巴巴諾夫

普通物理講義

第三册

（振動、波動、光學、原子物理）

普　　　　　　理

目　　錄

第四部份　振動和波動

第五部份　波動光學基礎

第六部份　原子物理及原子核物理

第四部份　振動和波動

第二十四章　諧振動

§191　週期運動

除了我們以前研究過的運動，平移和轉動之外還有一種振動。這種形式的運動特點是經過一段一定的時間以後，運動就會有規則的重複。因此這種隨時間重複的運動叫做週期運動。應當指出，週期運動不但在自然現象中有很重要的作用，在技術上也是很重要的。

例如，掛在綫上的擺的運動，每經過一段一樣的時間（運動的週期）便可以發生完全一樣的重複，天體，例如行星，它們的運動也是週期性的——是沿着橢圓軌道的週期運動；差不多一切機器和機件的動作都與某種規則地重複着的運動有關係（軸的轉動，活塞連桿的運動等等）這都是週期運動的例子。

這種形式的運動特點就在於運動時物體上各點都將走出一定的封閉軌道，而這些在坐標軸上的投影都是作週期運動的。用數學表示時各點的坐標都是有同樣週期T的有限的函數。

在自然界和技術中振動都是屬於最常見的運動類型的。不僅是我們觀察到了物體的振動，或者是感覺到了的振動，一切發聲的物體都作着振動。平常是不可見的振動，如固體分子的熱運動，也是振動。

振動和波的理論是聲學（關於聲的學問），地震學（關於地殼振動的學問）的基礎，在許多應用科學（建築力學，造船學，機器理論等等）裡也有根本的重要性。然而，需要注意，振動理論的意義比上述的還要廣得多。本課程繼續講下去的時候就會看到，從本質上說來，光學和電學中我們還會碰到這些振動和波的規律。無綫電學和交流技術也建立在普遍的振動理論之上。這樣看來，振動理論的基本定律有非常普遍的意義。

§192　諧振動

設想有一點M以相等的角速度ω沿半徑爲A的軌道而運動（圖1）。

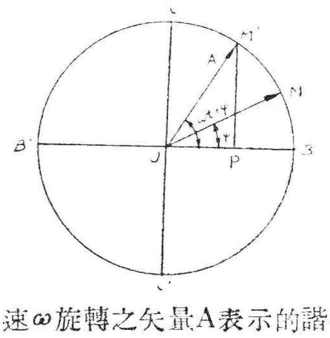

圖1.　等角速ω旋轉之矢量A表示的諧振動

令M點爲一矢 A之端點，此矢量數值上等於圓的半徑。看M點（矢量A的端點）在水平的直徑BB'上的 影P的運動。規定M點的運動根據起點B算，而P點的運動根據O點算，以從O向右的位移爲正，從O向左的位移爲負。

設在起始的時間（t=o），矢量A已轉離起始位置OB有一角度φ，到時間t時，轉了角度（ωt+φ）；那麼P點的位移x等於OP，而可由下式決定

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

角度（ωt+φ）決定了在時間t時，點的位置的性質，它叫做振動的位相；振動的位相以弧度表示。角度φ決定t=o即起始時點的位置的性質，它叫做振動的初位相。A這個量等於圓的半徑，它決定振動點P在兩個方向離開O點的最大距離。這最大距離叫做振動點P的位移的振幅A。振幅A及振動初位相φ可從初起條件決定。ω是輔助點M的角速度，它以弧度表示而等於：

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

此處T是振動的週期，在這段時間內振動點P振動了一整個來回，從起始位置出發先向一方向運動，再向另一方向運動而回到起始位置，這段時間就是週期。不用振動週期T也可用它的頻率

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

頻率決定1〔秒〕之內所示的全振動次數。頻率的單位是每秒振動一次，這叫做〔赫芝〕（以гц表示）。

對於振動說來，角速度ω決定2π秒之內運動過程重覆的次數（即全振動數），因此角速度ω也叫做圓頻率。有很多振動的公式用角速度可以寫得簡化些。

方程式

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

表示的運動是振動：實際上可以看到，M點作等速圓周運動的時候，此點投影P就在水平的直徑上作橫向往復運動，週期地經過O點，即計算的原點。如果我們研究M點在垂直的直徑CC'上投影的運動，那麼同樣也可得方程式：

