

泰山文庫
中等學校適用教本

漢譯

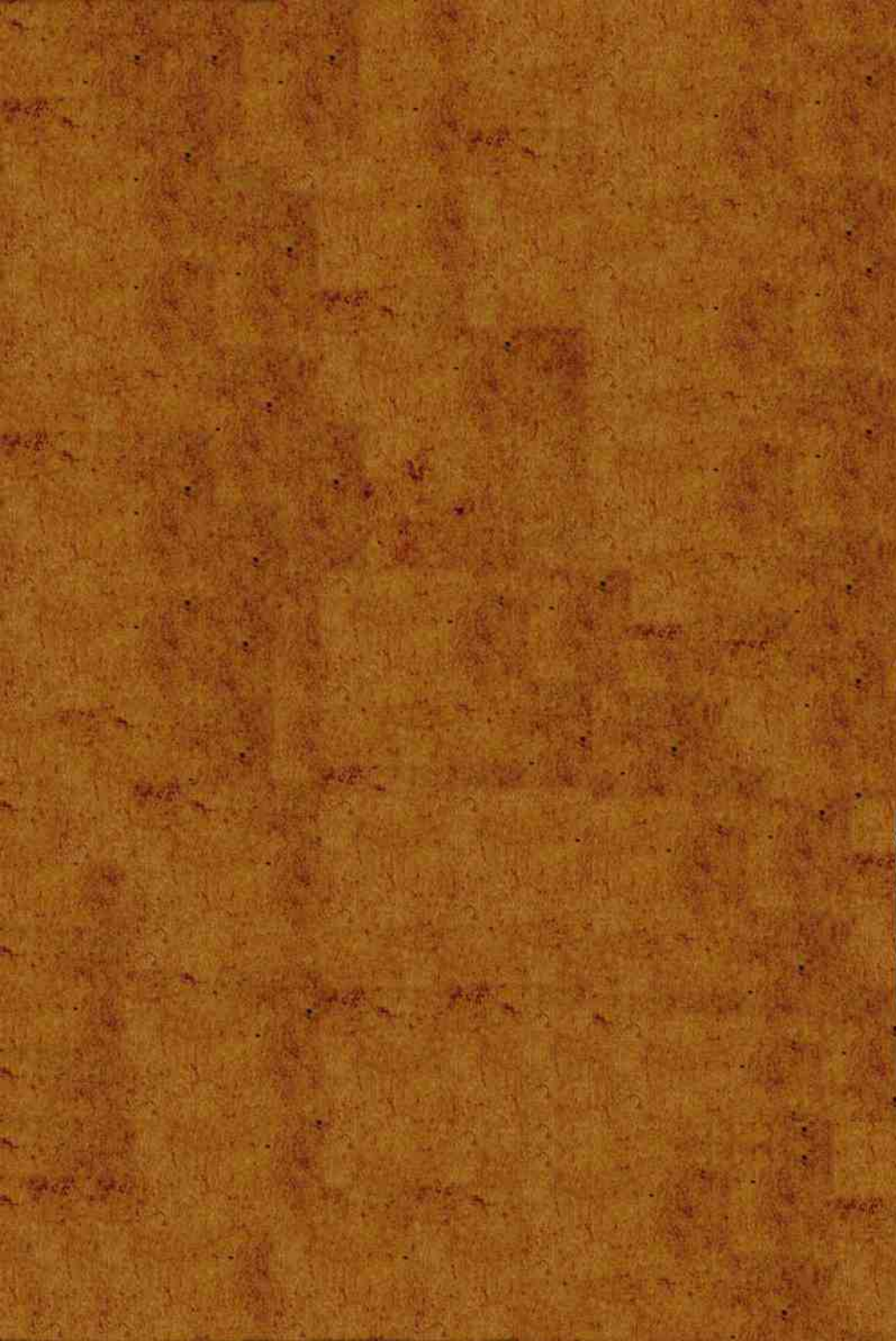
葛氏平面三角學

PLANE TRIGONOMETRY
GRANVILLE

程漢卿譯

學書局出版

1039



貴州省立圖書館
本教用
漢譯

葛氏平面三角學

程漢卿譯

科學書局出版

例 言

1. 本書係美國近世著名數學家 W. A. Granville 博士所著，出版以來，非特風行全美，即在我國各學校中，亦皆採作教本，譯者於課餘之暇，特譯成中文，庶斯書更廣其用也。
2. 本書與教育廳所頒布普通科課程標準，以及最近江蘇教育廳所頒佈之高中算學進度表，亦皆適合。
3. 本書之優點甚多，茲略舉之如下：
 - a. 選材取捨，斟酌至當，對理論實用均所顧及。
 - b. 教材排列，能適合學習心理；深淺得宜，使學者易於領會而純熟。
 - c. 定義正確，說理詳明，系統嚴正，解釋簡賅，易教易學。
 - d. 所採用之習題，均極豐富無比；而應用問題，尤概括近代實用問題之要，於學者實最能引起研究三角學之興味。
4. 本書重要文句，概用黑體字或波紋線，以示着重而醒眉目。
5. 譯者才疏學淺，文辭拙陋，且又初版印刷，謬誤之處，恐所難免，深冀海內高明，不吝金玉，俾得隨時修改，不勝感幸！

民國八年二月 程漢卿序於上海

葛氏平面三角學目錄

第一章

銳角三角函數，直角三角形解法

節數		頁數
1.	銳角三角函數之定義	1
2.	$45^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ 之各函數	4
3.	直角三角形之解法	7
4.	解直角三角形之普通方法	8
5.	等腰三角形之解法	13
6.	正多邊形之解法	15
7.	插入法	16
8.	三角問題中通用之名詞	21

第二章

任意角之三角函數

9.	角之形成	27
10.	正負角	27
11.	任意角之大小	27
12.	四象限	28
13.	平面上一點之直坐標	29
14.	點與原點之距離	30
15.	任意角三角函數之定義	30
16.	三角函數之代數符號	32
17.	已知三角函數之值，求合於已知各角，及其餘角之各函數值	32
18.	以一三角函數表示其餘之五函數	37

19.	三角函數之直線定義	40
20.	因角之改變，函數值所起變化	42
21.	角之計算法	46
22.	弧角之計算法	46
23.	化三角函數爲銳角之函數	50
24.	餘角之函數	50
25.	第二象限內各角函數之化法	51
26.	第三象限內各角函數之化法	55
27.	第四象限內各角函數之化法	58
28.	負角諸函數之化法	60
29.	化任何角之諸函數爲銳角函數之通則	62

第三章

三角函數相互之關係

30.	函數間之基本關係	66
