

149320

館內閱覽

基本常識

測·量·學

(1—10 章)



武漢測量制圖學院

測量學
PDG

第一章 緒 論

§ 101 什麼是測量學：

測量學是研究地球表面的幾何關係，並研究將此表面形狀縮小成圖的方法。

全部測量工作的最後成品是地圖，在實地上的工作是測量。測量所得的數據要經過計算，根據計算所得，再從事製圖，所以測量包括三步工作：測量，計算，製圖。總名叫作測量，正確些是‘測量製圖’，又簡稱‘測繪’。

測量一詞是十七世紀初由西洋翻譯而來，西洋各國所用的詞又源出希臘，照字義講是土地劃分。它和幾何學可稱是姊妹科學，同一個來源，一個多理論，一個多實踐。

到今天測量又和其他科學發生了關係，數學給它以理論根據和計算方法，光學是現代測量儀器的主要理論，力學可借以研究地球形狀和大小，天文學的一部分——應用天文學，已經是測量學的一個分支了，地理學，地質學，地貌學顯然和測量學有密切聯繫。

本課程所講的是測量，計算，製圖三方面的理論和實踐。在敘述中始終貫穿着的是儀器，觀測成果的精度和誤差。關於儀器有儀器學；關於精度和誤差，有最小二乘法。在方法上說有解析法和圖解法，解析法得的結果是數字，圖解法得的結果是圖。

測量學，狹義起來，叫作地形測量學，舊時也叫作普通測量學。它研究的是地球表面上較小地區的情況，雖然明明知道地球是球形，但幾乎全部理論都是把一小塊地面看成是平面，而不看成是球面。

大地測量就必須考慮地球的曲率，它所研究的是大面積的地球表面，進而研究整個地球的形狀和大小。

屬於廣義的測量學範圍以內的，還有攝影測量學。用攝影方法求得平面圖和地圖，攝影測量又分為地面攝影測量，和航空攝影測量。

广大地区的地图的繪制属于制图学。

§ 102 測量学发展簡史。

埃及的尼罗河有每年一度的氾濫，淹沒地界，水退之后，要恢复地界，測量学由于需要而得到了发展。

希腊人体会到地是球形。那时已經建立了測量这一科学，写出了書籍“測地学”，能利用圆周測量角度。

羅馬人設置边界，作道路，測量土地，划分土地等，都属于測量工作。他們画过很长的行軍路綫图，但沒按照比例尺。

十字軍东征，欧洲人从阿拉伯学去了磁針。

十四世紀初，因航海的需要，把希腊人遺下的地图作了修正和补充。十五世紀末哥倫布发现美洲，証實了地的形状，引起了測量制图更大的兴趣。十六世紀就产生了梅卡托投影法。

十七世紀初，发明了望遠鏡、鐘表，平板仪，解析几何，球面三角，对数。这些都給測量学的发展創造了条件。从那时以后，測量学就突飞猛进了。

十七世紀在法国和秘魯作了子午弧的測量。

十八世紀末，由測量的結果，产生了国际的尺度，一公尺等于經過巴黎的子午圈的四分之一的一千万分之一。

十八世紀初开始有水准高程測量。

这时人們对地球形状的認識，已由球体，进到两极略扁的球，再进而为大地水准面，大地体了。

到今天，人們已經知道地球形状是很复杂的。今后的任务就是通过詳細的測量来精確地測定地球形状。

苏联在十月革命以后，測量事业发展很快。1919年政府頒布了列宁亲自簽署的指令，統一所有基本測量工作，設立总的領導。最近在成就表現于摄影的应用，用无綫电測經度，和精密方法測定长度等等。現在大部地区已完成了各种測量工作。