$$x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

可用正弦函數或餘弦函數表示的振動叫做簡諧振動。這種振動的性質可用振幅A及振動週期T決定。

如果振動初位相φ=O，那麼簡諧振動的方程式如下：

$$x = A\cos\omega t \qquad \text{及} \qquad x = A\sin\omega t$$

用圖表示這種方程式代表的簡諧振動如圖2所示。

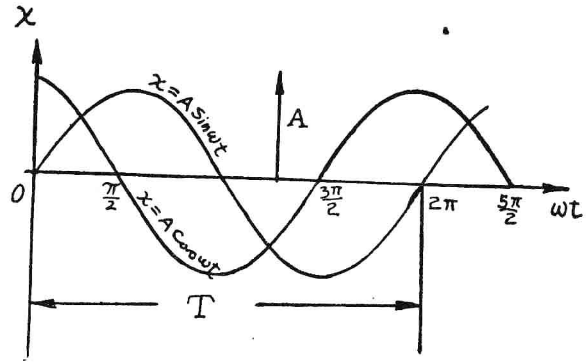

圖2. 諧振動的圖示

此圖上振動點離開平衡位置的位移x是時間的函數。位移圖可以直接用實驗得出。只要在振動的物體上附一尖端的東西（鉛筆）用來畫圖，在其下均勻地把一張紙拉過去。鉛筆就自動地在紙上記下時間的函數的位移曲綫了。（如圖3）

§193　一個自由度的振動系統

我們來看幾種一個自由度的振動系統。

1. 重物在兩彈簧的無摩擦的振動。

設想有一質量爲M的質點，放在兩彈簧之間（彈簧的質量可以忽略），質點只能在水平方面向兩邊自由振動（例如滑過一根直棒而不受到摩擦），（圖4）

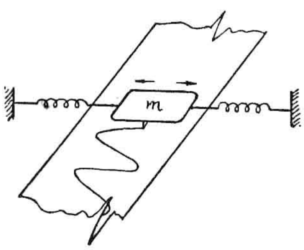

圖3. 記錄時間函數的位移曲綫

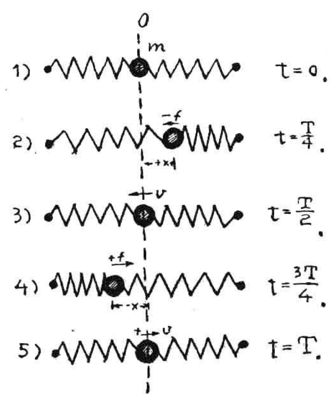

圖4. 兩彈簧間質點m的無摩擦的振動

這個彈簧和質點組成的系統是一個簡單的一個自由度的振動系統。如果把質點推向一邊（右邊），再放開，它就在平衡點附近開始振動。開始的外界作用給了此系統若干位能，我們認爲此後這系統不再受到外力的作用，它是一弧立系統，即不受外界作用的系統；這種系

統叫做保守系統。只有內力作用而發生的這系統的振動叫做自由振動，此系統的自由振動週期只由此系統自己的性質決定。

如果知道某時刻質量為m的質點的位置，速度及加速度，那麼此系統的狀態就可完全決定。既然系統只有一個自由度，確定其位置只要一個坐標——離開平衡位置的位移 x；在平衡位置$x=0$。

在此振動系統中，因為一個彈簧壓縮而另一彈簧拉長而發生的彈性力是永遠向着平衡位置的，在位移很小的情形下，根據虎克定律，此力與離開平衡位置的位移x成正比：

$$f=-kx$$

此處k是比例係數，它叫做彈性係數，此係數在數值上等於使彈簧發生單位長度的位移所必需的力。負號表示力的方向與位移x的方向相反，例如質點位移在右時，力向左，而點的位移向左時，力向右。

決定此力學系統的兩個量m和 k 叫做系統的參數。各力學系統的差別就是在於其參數不同的。

在我們所研究的沒摩擦的孤立系統中，彈性力就是唯一的作用力。根據牛頓第二定律：

$$f=ma$$

因此就可得到簡單振動系統的運動方程式如下：

$$ma=-kx$$

或

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$$

這式子是簡諧振動的微分方程式，即自由振動方程式。

m和k兩個量都是正的，因此可令其商為某一個量ω的平方，即引入符號：

$$\omega^2=\frac{K}{m}$$

下面會看到ω這個數可叫做圓頻率。這樣自由振動方程式可寫成如下的形式：

$$a=-\omega^2x$$

由此可得，振動點的加速度與位移x成正比而且和它方向永遠相反，即向着平衡位置，這是簡諧振動的一個很重要的特性。

現在我們的問題是要確定質點的運動的情形。從上式已知這點的加速度與它離開平衡位置的位移x成正比，其方向是向着平衡位置的。如果知道此點的位置是時間的什麼樣的函數，那麼此點的運動就知道了。現在就需要決定位移x對時間t的函數關係。這樣一來就需要找出x和t之間的關係來，要使之滿足上面的方程式。這關係由下面的方程式