31.	任一函數以其餘五函數表示	67

第四章

三角分析

32.	兩角之和和二角之差之諸函數	71
33.	兩角和之正弦及餘弦	71
34.	兩角差之正弦及餘弦	75
35.	兩角和及差之正切及餘切	77
36.	以一角之函數表其二倍該角之函數	80
37.	倍角之函數	80
38.	一角之函數以其半角之函數表之	82
39.	一角之餘弦表其半角之函數	83
40.	函數之和及差	84

41. 三角恆等式.....	87
----------------	----

第 五 章

角之通值, 逆三角函數, 三角方程式

42. 角之通值.....	93
43. 同正弦或同餘割之角之通值.....	93
44. 同餘弦或同正割之角之通值.....	95
45. 同正切或同餘切之角之通值.....	96
46. 逆三角函數.....	99
47. 三角方程式.....	105
48. 解三角方程式之普通解法.....	105

第 六 章

三角函數之各示法

49. 變數.....	110
50. 常數.....	110
51. 函數.....	110
52. 函數之圖形.....	110
53. 三角函數之圖形.....	112
54. 三角函數之週期.....	114
55. 應用單位圓書三角函數之圖形.....	114

第 七 章

斜三角形之解法

56. 三角形邊與角之關係.....	110
57. 正弦定律.....	120
58. 兩解之情形.....	122
59. 餘弦定律.....	128

60.	正切定律.....	132
61.	三角之半角函數，以邊表之.....	134
62.	求斜三角形面積之公式.....	139

第八章

對數之理論與用法

63.	三角學上對數之需要.....	142
64.	對數之性質.....	144
65.	常用對數.....	148
66.	決定對數首數之法則.....	149
67.	對數表.....	153
68.	自第一表求一數之對數.....	154
69.	求一已知對數之相當真數.....	159
70.	計算對數之用法.....	160
71.	餘對數.....	163
72.	對數底之變換法.....	165
73.	指數方程.....	167
74.	三角函數對數表之用法.....	169
75.	第二表之用法，其角以若干度或若干分表示者.....	170
76.	求一角函數之對數.....	171
77.	已知某函數對數而求其相當銳角之若干度及若干分.....	173
78.	表III之用法，已知角或所求角表以度及度之小數表之者.....	177
79.	求一角之函數之對數.....	177
80.	已知某函數對數而反求其相當銳角之度數及度之小數值.....	179
81.	用對數解直角三角形.....	182