在中国上古史上还不曾找到关于測量的什么史实，但从工程上

看，如大禹治水，可以推知当时（紀元前两千二百多年）已有測量技术，并且用以解决工程問題了。另一个例子是秦李冰父子修建都江堰，但已在夏禹治水两千年之后。

周初，有井田制，說明当时丈量土地已有些技术。

战国时代，（紀元前300多年）已有了指南針，后来傳到阿拉伯，十字軍时傳到西欧，是測量中測定方向的輕便工具。

汉張衡制渾天仪是天文測量的工具。

晋裴秀制图学家，拟定制图六体。

晋刘徽撰海島算經，講測望之术，就是結合算術的測量学理論。

唐僧一行，实测了子午綫一度的距离。

元郭守敬測了很多地方的緯度。

明末，徐光启从西人学測量，参以中国方法著“測量法义”一書，为中国測量書籍之始。

清康熙时，（十八世紀初）測了全国四百多城市的經緯度。

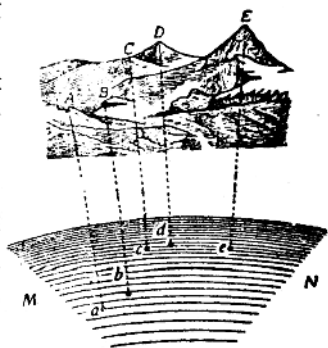
根据彼时观测結果，发見緯度越高，子午綫上一度的弧越长。此即地球系近似橢圆体的实証。

后来，中国的測量学就很沉寂了。民国初年，各省設立了測量局，施測了一些地图，但大部分質量过低，且数量很少。

解放后，由于苏联的帮助，測量事业发展很快。各学 校設立測量专业，已經培养出大批測量工作人員。測量書籍规范細則，也編譯了相当多。全国性的大規模的測量工作正在展开，并初步獲得了成績。偉大而艰巨的祖国測繪事业，需要我們用坚定的信心和辛勤的劳动来完成。

§ 103 投影

把地球表面形状画成图，表现在



Фиг 2

图 101

平的紙上，有两个困难：一个是地面不平滑，一个是地是球形不是平面。为了画图第一步必須把地面上高高低低的点子投影到一个一定大小的球面上来。图101上部表示一块高低起伏的地球表面。 A, B, C, D, E 表示些地表面上的点子， MN 表示球面的一部分。 a, b, c, d, e 各点是 A, B, C, D, E 向球面 MN 的垂綫投影。 $ABCDE$ 和 $abcde$ 是相应的， $ab, bc, \dots$ 等綫是 $AB, BC, \dots$ 等綫的投影， $\angle abc, \angle bcd, \dots$ 是 $\angle ABC, \angle BCD, \dots$ 的投影 $abcde$ 图形是 $ABCDE$ 图形的投影， $abcde$ 就是給 $ABCCDE$ 画图时的依据，在 $ABCDE$ 处实施测量时所得的数据要化到 $abcde$ 图形上。

由图102可以看出，如果把地表面上的图形投影到不同半徑的球面上，将得到不同大小的投影，所以投影面应该是一定的，具有一定的大小。

第二步是把这球面上投影过来的图形，再投影到平面上，便可以制图了。此步称为地图投影，不在本課程范围内。

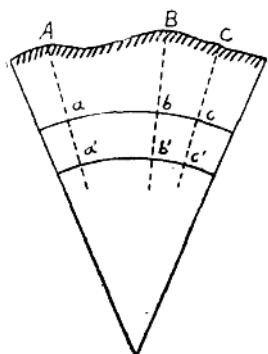


图 102

§ 104 地球的形狀的概念和它的大小。

地球的外形 地球大体上是个球形，有陆有海，陆上有高山深谷，有高原平原；海洋水面如不考虑潮汐和波濤可以說是光滑的球面，但海洋底也是高低不平的。地球在某一时期曾經是旋轉着的火焰一般的液体質量，由于离心力，地球就形成了扁球。扁球并不很扁，从整个地球来看表面的高低起伏也是微不足道的。

水准面 一条細綫，拴一錘，自由垂下，在錘靜止时，这綫的方向叫鉛垂綫。和鉛垂綫垂直的平面叫水平面。地球上不同地点的鉛垂綫是互不平行的。地面上的一片水，例如洞庭湖，想象这片水向各方向展开，展到很远，直到包圍了地球，这个大水球的表面的任何一点

都是和鉛垂綫正交的。这样的面称为水准面。洞庭湖不过是个例子，沒有提到它在地球表面上的高处还是低处。它的位置高一些或低一些就展成不同的水准面，水准面应该是有无限多个的。

大地水准面 在无限多个水准面中，其中一个是通过平均海洋面的，即是想象完全靜止的海洋面，展开到包括全地球，叫作大地水准面。因为地球内部密度的不均匀，所以大地水准面的形状是相当复杂的。因此，它并不是个良好的投影面。

