泰山文具社

中等學校適用教本

漢譯

葛氏平面三角學

PLANE TRIGONOMETRY

GRANVILLE

[illegible]

[illegible]學書局出版

1939

用教本

漢譯

葛氏平面三角學

程漢卿譯

科學書局出版

例　言

1. 本書係美國近世著名數學家 W. A. Granville 博士所著，出版以來，非特風行全美，卽在我國各學校中，亦皆採作敎本，譯者於課餘之暇，特譯成中文，庶斯書更廣其用也.

2. 本書與教育廳所頒布普通科課程標準，以及最近江蘇敎育廳所頒佈之高中算學進度表，亦皆適合.

3. 本書之優點甚多，玆略舉之如下:

   a. 選材取捨，斟酌至當，對理論實用均所顧及.

   b. 敎材排列，能適合學習心理；深淺得宜，使學者易於領會而純熟.

   c. 定義正確，說理詳明，系統嚴正，解釋簡賅，易敎易學.

   d. 所採用之習題，均極豐富無比；而應用問題，尤概括近代實用問題之要，於學者實最能引起研究三角學之興味.

4. 本書重要文句，概用黑體字或波紋線，以示着重而醒眉目.

5. 譯者才疏學淺，文辭拙陋，且又初版印刷，謬誤之處，恐所難免，深冀海內高明，不吝金玉，俾得隨時修改，不勝感幸!

民國念八年二月　　程漢卿序於上海

葛氏平面三角學目錄

第一章
銳角三角函數，直角三角形解法

節數　　頁數

第二章
任意角之三角函數

第三章

三角函數相互之關係

第四章

三角分析

第五章

角之通值，逆三角函數，三角方程式

第六章

三角函數之各示法

第七章

斜三角形之解法

第八章

對數之理論與用法

第九章

近於 0° 及 90° 之銳角

第十章

公式集要

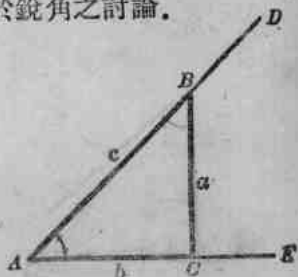
平面三角學

第一章

銳角三角函數，直角三角形解法

1. 銳角三角函數之定義. 二線交角之觀念，在初等平面幾何學中已經詳述,諒學者業已深悉,玆先限於銳角之討論.

設EAD為一小於90°之銳角，自其邊上任一點B,作他邊之垂直線，則當成一直角三角形ABC.而以大楷字母A,B,C表各角，小楷字母a,b,c表其相當對邊之長度(註).由幾何學已知三角形之邊及角有相互關係，三角學為表明此關係之實在情形，因而採用各邊之比，此諸比卽謂之三角函數.(*Trigonometric Function*)任一銳角A之六函數表明如下：



$\sin A$	讀為	"A之正弦",	*Sine*
$\cos A$	讀為	"A之餘弦",	*Cosine*
$\tan A$	讀為	"A之正切",	*Tangent*
$\csc A$	讀為	"A之餘割",	*Cosecant*
$\sec A$	讀為	"A之正割",	*Secant*
$\cot A$	讀為	"A之餘切",	*Cotangent*

〔註〕除另有說明外，直角三角形之斜邊，常以小楷字母c表之，而以大楷字母C表直角.

此六三角函數(比)之定義如下(圖中):

(1) $\sin A=\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}\left(=\frac{a}{c}\right)$, (4) $\csc A=\frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}\left(=\frac{c}{a}\right)$,

(2) $\cos A=\frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}\left(=\frac{b}{c}\right)$, (5) $\sec A=\frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}\left(=\frac{c}{b}\right)$,

(3) $\tan A=\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}\left(=\frac{a}{b}\right)$, (6) $\cot A=\frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}\left(=\frac{b}{a}\right)$.

此等函數中之任一函數之數值,恆因A角之大小而變化,與所取B點之位置無涉(註).