82. 用對數解斜三角形.....	190
第一類, 已知二角及一邊	190
第二類, 已知兩邊及任一邊之對角(兩解情形).....	190
第三類, 已知兩邊及其夾角	190
第四類, 已知三邊	190
83. 用對數求一斜三角形之面積.....	206
84. 陸地面積之測量法.....	210
85. 平行航行.....	211
86. 平面航行.....	212
87. 中緯航海.....	214

第 九 章

近於 0° 及 90° 之銳角

88. 則 $\frac{\sin x}{x}, \frac{\tan x}{x}$ 二比漸近於 1 為極限.....	216
89. 近於 0° 及 90° 之正銳角之諸函數.....	217
90. 求近於 0° 各銳角諸函數之法則	218
91. 求近於 90° 各銳角函數之法則	219
92. 求近於 0° 及 90° 各角函數之對數之法則	220
93. 確實測量與計算	221

第 十 章

公 式 集 要

94. 平面三角學之公式表.....	228
--------------------	-----

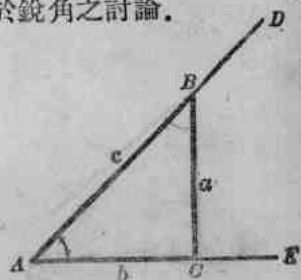
平面三角學

第一章

銳角三角函數，直角三角形解法

1. 銳角三角函數之定義。二線交角之觀念，在初等平面幾何學中已經詳述，諒學者業已深悉，茲先限於銳角之討論。

設 $\angle EAD$ 為一小於 90° 之銳角，自其邊上任一點 B ，作他邊之垂直線，則當成一直角三角形 ABC 。而以大楷字母 A, B, C 表各角，小楷字母 a, b, c 表其相當對邊之長度（註）。由幾何學已知三角形之邊及角有相互關係，三角學為表明此關係之實在情形，因而採用各邊之比，此諸比即謂之三角函數。（Trigonometric



Function) 任一銳角 A 之六函數表明如下：

$\sin A$	讀為 “ A 之正弦”，	<i>Sine</i>
$\cos A$	讀為 “ A 之餘弦”，	<i>Cosine</i>
$\tan A$	讀為 “ A 之正切”，	<i>Tangent</i>
$\csc A$	讀為 “ A 之餘割”，	<i>Cosecant</i>
$\sec A$	讀為 “ A 之正割”，	<i>Secant</i>
$\cot A$	讀為 “ A 之餘切”，	<i>Cotangent</i>

（註）除另有說明外，直角三角形之斜邊，常以小楷字母 c 表之，而以大楷字母 C 表直角。

此六三角函數(比)之定義如下(圖中):

$$\begin{aligned} (1) \sin A &= \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} \left(= \frac{a}{c} \right), & (4) \csc A &= \frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}} \left(= \frac{c}{a} \right), \\ (2) \cos A &= \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}} \left(= \frac{b}{c} \right), & (5) \sec A &= \frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}} \left(= \frac{c}{b} \right), \\ (3) \tan A &= \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}} \left(= \frac{a}{b} \right), & (6) \cot A &= \frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}} \left(= \frac{b}{a} \right). \end{aligned}$$

此等函數中之任一函數之數值，恆因 A 角之大小而變化，與所取 B 點之位置無涉(註)。

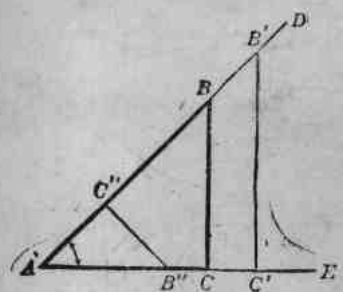
斯諸函數(比)為研究三角學之基礎，實則如對上列六定義不能澈底了解，欲求三角學之進展，勢所不能；學者若注意第一行之三函數各與所對第二行之三函數互為倒數，則六函數庶易於記憶，因，