参考椭圆体 大地水准面近略地是个两极略扁的旋轉椭圆体。所以就采用一个旋轉椭圆体作为輔助面，地球表面上所有的点依法綫方向投影到这椭圆体上。叫它作参考椭圆体。参考椭圆体在教学上是完全確定的，并且具有一定大小。

地球的大小 地球的真实大小頗不易知，大地水准面的大小也不易知。参考椭圆体和大地水准面是互相交錯着的，有些地方是大地水准面在参考椭圆体的面的下面，有些地方就恰相反，(图103)因此参考椭圆体的大小，就很能代表地球的大小。測量史上有几个不同的参考椭圆体，而苏联现在所用的是克拉索夫斯基椭圆体。就是：

$$\text{长半径} = a = 6,378,245 \text{ 公尺}$$

$$\alpha = \frac{a-b}{a} = 1:298.3$$

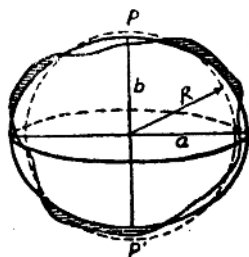


图 103 (示意图)

練習題

1. 試約略計算克拉索夫斯基椭圆体的短半径 b ，精確数字是 6,356,863 公尺，在一些簡單計算里，常假定地球半径是 6370 或 6371 公尺，你看合理嗎？

2. 通过一些計算来搞清楚这一問題：三十公分直径的地球仪，造成了球形沒造成旋轉椭圆体，这是因为不必要呢？还是粗制濫造呢？

3. 世界上最高的山峯，高8,800公尺，最深的海洋深10,800公尺，如果造成一个表现地球表面高低起伏的地球仪，直径30公分，它的高山和深海相差若干公厘？

§ 105 地面上点子的位置的确定

观测丈量的对象是河流，道路，房舍，桥渡，地界，牆垣，湖泊等，称为地物；又有山嶺，谷地，邱陵等，称为地形。地物和地形实际上，都依靠一些点子表示出来。例如一栋长方形的房屋只要测出四个角的位置就可以画出图来。就是说用四个点表示出一栋房屋。一条不很直的小路也可以在转折处用点子表示出来。由此可见测量工作就是搞一些点和点之间的位置关系。

点子本身在地球表面上有个绝对位置，就是经纬度和高程。

§ 106 经度和纬度

和平面直角坐标系相似，在球面上，也建立了坐标系，称为球面坐标系。在地球上所建立的球面坐标系称为地理坐标系，它的两坐标就是经度和纬度。相当于纵横两轴的有两个大圆，（图104）（一个通过球心的平面，和这球所截的痕迹，称为大圆）一个是赤道， EOK ， Q 一个是通过格林尼治 G 的子午圈， $NGOS$ 。为了确定球面上一点 P 的位置，作大圆 $NPKS$ ，设球心是 C ， $\angle OCK = \lambda =$ 经度， $\angle KCP = \varphi =$ 纬度。球面上任何一点都能用 λ 和 φ 两数值表示出来；任何一 λ 值和任何一 φ 值联合起来就确定了球面上的一点。在赤道上纬度是零。北半球各

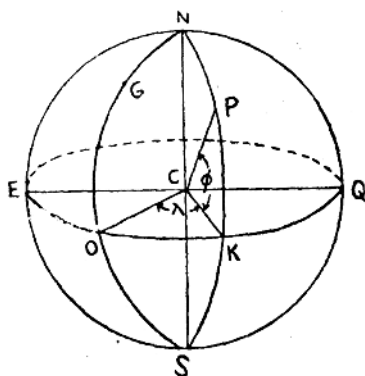


图 104 一經度和緯度

处緯度是正值，又称北緯。北极的緯度是 $+90^{\circ}$ 。南半球各处緯度是負值，又称南緯。南极緯度是 -90° 。緯度数值的范围是从0到 $\pm 90^{\circ}$ 。在格林尼治子午圈上經度是0，它的东面各处称东經若干度，西面称西京若干度，东西經各从0度到180度。