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

決定。

取x對於時間t的二次導數就可看到得到的解是對的：

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2A\cos(\omega t+\varphi)=-\omega^2x$$

如果用下面的方程式也一樣：

$$x=A\sin(\omega t+\varphi)$$

因此，上面所研究的質點在兩彈簧之間的運動是簡諧振動。

2.數學擺

長線掛着重球，線的質量比起球的質量來很小（球的質量可認爲集中於中心），這樣一個系統叫做數學擺。

我們來研究數學擺的振動（圖5）

擺的懸線在垂直位置的時候，擺的重球上所受的重力P被繩子的拉力抵消了，擺偏離平衡位置在某一角度φ時，重力P只有一部份被繩的反作用力抵消了，即只有平行於繩的重力分力抵消了。和繩垂直的分力Pt數值上等於Psin∝，而向着擺的平衡位置，這力沒被抵消。這樣。

$$P_t=P\sin\alpha$$

擺離開平衡位置的角度很小時，sin∝可以用∝角本身代替，近似地：

$$P_t=-P\cdot\alpha$$

負號表示力Pt與離開平衡位置的位移的方向相反，即Pt是永遠向着平衡位置的。

使擺的重球回到平衡位置的這個力Pt，當角度∝很小時，是與此偏離角∝成正比的，在此力的作用下，擺就在平衡點附近作振動。擺的這個振動，其性質與彈性力所引起的振動是一致的。然而，在此情形下，振動不是由彈性力引起的，它是由重力的分力Pt引起的。這個分力是向着平衡位置而與擺和平衡位置的偏離成正比（當∝很小時）。因此，力Pt的性質類似彈性力。

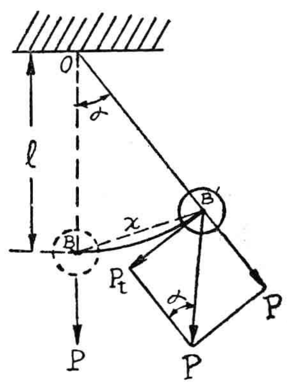

圖5. 擺的振動

這種力就性質來說是非彈性的力，但它和位移的關係，外表上與彈性力類似，叫做準彈性力。

以m表示擺的質量，以a表示Pt這個力引起的加速度，以q表示重力加速度，那麼根據牛頓定律可得：

$$ma=-mg\cdot\alpha$$

消去m得：

$$a=-g\cdot\alpha$$

從圖5可見，擺偏離平衡位置的角度很小時

$$\alpha=\frac{x}{l}$$

這裡l是擺長，把這個數值代入加速度公式中就得：

$$a=-\frac{q}{l}x$$

因此擺振動的加速度與離開平衡位置的位移x成正比，其方向向着平衡位置。因此可得結論，擺作的是諧振動。把上式和下式比較：

$$a=-\omega^2 x \quad , \quad 此處 \quad \omega=\frac{2\pi}{T}$$

可得結論：

$$\frac{g}{l}=\omega^2=\frac{4\pi^2}{T^2}$$

由此得到偏離的角很小時，擺振動的週期等於

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

因此，數學擺振動的週期只決定於擺長l以及地球上該點的重力加速度g，而與擺的質量和振動的振幅無關。

擺是決定重力加速度的最簡單，最方便，最準確的儀器。振動週期的大小與重力加速度的平方根成反比；在不同的地方觀察擺的振動可發現週期不同，因此可發現重力加速度的不同。

與振幅無關的振動叫做等時振動。擺離開平衡位置的偏離很大時（振幅很大時）振動就不是等時的了。

3.物理擺

一切在重力作用下繞水平軸擺動的不變的剛體部都叫做物理擺。研究物理擺的運動時可利用它的一個性質：物體上作用的一切外力， 其合力作用在重心上， 大小等於物體的重量P=mg（圖6）。