$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{a}{c} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\csc A}, & \csc A &= \frac{c}{a} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{1}{\sin A}, \\ \cos A &= \frac{b}{c} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{1}{\sec A}, & \sec A &= \frac{c}{b} = \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{1}{\cos A}, \\ \tan A &= \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\cot A}, & \cot A &= \frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{\tan A}. \end{aligned}$$

(註)設 B' 為 AD 上之另一點，及 B'' 在 AE 上之任一點，作 AE ， AD 之垂線於 $B'C'$ ， $B''C''$ ，則三個三角形 ABC ， $AB'C'$ ， $AB''C''$ 為互等角，蓋一直角及一公共角，故此諸三角形相似，而得

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''}.$$

但此等比均為 A 角之正弦，同理可證得其他函數亦皆如是，此即祇表明各邊之相對關係，而與所擇直角三角形之大小及各邊之實際長度無關，學者尚須注意，當 A 角之大小有變動時，各比之值均隨之而變化。



據(1)至(6)之定義得銳角 B 諸函數如下：

$$\sin B = \frac{b}{c}; \quad \csc B = \frac{c}{b};$$

$$\cos B = \frac{a}{c}; \quad \sec B = \frac{c}{a};$$

$$\tan B = \frac{b}{a}; \quad \cot B = \frac{a}{b}.$$

再與 A 角諸函數比較，則得

$$\sin A = \cos B, \quad \csc A = \sec B,$$

$$\cos A = \sin B, \quad \sec A = \csc B,$$

$$\tan A = \cot B, \quad \cot A = \tan B.$$

因 $A+B=90^\circ$ (即 A 與 B 互為餘角) 故上列結果述之如下：

定理. 銳角之任一函數，等於其餘角之相當餘函數(註)。

例題1. 在直角三角形內， $a=3$ ， $b=4$ 。求 A 角之各函數。

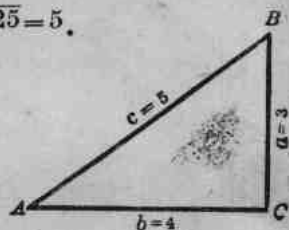
解法. $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ 。

應用第二頁(1)至(6)諸式，得

$$\sin A = \frac{3}{5}; \quad \csc A = \frac{5}{3};$$

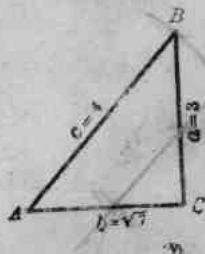
$$\cos A = \frac{4}{5}; \quad \sec A = \frac{5}{4};$$

$$\tan A = \frac{3}{4}; \quad \cot A = \frac{4}{3}.$$



試再求 B 角之諸函數，且比較其結果。

例題2. 在直角三角形內， $a=3$ ， $c=4$ ，求 B 角之各函數。



解法. $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$ 。

$$\sin B = \frac{\sqrt{7}}{4}; \quad \csc B = \frac{4}{\sqrt{7}};$$

$$\cos B = \frac{3}{4}; \quad \sec B = \frac{4}{3};$$

$$\tan B = \frac{\sqrt{7}}{3}; \quad \cot B = \frac{3}{\sqrt{7}}.$$

[註] 正弦與餘弦，正切與餘切；正割與餘割互稱為餘函數。

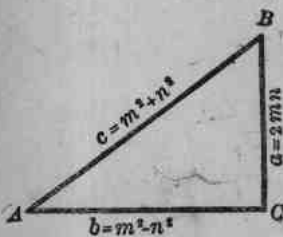
試再求 A 角之諸函數，且比較其結果。

例題3. 在直角三角形內， $a=2mn$ ， $b=m^2-n^2$ ，求 A 角之各函數。

解法。

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4m^2n^2 + m^4 - 2m^2n^2 + n^4}$$

$$= \sqrt{m^4 + 2m^2n^2 + n^4} = m^2 + n^2$$



$$\sin A = \frac{2mn}{m^2 + n^2}; \quad \csc A = \frac{m^2 + n^2}{2mn};$$

$$\cos A = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}; \quad \sec A = \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2};$$

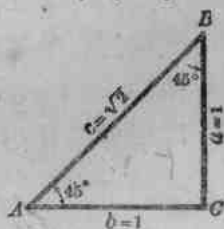
$$\tan A = \frac{2mn}{m^2 - n^2}; \quad \cot A = \frac{m^2 - n^2}{2mn}.$$