武昌地理坐标近似值是北緯 $30^{\circ}30'$ ，东經 $114^{\circ}15'$ 。

練習題1 从地图查出下列各处的經緯度：北京，莫斯科，雷克雅未克（在冰島上），和圣地亚哥（在智利）。武汉和开罗哪一处偏北些？广州和郑州哪一处偏东些？

練習題2 試計算緯度 1° 大約等于多少公里， $1'$ 等于多少公里， $1''$ 等于多少公尺。

練習題3 說出图101上0点的經緯度。

練習題4 你能想到緯度 1° 的公里数不是常数嗎？例如从 10° 到 11° 是 K 公里，从 55° 到 56° 便不是 K 公里？你能想到經度 1° 的公里数随緯度之不同而不同嗎？你能体会北极的經度的意义嗎？

§ 107 高程

地理坐标只于确定了一个点的球面位置，但地球是高低起伏不平的，所以地表面上的一点光依靠地理坐标就不能确定下来，必須还有一个数值来表示高和低。一个点它所高出大地水准面的公尺数就是这一点的高程。看图101，如果 MN 表示大地水准面， Aa 就是 A 的高程， Bb 就是 B 的高程……。一般来讲，在陆地上高程是正值，海洋底的高程是負值，高程的取得要依靠各种高程测量，其方法在以后各章述及。由海濱的驗潮所所测得的平均海平面起，一步接一步地，把大陆上各地的高程测出来。已知高程的点子，用特制的标志記下来，称为**水准点**或**水准标点**或**水准基点**，作測量工作时可以由某一水准点起，测出所欲测各点的高程。

有时想测量的地区附近沒有水准点，或水准点較远，而这一測量工作不很重要或其他原因，都可以不連接水准点，只是在测区附近指定一点，假定一个高程，便可开始測量。测得的高程只是各点間相对

的高低而已，这样的高程称为**相对高程**或**假定高程**。因此把从大地水准面起算的高程称为**绝对高程**。相对高程也有一个起算的面，它的相对高程是零。当我们给一个点的高程作假定
时，要尽可能地接近真实，要整齐数字如500，550等，宁可太大，不要太小，太小了会搞出负的高程来。

§ 108 面积小到什么程度才可当作平面看。

这个问题是在§ 101“什么是测量学”里提出来的，在测量学里把一小块地区看作是平面，但小到什么程度呢？什么是界限呢？设想一平面和一球相切，相切处只是一点，如果把这一小块地方看成是一个平面，其中就含有误差。所设想的平面越大，这误差也就越大。当误差大到在测量上认为是不可容许的程度时，那就是达到平面的最大限度了。以下我们从三个不同的方面来看这问题。

(一) 从直线的长度来看

设A, B是地面上的两点(图106)说到AB线的长度，如果指的是两点间随着地面起伏的长度，在测量上说便没什么意义；如果指的是联AB的直线，也没什么意义；测量上，指的是两点的某种投影间的距离。把地球看成是球体，就投影到球面(这里把大地水准面近略地看成球面)。弧aMb的长度就表示AB距离。把一小块地看成平面，就投影到平面，直线a'Mb'就表示AB的距离。设aMb=s, a'Mb'=x, (s-x)就是以平面表示球面所产生的误差。以下研究(s-x)的值，并

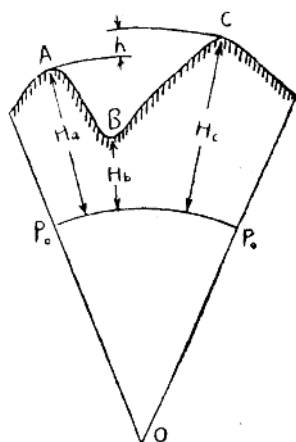


图105 P_0P_0 是大地水准面， H_a , H_b , H_c 分别是A, B, C的高程。 $h = H_c - H_a = A, C$ 两点的高差。设 H_a 被假定为1000m, $h = 80m$, 则C的假定高程为1080m, 设 H_a 真实地等于800m, 则C的绝对高程为880m。