和數學擺一樣，物理擺在重力的互成垂直的兩分量Pn和 Px作用下， 將在平衡位置附近振動。偏角α很小時，力Pt近似地等於：

$$P_t=-P\cdot\alpha=-mg\alpha$$

這力繞O的力矩等於：

$$M=P_t\cdot L=-mgL$$

這裡L是轉矩從O到重心C的距離。在這個力矩作用下，擺要得從到角加速度。根據剛體轉動的牛頓第二定律，角加速度等於：

$$\varepsilon=\frac{M}{J}$$

這裡J是擺繞O軸的轉動慣量。

從上式把力矩M的值代入此式就得：

$$\varepsilon=-\frac{mgL}{J}\alpha$$

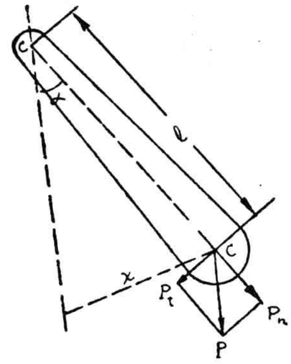

圖6。 物理擺繞水平軸的擺動

因此，擺的角加速度與它離開平衡位置的偏角α成比例並且其方向是向着平位置的，即我們得到了一個與以前彈性力作用下的諧振動的關係式類似的式子：

$$a=-\omega^2x$$

這樣，物理擺的運動是諧振動，而

$$\frac{mgL}{J}=\omega^2=\frac{4\pi^2}{T^2}$$

由此物理擺的振動週期等於：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgL}}。$$

使　　$$l'=\frac{J}{mL}$$

這個量叫做物理擺的折合擺長。這個名詞的意義是，一個數學擺的擺長如等於物理擺的折合擺長就有與它同樣的振動週期。

把折合擺長l'代入擺的振動週期的方程式中就得：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}$$

因此，物理擺振動週期的公式，其形式和數學擺振動週期的公式一樣。

我們研究的是僅有內力作用而無摩擦的振動系統。這種系統將以不隨時間改變的振幅作振動。振幅恒定不變的振動叫做無阻尼振動。

§194　諧振動的速度及加速度

作諧振動的質點離開平衡位置的位移x由下方程式決定：

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

此處A是振動的振幅，ω是角(圓)頻率，而φ是振動的初位相。點的速度V數值上等於位移x對時間的一次導數：

$$V=\frac{dx}{dt}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

取速度V對於時間t的一次導數，或者位移x對時間t的二次導數就得到點的加速度：

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi)$$

從上式可得

$$a=-\omega^2 x$$

這就是回到以前得到的結果了，即諧振動的加速度與離開平衡位置的位移x成比例，其方向向着平衡位置。

回憶一下，角頻率

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

故速度及加速度的公式可寫成如下的形式：

$$V=-\frac{2\pi}{T}A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$$

$$a=-\frac{4\pi^2}{T^2}A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$$

從這些公式可看到，作諧振動的點子的速度及加速度是時間的週期度量，其週期T與位移x的週期一樣。

把一次全振動之內不同時間振動點的位移x，速度V及加速度a並列如下：

t	x	v	a
○	+A	○	$-\frac{4\pi^4}{T^2}A$
$\frac{T}{4}$	○	$-\frac{2\pi}{T}A$	○
$\frac{T}{2}$	−A	○	$+\frac{4\pi^2}{T^2}A$
$\frac{3T}{4}$	○	$+\frac{2\pi}{T}A$	○
T	+A	○	$-\frac{4\pi^2}{T^2}A$

從上表可見，當振動點經過平衡位置時，點子的速度達到最大值（絕對值）$|V|=\frac{2\pi}{T}A$；當偏離到兩端時$x=\pm A$，其速度等於零加速度相反，當點子經過平衡位置時，它等於零（這時力等於零）而偏離到兩端時，其絕對值達到最大值$|a|_{make}=\frac{4\pi^2}{T^2}A$。

振動點位移x，速度V及加速度a與時間的關係如圖7所示。

圖7示x,V及a與T的關係。

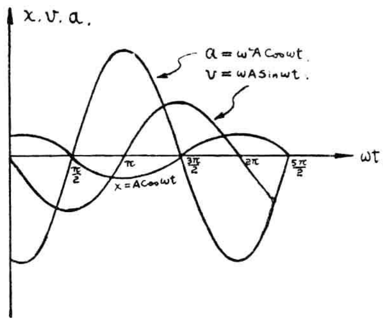

圖 7.