例題4. 在直角三角形內，已知 $\sin A = \frac{4}{5}$ 及 $a=80$ ，求 c 。

解法。自第二頁公式(1) $\sin A = \frac{a}{c}$ 。

以 $\sin A = \frac{4}{5}$ ， $a=80$ 代入，則得 $\frac{4}{5} = \frac{80}{c}$ ，

解之得 $c=100$ 。 答。



2. $45^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ 之各函數 此等角為最常用於三角學諸問題中，故求其三角函數之值及記憶其結果，頗為重要。

(a) 求 45° 之諸函數。

作一等腰直角三角形 ABC ，則 $\angle A = \angle B = 45^\circ$ 。

因三角函數皆係兩邊相互之比，而與各邊實在長度無關，故可任意選定合等腰直角三角形之邊長。

設以短邊之長度為單位，即使 $a=1$ ，及 $b=1$ 。則

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}, \quad \text{而得}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\csc 45^\circ = \sqrt{2};$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \sec 45^\circ = \sqrt{2};$$

$$\tan 45^\circ = 1; \quad \cot 45^\circ = 1.$$

(b) 求 30° 及 60° 之諸函數。

作一等邊三角形 ABD ，自 B 作 BC 垂直 AD ，則知三角形 ABC 內
 $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ 。

再令最短邊為單位長，即使 $b = 1$ 。則

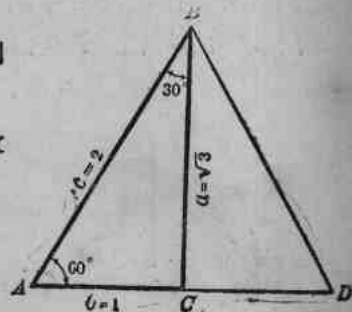
$$c = AB = AD = 2AC = 2b = 2,$$

及 $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$ 。故

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \quad \sec 60^\circ = 2;$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}; \quad \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



同理在同一三角形，則得

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \quad \csc 30^\circ = 2;$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cot 30^\circ = \sqrt{3}.$$

茲將此重要結果列表於下(註)：

角	30°	45°	60°
$\sin$	$\frac{1}{2} = .50$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = .71 +$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = .86 +$
$\cos$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = .86 +$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = .71 +$	$\frac{1}{2} = .50$
$\tan$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = .57 +$	1	$\sqrt{3} = 1.73 +$

[註] 為便利記憶計，可謂第一列(或正弦列)乃 $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 及被 2 除
 第二列(或餘弦列)為第一列次序之反。第三列(或正切列)可以第
 二列各數，除第一列各相當數而得。

餘割，正割，餘切順次各為正弦，餘弦正切之倒數，學者注意此點。前函數易於記憶。

學者對於 45° ， 30° ， 60° 之直角三角形，應熟知之，自此種想像之形，可直接求得此諸角之函數值，而不必記憶前表。

例題5. 在直角三角形內，已知 $A=60^\circ$ ， $a=100$ ，求 c 。

解法 因 A 角之正弦含有 a 邊，既知 A 角（則知 A 角之任何函數）及 a 邊，則所求之 c 邊，可用下公式即得：

$$\sin A = \frac{a}{c} \quad \text{自第二頁(1),}$$

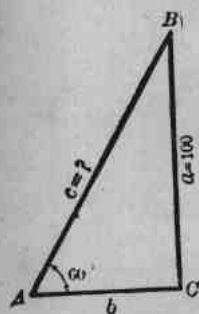
$$\text{以 } a=100, \sin A = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{自上表})$$

$$\text{代入, 得 } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{100}{c}.$$

化簡分數後求 c ，得

$$c = \frac{200}{\sqrt{3}} = \frac{200}{1.7} = 117.6+. \quad \text{答}$$

B 之值為何？如上法續解上題，得 $b=58.8+$ 。



習 題 一

在下列各習題中皆為直角三角形。

1. 已知 $a=8$ ， $b=15$ 求 A 角之諸函數。

$$\text{答 } \sin A = \frac{8}{17}, \cos A = \frac{15}{17}, \tan A = \frac{8}{15} \text{ 等.}$$

2. 已知 $a=5$ ， $c=7$ 求 B 角之諸函數。

$$\text{答 } \sin B = \frac{\sqrt{24}}{7}, \cos B = \frac{5}{7}, \tan B = \frac{\sqrt{24}}{5} \text{ 等.}$$