設 $v = s - x$,

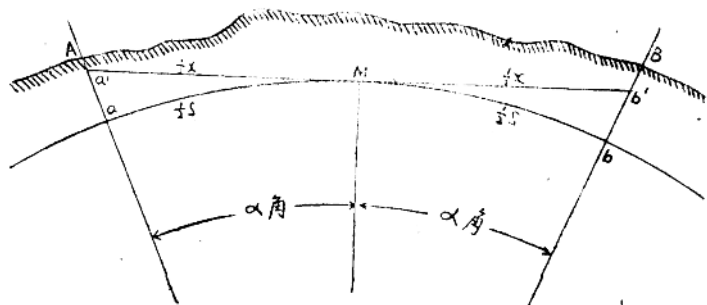


图 106

設球心是 O , $\angle aOb = 2\alpha$, $\angle aOM = \alpha = \angle bOM$, 地球半徑是 R , 由 $\triangle b'MO$ 得

$$\frac{1}{2}x = R \tan \alpha \quad (a)$$

由扇形 bMO 得

$$\alpha = \frac{s}{2R}$$

把式(b)的 α 值代入式(a)

$$\frac{1}{2}x = R \tan\left(\frac{s}{2R}\right) \quad (c)$$

由台勞級數*

$$\tan \theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \frac{17\theta^7}{315} + \dots$$

以 $\frac{s}{2R}$ 代 θ , 仅取前两项, 得

$$\tan\left(\frac{s}{2R}\right) = \frac{s}{2R} + \frac{s^3}{24R^3} \quad (d)$$

把式(d)的右边代入式(c)

$$\frac{1}{2}x = R \left(\frac{s}{2R} + \frac{s^3}{24R^3} \right)$$

$$x = s + \frac{s^3}{12R^2}$$

$$s - x = -\frac{1}{12} \frac{s^3}{R^2} = v \quad (1)$$

$$\frac{v}{s} = -\frac{1}{12} \left(\frac{s}{R} \right)^2 \quad (2)$$

由式(1)和式(2)可算出一表，如表一：

S (公里)	-v	$\frac{-v}{s}$
10	0.21 cm	1:4,870,000
20	1.64	1:1,220,000
30	5.54	1:541,000
50	0.26m	1:195,000
100	2.15	1:48,700
200	16.43	1:12,200
300	55.45	1:5,410

表 一

由这表可以看出，当S等于20公里时，误差v和s的比，不过是1:1,220,000，现代最精密的直线长度测量，误差和长度的比是1:1,000,000，所以直线长度在20公里以内时，可以不考虑地球曲率。

(二) 从高程方面看

图107，AD表示地球面，AK是A点的水平线。如果考虑到地球面的曲率，A和D认为是等高，这是正确的。如果不考虑地球的曲率，便把AK看作是等高。那就产生了误差KD，即是z，z值的大小可以如下计算：

$$(R+z)^2 = R^2 + t^2$$

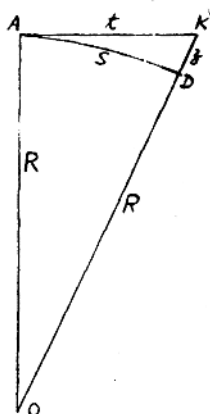


图 107

$$R^2 + 2Rz + z^2 = R^2 + t^2$$

$$z = \frac{t^2}{2R + z}$$

t 长不可知， s 长可丈量得，二者相差极微，所以可用 s 来代 t ，

$$z = \frac{s^2}{2R + z}$$

z 和 R 比较， z 是很小的值，因此下式是很近似的。

$$z = \frac{s^2}{2R} \quad (3)$$

依这公式制成一表如表二：

S (公 里)	z
1	7.85 cm
5	196 cm
10	7.85 m
20	33.40 m
50	196.2 m
100	785. m

表 二

由这表看出，当弧长是10公里时，误差 Z 已到8公尺，不能略而不计，当弧长是0.1公里，即100公尺时，误差 Z 已達到0.8公厘。在水准测量里已不能不考虑。因此，从高程方面看，地球曲率是永远必须考虑的。

(三) 从角度方面看

一个平面多边形的諸內角的和是 $(n-2) \cdot 360^\circ$ 。一个球面多 边形的諸內角的和要大些。球面多边形諸內角的和減去 $(n-2) \cdot 360^\circ$ 所得的差，称为球面角超。用 ε 来表示。求 ε 可用下列的公式，这公式的引导，这里有意的略去。

$$\varepsilon = \frac{P}{R^2} \rho'' \quad (4)$$

式里， P 是多边形面积， R 是半径。由这式的计算，可得下表，表三。

P (平方公里)	ϵ (秒)
10	0.05
100	0.51
400	2.03
900	4.57
1600	8.13
2500	12.71
5000	25.4
10000	50.8