§195　決定振動的振幅及初位相

上面指出了，振動的振幅A及初位相φ由初起條件決定，即在起始t=o 時，由外界給定的系統的運動狀態已知的話，這兩個量就全決定了。設在起始t=o時，作諧振動的點子位移為x_0，速度為V_0。

位移x及速度V的方程式為

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$
$$V=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

當t=o時，其形式為：

$$x_0=A\cos\varphi\ ;\ \frac{V_0}{\omega}=A\sin\varphi$$

把上二式平方並逐次相加得：

$$x_0^2+\frac{V_0^2}{\omega^2}=A^2$$

由此振動的振幅為：

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{V_0^2}{\omega^2}}$$

以 $x_0 = A\cos\varphi$ 逐項除 $\frac{V_0}{\omega} = -A\sin\varphi$ 得振動的初位相：

$$tg\varphi = -\frac{V_0}{\omega x_0}。$$

在我們得到的方程式中振幅A及初位相φ由起始的位移x_0及起始速度V_0決定。因此，具有某種確定的質量的質點在同一個彈性力作用下，可作各種不同諧振動，具有不同的振幅和初位相。這是由初起條件決定的，但是，振動的週期却永遠是同樣的。例如重物掛在彈簧上振動時，振幅決定於運動開始前彈簧拉開了多遠，給了重物多大一個速度；振動的週期與振幅無關，依公式：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{h}}$$

它只由重物的質量及彈簧的彈性係數所決定。

根據上面講的振動的初位相決定於起始時間的選擇，例如，如以位移$x_0 = +A$ 的時候爲起始時間，那麼由公式

$$x_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega} = A^2$$

此時速度$V_0 = O$而根據下式：

$$tg\varphi = -\frac{V_0}{\omega x_0}$$

振動初位相　　$\varphi = O$

§196　諧振動的能量

在彈性力的作用下，無摩擦地作諧振動的質點，其總能量應保持不變。因爲這種系統是保守系統，即不會從外界得到能量也不會把能量給外界的。可以証明，在任何時間動能及位能之和永遠等於動能的最大值，即質點經過平衡位置$x = o$而所有的能量都集中於動能的形式的時候，它所具有的動能，或者等於偏離最大時（$x = A$）的位能的最大值。

設在力

$$f = -kx$$

的作用下，質量爲m的質點作着諧振動，上式中x是離開平衡位置的位移x，它由下式決定：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

作諧振動的質點具有速度V，因此具有動能：

$$W_k = \frac{1}{2}mV^2$$

振動質點的速度由下方程式決定：

$$V=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

把速度V的值代入動能的方程式中去就得：

$$W_k=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

除此之外，質點作着諧振動時還會具有位能。因為在不同的地方振動質點具有不同的速度，故其動能Wk是隨時間改變的。位能也隨時間改變。位能可用發生一定位移x的外力所作的功來量度。力學告訴了我們在壓縮彈簧之類的情形中，彈性力的功就等於$\frac{1}{2}kx^2$。這個功變成位能，而我們可把位能寫成如下的式子：

$$W\pi=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

根據我們得到的方程式，我們可得結論：當位能具有最大值，即在兩端偏離最大的時候，動能Wk有零值；經過平衡位置而位能等於零時，動能有最大值。

作振動的點子的總能量等於動能及位能之和：

$$W=W_k+W\pi=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)+\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

根據以前規定的符號$m\omega^2=k$，因此

$$W=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)+\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

由此得：

$$W=\frac{1}{2}kA^2$$

即總能量與振動的振幅A的平方及彈性係數k成正比。

上式又可寫成另一形式；因為：

$$k=m\omega^2=m\frac{4\pi^2}{T^2}=mA\pi^2V^2$$

所以

$$W=\frac{2\pi^2m}{T^2}A^2=2\pi^2mv^2A^2$$

諧振動的能量與振幅平方及角頻率平方成正比（或與週期平方成反比）。有同樣振幅的時候，能量隨着角頻率的增加而增加。

從以上的公式可得，在振動的任何時候，總的能量都是守恒的，根據能量守恒定律正是應為如此。相當最大位移的位置（$x=\pm A$）的地方，一切能量都化成了位能，通過平衡位置時（$x=o$），一切能量化成了動能，振動的點在其他一切的位置時，兩種形式能量都有。