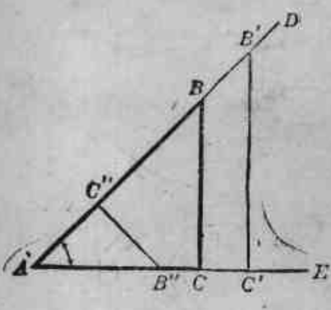
斯諸函數(比)爲研究三角學之基礎,實則如對上列六定義不能澈底了解,欲求三角學之進展,勢所不能;學者若注意第一行之三函數各與所對第二行之三函數互爲倒數,則六函數庶易於記憶.因,

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{1}{\csc A},\qquad \csc A=\frac{c}{a}=\frac{1}{\frac{a}{c}}=\frac{1}{\sin A},$$

$$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{1}{\frac{c}{b}}=\frac{1}{\sec A},\qquad \sec A=\frac{c}{b}=\frac{1}{\frac{b}{c}}=\frac{1}{\cos A},$$

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{b}{a}}=\frac{1}{\cot A},\qquad \cot A=\frac{b}{a}=\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{1}{\tan A}.$$

〔註〕設B'爲AD上之另一點,及B''在AE上之任一點,作AE, AD之垂線於$B'C'$, $B''C''$.則三個三角形ABC, $AB'C'$, $AB''C''$爲互等角,蓋一直角及一公共角,故此諸三角形相似,而得



$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}.$$

但此等比均爲A角之正弦,同理可證得其他函數亦皆如是,此即祇表明各邊之相對關係,而與所擇直角三角形之大小及各邊之實際長度無關.學者尚須注意,當A角之大小有變動時,各比之值均隨之而變化.

據(1)至(6)之定義得銳角 B 諸函數如下：

$$\sin B=\frac{b}{c};\qquad \csc B=\frac{c}{b};$$
$$\cos B=\frac{a}{c};\qquad \sec B=\frac{c}{a};$$
$$\tan B=\frac{b}{a};\qquad \cot B=\frac{a}{b}.$$

再與 A 角諸函數比較，則得

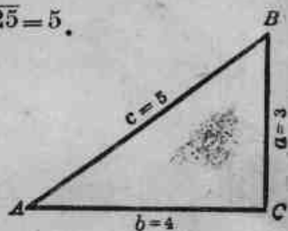
$$\sin A=\cos B,\qquad \csc A=\sec B,$$
$$\cos A=\sin B,\qquad \sec A=\csc B,$$
$$\tan A=\cot B,\qquad \cot A=\tan B.$$

因 $A+B=90^\circ$ (卽A與B互爲餘角)故上列結果述之如下：

定理. 銳角之任一函數，等於其餘角之相當餘函數(註).

例題1. 在直角三角形內，$a=3$，$b=4$. 求A角之各函數.

解法. $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$

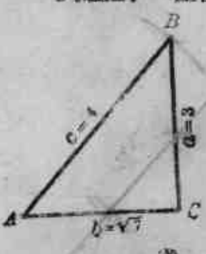


應用第二頁(1)至(6)諸式，得

$$\sin A=\tfrac{3}{5};\qquad \csc A=\tfrac{5}{3};$$
$$\cos A=\tfrac{4}{5};\qquad \sec A=\tfrac{5}{4};$$
$$\tan A=\tfrac{3}{4};\qquad \cot A=\tfrac{4}{3}.$$

試再求B角之諸函數，且比較其結果.

例題2. 在直角三角形內，$a=3$，$c=4$，求B角之各函數.



解法. $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}.$

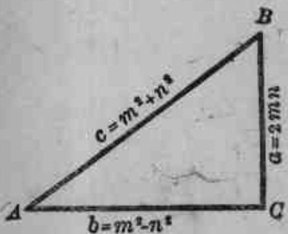
$$\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4};\qquad \csc B=\frac{4}{\sqrt{7}};$$
$$\cos B=\frac{3}{4};\qquad \sec B=\frac{4}{3};$$
$$\tan B=\frac{\sqrt{7}}{3};\qquad \cot B=\frac{3}{\sqrt{7}}.$$

〔註〕正弦與餘弦，正切與餘切；正割與餘割互稱爲餘函數.

試再求A角之諸函數，且比較其結果.

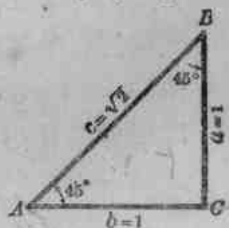
例題3. 在直角三角形內，$a=2mn$，$b=m^2-n^2$.求A角之各函數.