表 三

从表三看出，边长10公里的正方形，地球曲率的影响是 $0''.51$ 。这个数值只有在现代最精密的角度测量中才可以考虑。在精密较低的角度测量中，对于相当大面积的图形，可以不考虑地球曲率。

§ 109 平面上的坐标。

既已说明了把小块地看成平面的理论，和限度从此我们就在平面上搞测量了。当然，遇到和地球曲率有关的问题还是要特别讨论的。平面上搞测量，就不使用经纬度来定点子的位置，而是用平面直角坐标。

平面直角坐标，在测量上所采用的和在数学上所采用的稍微不同一些。纵轴是 X 轴，横轴是 Y 轴。纵轴向上为正，向下为负；横轴向右为正，向左为负，右上为第一象限，右下为第二象限，左下为第三象限，左上为第四象限。第一象限 x 和 y 都是正，第二象限， x 是负 y 是正，第三象限 x 和 y 都是负，第四象限 x 是正 y 是负。（图108）

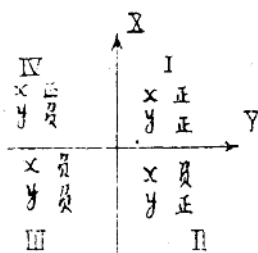


图 108

在三角学里的单位圆周，动径是从横轴右半起，逆鐘針方向轉。在測量学里，相似而不同，是从縱軸上半起，順鐘針方向轉。（图109）

測量学里的直角坐标，一般是 X 軸指向北。 Y 軸指向东。

測量学里的直角坐标，可以解任何解析几何的問題，但实际遇到的多半是簡單問題。但数字常常是六七位，而且要求算的很精確。

測量里也利用极坐标，用一个方向和一长度来定一点的位置，但多半用在局部的小范围内。

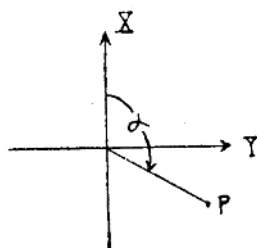


图 109

§ 110 測量工作的内容和程序。

測量的主要工作，不外距离測量，高程測量和角度測量。其共同目的就是確定地面上各点的平面位置和高程。点数既多，加以繪制即得地形图。

地上先建立一个密度較小的定点羣。这些点子，用想象的綫联起来，便成了很多三角形，称为三角网，把这些三角形的每一个角都測出，再測出至少一个边，和至少一个点的經緯度，这三角网的所有点的位置就这样定下来。三角网达到某种規定条件的称为一等三角网。

这些点子太稀疏，在每一三角形里用同样的方法再作三角网，称为二等三角网。二等的边短些，測法的精度也差些。为了加密点子，还有三等的和四等的。这样就把点子越来越密了。以上这些点子都称为控制点。

控制点还不够密，加設导綫。导綫是折綫，边和角都要量出。导綫点也是控制点。点子更加密了。

为求得各点的高程，可在測区进行水准測量，建立很多高程已知的水准点，名叫水准网，控制点的高程就可以由水准网測出来。这以上都属于控制測量。

有了控制就可以进行地形测量了。如经纬仪测量，平板仪测量，摄影测量都是。地形测量的成果就是地形图。

有时作小地区测量或独立地区测量，不作三角网，直接作导线。

地形测量是一小块一小块地测，属于局部；控制是属于整体，测量的原则是由整体到局部。

这以上是在野外作的，称为外业，或野外工作。

外业所得的成果有数字记录，有草图，都需先整理一次，主要是计算。计算工作应采用简单的方案，并且逐步的有检核，以免一错到底。应利用各种计算工具如计算机，计算尺，算盘，和各种图表。

测量工作逐步都有要求的精度，不合精度的工作就舍弃了重新作。精度是需要计算才能知道的。

下一步是绘图工作。测量成果经过整理，就可利用它来绘图，绘图要保持高度的精确性，因为以后要根据图来作设计的，最后还要经过印制的手续，完成最后的成品——地图。

§ 111 地图和他种图。

由测量成果所制成的图，有以下的类别。

平面图 测区很小，把水准面上的投影当作平面上的投影来看。这样所成的图，和地面实在形状相比较，是缩小了的相似形。这种图称为平面图。

地图 地区相当大，投影的水准面已经不能当作平面看，这图是用适当的投影方法绘制的，它和地面形状不再保持相似的关系，而是有某种程度上的变形。这种图叫地图。

地形图 若是在平面图或地图上仅仅表示出测区地表面上各点线的投影位置，这还是未能表示地表面的真实形状。在平面图和地图上有时用一些方法把地面的起伏形状也表示出来。这种就叫作地形图。