振動時，能量不斷地由位能化成動能，又由動能化成位能。在一個振動週期T之內，能量有兩次完全化成動能Wk（兩次在平衡位置，$x=o$時），同時有兩次完全化成位能$W\pi$（在兩邊端點的位置時）。

§197 阻尼振動

到現在為止，我們研究的振動系統，其中的振動振幅是不變的。這種系統叫做保守系

統，其特點是系統的能量不會給予週圍的介質，也不會有能量由外界傳過來；振動的能量是不變的。這種振動叫做無阻尼振動。

然而，因爲阻力的緣故，實際上一切振動系統都要不斷地把它的能量的一部份給予週圍的介質，但是振動的能量是與振動的振幅平方成正比的：

$$W=\frac{1}{2}kA^2$$

因此振動的能量減少時，其振動的振幅也要隨時減少。不由外界獲得供給的振動要受到阻尼。

振幅隨時減少的這種形式的振動，叫做阻尼振動。

這樣看來，振動系統能量的損失是振動阻尼，卽振動振幅隨時減小的原因。顯然，系統能量消耗的快慢就決定了振動振幅減小的規律。

振動系統能量消耗有兩種方式：1） 因爲摩擦力存在，一般說來，由於振動能量化成了熱能或其他形式的能量而發生能量損失；2） 因爲輻射，卽能量給予了周圍介質，這時振動在周圍介質中以波的形式傳開了。

大多數情形下，兩種損失原因都有。因輻射而用掉的能量通常是有用的支出（很多振動系統就是爲此用的）；因摩擦而費掉的能量都是沒出息的損失。擺振動時能量只因摩擦而損失，音叉振動時能量損失用於克服音叉中金屬內部的摩擦，並用於在周圍介質中放出聲波。

在大多數情形下，振動的阻尼是因爲有阻帶力而發生的，例如擺振動時懸掛處有摩擦力或者介質有阻力。我們來看粘滯介質中的直線振動。介質的阻力決定於速度，當速度較小時，阻力可以認爲與速度成正比；阻力的方向與速度相反；因此可令阻力等於：

$$f_c=-\gamma V$$

這裡γ是一常數，它叫做阻力係數，V是點子運動的速度。

此力應加在彈性力$f_y=-kx$上，故作用在點子上的總力等於：

$$f=f_y+f_c=-kx-\gamma V$$

這就是說，牛頓第二定律可寫成如下的形式：

$$ma=-kx-\gamma V$$

或

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\gamma\frac{dx}{dt}-kx$$

這式子就是阻尼振動的微分方程式。

假設振動的振幅愈小的時候，它也就減小得愈慢之後，我們就可求得阻尼振動的公式。

這就是說，振幅減小的速度$\frac{dA}{dt}$與振幅式身的大小成正比，即：

$$\frac{dA}{dt}=-\delta A$$

此處δ是阻尼係數。負號指出振幅的改變是隨時間減小的。分離變數得：

$$\frac{dA}{A}=-\delta$$

積分上式得：

$$\int\frac{dA}{A}=-\int\delta dt\;;\qquad lnA=-\delta t+C.$$

積分常數C由初起條件決定：當t=o時，

$$A=A_0\qquad 而C=lnA_0，\qquad 故$$

$$lnA-lnA_0=\delta t\qquad 而\qquad A=A_0e^{-\delta t}$$

這裡e即自然對數的底。

從上式可得，阻尼振動振幅是隨時間指數地遞降的。t=o時，振幅$A=A_0$，然後t增加時振幅開始減小，當t=∞時，振幅A=O。

這樣，阻尼振動的形式爲：

$$x=A_0e^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi)$$

阻尼振動位移x和時間的關係如圖8所示：

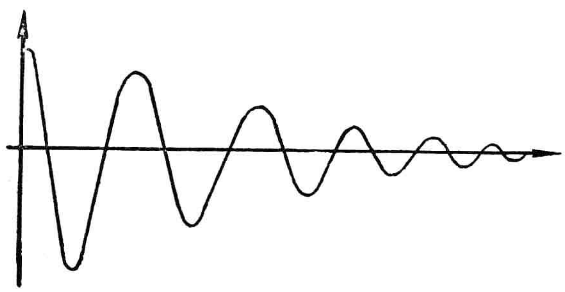

圖8. 阻尼振動

我們來看在時間t及t+T；彼此相隔一週期時，連接着的振幅爲A_1及A_2。根據阻尼振動的振幅方程式可以寫

$$A_1=A_0e^{-\delta t}\qquad A_2=A_0e^{-\delta(t+T)}$$

取 $\frac{A_1}{A_2}$ 之商而得

$$\frac{A_1}{A_2}=e^{\delta T}$$

這比值的自然對數等於：

$$\theta = ln\frac{A_1}{A_2} = \delta T$$

阻尼係數與振動週期的乘積等於連接兩次振幅之比的自然對數，它叫做阻尼的對數減縮。通常這個量就用來衡量阻尼。常常也用振幅減小到t=o時初振幅的 e 分之一所需的時間來衡量阻尼，這個量等於