3. 已知 $b=2$ ， $c=\sqrt{11}$ ，求 A 角之諸函數。

$$\text{答 } \sqrt{\frac{7}{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ 等.}$$

4. 已知 $a=40$ ， $c=41$ ，求 B 角之諸函數。

答 $\frac{9}{41}, \frac{40}{41}, \frac{9}{40}$ 等。

5. 已知 $a=p, b=q$, 求 A 角之諸函數。

答 $\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}, \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}, \frac{p}{q}$ 等。

6. 已知 $a=\sqrt{m^2+mn}, c=m+n$; 求 A 角之諸函數。

答 $\frac{\sqrt{m^2+mn}}{m+n}, \frac{\sqrt{mn+n^2}}{m+n}, \sqrt{\frac{m}{n}}$ 等。

7. 已知 $a=\sqrt{m^2+n^2}, c=m+n$; 求 B 角之諸函數。

答 $\frac{\sqrt{2mn}}{m+n}, \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m+n}, \sqrt{\frac{2mn}{m^2+n^2}}$ 等。

8. 已知 $\sin A = \frac{3}{5}, c = 200.5$; 求 a . 答 120.3.

9. 已知 $\cos A = .44, c = 30.5$; 求 b . 答 13.42.

10. 已知 $\tan A = \frac{11}{3}, b = \frac{27}{11}$; 求 c . 答 $\frac{9}{11}\sqrt{130}$.

11. 已知 $A=30^\circ, a=25$; 求 c, B 及 b .

答 $c=50, B=60^\circ, b=25\sqrt{3}$.

12. 已知 $B=30^\circ, c=48$; 求 b, A 及 a .

答 $b=24, A=60^\circ, a=24\sqrt{3}$.

13. 已知 $B=45^\circ, b=20$; 求 c, A 及 a .

答 $c=20\sqrt{2}, A=45^\circ, a=20$.

3. 直角三角形之解法.

任一三角形皆為六部分所組成，即三邊及三角。所謂解三角形者，即求其未知部分也；此六部分中若已知其三，則此三角形自能解決，惟所知三部分中，至少有一邊(註)。但在直角三角形已知二邊，或一邊一銳角，而此形自能解決矣，三角學(註)。之最要應用，乃三角形之解法，今先討論直角三角形之解法。

(註一)假定其已知條件為合理，即可由已知部份作一三角形。

(註二)三角學之原名乃自二希臘字所演譯，其意謂“量一三角形”。

學者宜注意上節習題11, 12, 13, 即解直角三角形之問題。

學者在初習三角學時, 宜作一關於問題之圖, 愈準確愈妙, 此不僅易於了解問題本身, 尤能明瞭三角函數之意義, 而大致驗得所得結果之確否, 因此所需之儀器即分度尺及量角規。

4. 解直角三角形之普通方法。

第一步 作正確之圖形代表問題中之三角形。

第二步 設已知一銳角, 則自 90° 減之, 即得他一銳角。

第三步 求未知部分, 須自第一節之(1)至(6)擇一含未知部分及二已知部分之公式, 然後以解其未知部分。

第四步 欲核算所得之數值, 是否適合第三步以外之他項關係, 下列之相互關係, 最適宜於數值之核算:

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c+b)(c-b)$$

但較大之錯誤可用測量法察出。

以直角三角形之兩垂直邊爲底, 高, 即得

$$\text{直角三角形之面積} = \frac{ab}{2}.$$

在前節已得 30° , 45° , 60° 之函數, 進而討論求得任一角之函數, 今以下頁自 0° 至 90° 之三角函數之四位或五位表(註), 預料其結果; 欲求 0° 至 45° 之一角之函數, 先於首列查出此角, 而所求之函數值, 即此函數之頂標題之行與角度之列相交處; 列如

$$\sin 15^\circ = .2588,$$

$$\cot 41^\circ = 1.1504 \text{ 等}.$$

同理, 欲求 45° 至 90° 之一角之函數, 先於末列查出此角, 而所求之函數值, 即此函數之底標題之列與角之行與相交處; 例如

$$\cos 64^\circ = .4384,$$

$$\sec 85^\circ = 11.474 \text{ 等}.$$

(註)亦名爲三角函數之自然數值, 以別於其對數(閱葛氏四位對數表之II, III兩表)。