碎部图 没有表示出地面起伏形状的平面图称为碎部图。

断面图 除了平面图和地图，在实用上，常需要沿着某一定方向用图形表示地面上豎直断面的形象。这种图叫作断面图。

随着繪制地图目的的不同又有地質图，土壤图，海洋图，航空图等等。

§ 112 測量在社会主义建設及国防上的意义。

測量供給經濟建設以地图。如果想在严格的科学基础上拟訂計劃，就必須有地图。在設計中，經濟和技术方面的考虑，都要根据精密仔細測繪的地图来进行。地图能給出解決問題的最合理最有利的办法。

工厂，学校，和各种建筑物，必須依靠地图尤其是地形图来找出最合理的位置，和有系統的布置計劃。

铁路公路运河等的兴修事先要在地图上選擇路綫，又要实地去施測，然后才决定各个建筑物如桥涵，隧道，車站等的位置，以及中綫的弯和直，上坡或下坡，否則不能开工。

水电站的修建，必須利用測量的技术和已成的地图来决定水壩的高度，水庫的容量，发电的数量，将来被水淹沒的区域的界綫和面积，以及发电后的輸电綫路等問題。

內河航运的发展，要研究和改进通航条件，也都依靠測量。繪制河道和两岸的地形图，指明航行的障碍物如沙滩，淺滩等的位置。確定深度，測量水位，拟定疏濬計劃。

大規模的治河，如治黃治淮也必須利用地形图，以確定各种水工建筑物的大小和位置，并作詳尽的計劃。

地質，采矿也都和測量工作分不开。

除設計外，在施工时有施工測量，即是在图上設計的建筑物，反回確定到地面上，这才能施工。在建筑物建成之后为了研究它的稳定性，以便改进設計和养护技术，也需要随时进行測量，如測定水庫大壩的变形及基地沉陷等。

在国防事业中，測量工作更不可少，为拟定进军路綫，陣地分布，作战計劃，必須根据良好的地形图。我国有极长的海岸綫，測量在沿海防务上也具有很大的意义。陆海軍的炮兵射击作战中，直接需要測量技术。航海和航空需要天文測量。

第二章 測量里常用的一些計算知識

一、度 和 徑

§ 201 徑是一個量角的單位。

和半徑相等的一段弧長所對的圓心角作為角度單位稱為 1 徑，又稱為一個弧度。

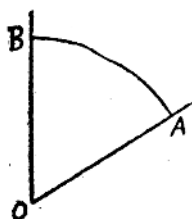


圖 201

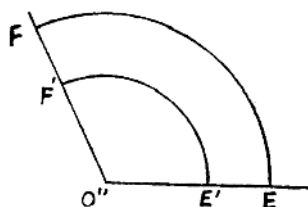


圖 203



圖 202

圖201 弧 AB 的長度 = 半徑 OA ， $\angle AOB = 1$ 徑。

圖202 弧 CD 的長度 = 半徑 $O'C$ 的五分之一， $\angle CO'D = \frac{1}{5}$ 徑。

圖203 弧 EF 的長度 = 半徑 $O''E$ 的兩倍， $\angle EO''F = 2$ 徑。

徑字在數字後面時，常略去不寫。

角的大小和半徑無關，這裡雖牽扯到半徑，但角的大小仍然和半徑無關。例如图203， $\angle EO''F = \frac{EF}{O''E}$ ，但也等於 $\frac{E'F'}{O''E'}$ ；很显然 $\frac{EF}{O''E}$ 和 $\frac{E'F'}{O''E'}$ 相等，就是說半徑雖由 $O''E$ 改為 $O''E'$ 。但 $\angle EO''F$ 的數值不改，仍是2。

推而廣之，圓周長等於 $2\pi R$ ，被半徑 R 除，得圓心角的徑，而圓心角等於 360° ，所以