$$\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{T}{\theta},$$

它叫做弛豫時間。

根據公式

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

只有當時間是 $t=\infty$ 時，振動才會完全停止下來。實際上經過一段有限的時間之後振動就停下來了，因爲當振幅和原子的大小同數量級時，整個的統觀系統，就不可能振動了。

有阻尼的時候給系統能量而使它離開平衡位置時，能量要反抗摩擦力作功而慢慢地消耗掉。要維持無阻尼的振動需要不斷地從外界供給系統以能量。

有了摩擦力就阻礙了運動，因此就增大了振動的週期。如果摩擦很大，那麼物體連作一次振動也根本來不及，這時就不會有振動發生，物體只是慢慢地回到它原來的位置。這種運動叫做非週期運動。

§198 强迫振動共振

到現在爲止，我們研究的是只有在內力作用下振動系統的自由振動。開始振動的瞬刻以後，外力就停止作用了；外力給了系統若干能量，這些能量或者是保持不變（無阻尼振動）或者是逐漸地消耗了（阻尼振動）。這種振動的頻率也就叫做自由振動頻率。沒有阻尼的自由振動叫做固有振動，共頻率叫做固有頻率。各系統裡這種振動頻率只與該系統本身性質（質量，彈性力及阻力）有關係。

現在假設任何時間都有某種週期的外力對系統作用。其功可以週期地抵消，因摩擦及輻射而致之能量損失。在這種情形下振動頻率不僅和此系統本身性質有關，而且與使系統發生振動的外力之改變頻率有關。此時系統將長久地振動，這種振動叫强迫振動，因爲我們的系統是在外力强迫之下作此種振動。

擴音器振動膜的振動頻率是由電磁鐵中通過的交流週數決定的，這就是强迫振動系統的一個例子。

作用於系統的週期性的外力做了兩件事情：1）推動系統而給它一定的能量，2）其功補償了能量消耗而維持着振動。

受制於外力的系統的振動頻率即此外力的頻率。然而此種頻率爲强迫頻率的强迫振動並不能立刻就建立起來。起始時，系統受到了一個推動（或初衝擊），這就使得系統除了强迫振動之外還要作自由振動。因此，在起始的階段系統作着自由振動，但其上又疊加了一個强迫振動。如果阻尼係數不大，那麼自由振動頻率由下式决定：

$$\omega_0=\sqrt{\frac{K}{m}},$$

這裡k是彈性系數而m是系統的質量。

因爲自由振動振幅是隨時間減少的，所以過了一段不長的時間（叫做穩定時間）之後，自由振動實際上就停止了，只剩下强迫振動。

設振動質點的質量爲m，其上另有一週期力作用。例如把一重物掛在彈簧上，再每隔同樣的一段時間之後推它一下。我們現在假設附加的强迫力f_b是隨時間按照餘弦規律變化的：

$$f_b=A_0\cos\omega t$$

這裡F_0是强迫力振幅，ω是其角頻率，它可爲任意值。

爲了簡單起見，我們認爲阻尼不存在（$\delta=o$）。在此情形下系統上有兩力作用：彈性力（恢復力）$f_y=-kx$和外加的强迫力$f_c=F_0\cos\omega t$。

此時作用於系統的總力爲：

$$f=f_y+f_c$$

根據牛頓第二運動定律可以寫：

$$ma=-kx+F_0\cos\omega t$$

以前講過，振動的加速度爲

$$a=-\omega^2x$$

故我們的方程式可寫成：

$$-m\omega^2x=-kx+F_0\cos\omega t$$

由此

$$X=\frac{F_0}{K-m\omega^2}\cos\omega t$$

彈性係數k與固有振動頻率ω_0之間的關係有下式：

$$k=m\omega_0^2$$

把此式代入位移x的方程式就得：

$$X=\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t$$

由此得强迫振動振幅等於：

$$A=\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega)^2}$$