解法.
$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4m^2n^2+m^4-2m^2n^2+n^4}$$
$$=\sqrt{m^4+2m^2n^2+n^4}=m^2+n^2.$$



$$\sin A=\frac{2mn}{m^2+n^2};\quad \csc A=\frac{m^2+n^2}{2mn};$$
$$\cos A=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2};\quad \sec A=\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2};$$
$$\tan A=\frac{2mn}{m^2-n^2};\quad \cot A=\frac{m^2-n^2}{2mn}.$$

例題4. 在直角三角形內，已知 $\sin A=\frac{4}{5}$ 及 $a=80$，求 c.



解法. 自第二頁公式(1)　$\sin A=\frac{a}{c}$.

以 $\sin A=\frac{4}{5}$，$a=80$ 代入，則得 $\frac{4}{5}=\frac{80}{c}$，

解之得　　$c=100$.　答.

2. 45°, 30°, 60° 之各函數

此等角爲最常用於三角學諸問題中，故求其三角函數之值及記憶其結果，頗爲重要.

(a) 求45°之諸函數.

作一等腰直角三角形 ABC，則 $\angle A=\angle B=45°$.

因三角函數皆係兩邊相互之比，而與各邊實在長度無關，故可任意選定合等腰直角三角形之邊長.

設以短邊之長度爲單位，即使 $a=1$，及 $b=1$. 則

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2},\quad \text{而得}$$

$$\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}};\qquad \csc 45°=\sqrt{2};$$

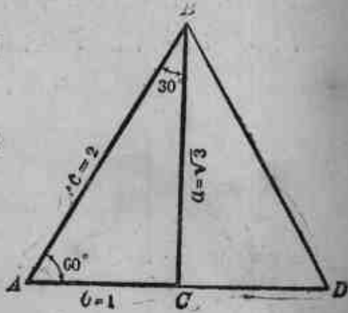
$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}; \qquad \sec 45^\circ = \sqrt{2};$$

$$\tan 45^\circ = 1; \qquad \cot 45^\circ = 1.$$

(b) 求30°及60°之諸函數.

作一等邊三角形ABD,自 B 作BC垂直AD,則知三角形 ABC內

$$\angle A = 60^\circ, \quad \angle ABC = 30^\circ.$$



再令最短邊為單位長,卽使$b=1$. 則

$$c = AB = AD = 2AC = 2b = 2,$$

及 $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$. 故

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \quad \sec 60^\circ = 2;$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}; \quad \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

同理在同一三角形,則得

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \qquad \csc 30^\circ = 2;$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad \cot 30^\circ = \sqrt{3}.$$

玆將此重要結果列表於下(註):

角	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2} = .50$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = .71+$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = .86+$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2} = .86+$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = .71+$	$\frac{1}{2} = .50$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}} = .57+$	1	$\sqrt{3} = 1.73+$

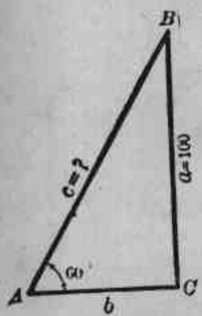
〔註〕為便利記憶計,可謂第一列(或正弦列)乃$\sqrt{1}$,$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$及被2除第二列(或餘弦列)為第一列次序之反.第三列(或正切列)可以第二列各數,除第一列各相當數而得.

餘割，正割，餘切順次各爲正弦，餘弦正切之倒數，學者注意此點．前函數易於記憶．

學者對於 $45°$，$30°$，$60°$ 之直角三角形，應熟知之，自此種想像之形，可直接求得此諸角之函數值，而不必記憶前表．

例題5. 在直角三角形內，已知 $A=60°$，$a=100$，求c．

解法 因A角之正弦含有a邊，既知A角(則知A角之任何函數)及a邊，則所求之c邊，可用下公式卽得：



$$\sin A=\frac{a}{c}.\quad \text{自第二頁(1)，}$$

以$a=100$，$\sin A=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$(自上表)

