般 n 维的解析几何，这些都是近代几何的主要内容，而超出了本课程的范围，这里不作介绍。

第一章 向量和平面坐标系

向量与坐标在解析几何里是必不可少的工具，本章首先叙述有关向量的概念和向量的一些运算。其次，为了使读者容易接受向量的基本内容，介绍向量的坐标表示时，只讨论平面向量。这样，在第四章再引入空间向量的坐标表示就很容易了。在建立坐标时，是从一般的仿射坐标系开始，而把笛氏坐标系作为它的特殊情形，然后来处理在中学里已学过的一些最简单的问题，使学生在复习已知知识的同时，还扩大了他们的视野。

最后，为了进一步揭示出形与数的联系，阐述了曲线与方程之间的对应关系。然后以求出圆的方程作为例子来体现形数结合的意义。为了理解运动规律和轨迹的关系，引入曲线的参数方程。

§1、向 量

1、向量的概念 在日常生活或物理学中经常碰到许多简单的量，只要取定量度单位以后，就可以用一个实数来表示这种量，例如距离、时间、面积、温度、质量、密度等，这种只有大小的、单用实数就可以表示的量叫做数量。不但有大小并且还有方向，例如位移、力、速度、电磁场等，这种量虽然不是数量，但是也可以象数量那样来运算，并且类似的但也有不同的运算法则。

通常我们说，从甲地向东走20里才到乙地；又说目标就在我们正前方200米处。从这两个例子就引出位移的概念：

一个质点沿着一个方向移动一段距离，这就是一点的**位移**。显然位移是一种既有大小（距离）又有方向的量。这样的量是很多的，如上面已指出的力、速度、电磁场、还有加速度、角速度、力矩等都是。这种量所具有的力学或物理学的内容虽然各不相同，但是都是既有大小又有方向的量。就这一点来说，这种量和位移是一样的。于是就有必要把这种量的共同特点抽象出来作为统一的研究对象，因此，我们把既有大小又有方向的量称为**向量**。

对于向量也可引进坐标用数量来表示，从而归结到数量的研究。为了使读者易于掌握，对于向量的坐标表示，本章只讨论直线上的向量和平面上的向量，当第四章讨论空间向量的坐标表示时就很容易理解了。对于向量可以用规定了起点和终点的直线段（简称为有向线段）来表示。因此，通常用有向线段 AB 来表示向量，用长度 $|AB|$ 表示大小，用端点的顺序 $A \rightarrow B$ 来表示方向， A 为起点， B 为终点。为了使有向线段清楚地表示一个向量起见，有时在写法上加一个箭头，写成 $\overrightarrow{AB}$ （图1.1）。

若两个向量，其中有一个从另一个经过平行移动可以得到，则称这两个向量**相等**（图1.2）。所以大小相等，方向相



图1.1

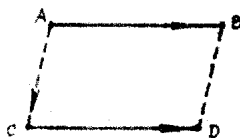


图1.2

同的有向线段表示相等的向量，例如图1.2中所示的， $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ 。从向量相等的定义可以推出，所有的向量的始点，