代入，得 $$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{100}{c}.$$

化簡分數後求c，得

$$c=\frac{200}{\sqrt{3}}=\frac{200}{1.7+}=117.6+.\qquad \text{答}$$

B之値爲何？如上法續解上題，得 $b=58.8+$．

習　題　一

在下列各習題中皆爲直角三角形．

1. 已知$a=8$，$b=15$求A角之諸函數．

答 $\sin A=\frac{8}{17}$，$\cos A=\frac{15}{17}$，$\tan A=\frac{8}{15}$ 等．

2. 已知$a=5$，$c=7$求B角之諸函數．

答 $\sin B=\frac{\sqrt{24}}{7}$，$\cos B=\frac{5}{7}$，$\tan B=\frac{\sqrt{24}}{5}$ 等．

3. 已知$b=2$，$c=\sqrt{11}$，求A角之諸函數．

答 $\sqrt{\frac{7}{11}}$，$\frac{2}{\sqrt{11}}$，$\frac{\sqrt{7}}{2}$ 等．

4. 已知$a=40$，$c=41$，求B角之諸函數．

答 $\frac{9}{41}$, $\frac{40}{41}$, $\frac{9}{40}$ 等.

5. 已知 $a=p$, $b=q$, 求 A 角之諸函數.

答 $\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$, $\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$, $\frac{p}{q}$ 等.

6. 已知 $a=\sqrt{m^2+mn}$, $c=m+n$; 求 A 角之諸函數.

答 $\frac{\sqrt{m^2+mn}}{m+n}$, $\frac{\sqrt{mn+n^2}}{m+n}$, $\sqrt{\frac{m}{n}}$ 等.

7. 已知 $a=\sqrt{m^2+n^2}$, $c=m+n$; 求 B 角之諸函數.

答 $\frac{\sqrt{2mn}}{m+n}$, $\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m+n}$, $\sqrt{\frac{2mn}{m^2+n^2}}$ 等.

8. 已知 $\sin A=\frac{3}{5}$, $c=200.5$; 求 a.　答 120.3.

9. 已知 $\cos A=.44$, $c=30.5$; 求 b.　答 13.42.

10. 已知 $\tan A=\frac{11}{3}$,　$b=\frac{27}{11}$; 求 c.　答 $\frac{9}{11}\sqrt{130}$.

11. 已知 $A=30°$, $a=25$; 求 c, B 及 b.

答 $c=50$, $B=60°$, $b=25\sqrt{3}$.

12. 已知 $B=30°$, $c=48$; 求 b, A 及 a.

答 $b=24$, $A=60°$, $a=24\sqrt{3}$.

13. 已知 $B=45°$, $b=20$; 求 c, A 及 a.

答 $c=20\sqrt{2}$, $A=45°$, $a=20$.

3. 直角三角形之解法. 任一三角形皆爲六部分所組成,即三邊及三角. 所謂解三角形者,即求其未知部分也; 此六部分中若已知其三,則此三角形自能解決,惟所知三部分中,至少有一邊(註一). 但在直角三角形已知二邊,或一邊一銳角,而此形自能解決矣,三角學(註二)之最要應用,乃三角形之解法,今先討論直角三角形之解法.

〔註一〕假定其已知條件爲合理,卽可由已知部份作一三角形.

〔註二〕三角學之原名乃自二希臘字所演譯,其意謂"量一三角形".

學者宜注意上節習題11,12,13,即解直角三角形之問題.

學者在初習三角學時,宜作一關於問題之圖,愈準確愈妙,此不僅易於了解問題本身,尤能明瞭三角函數之意義.而大致驗得所得結果之確否.因此所需之儀器卽分度尺及量角規.

4. 解直角三角形之普通方法.

第一步 作正確之圖形代表問題中之三角形.

第二步 設已知一銳角,則自 90° 減之,即得他一銳角.

第三步 求未知部分,須自第一節之(1)至(6)擇一含未知部分及二已知部分之公式,然後以解其未知部分.

第四步 欲核算所得之數值,是否適合第三步以外之他項關係,下列之相互關係,最適宜於數值之核算:

$$a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)$$

但較大之錯誤可用測量法察出.

以直角三角形之兩垂直邊爲底,高,卽得

$$\text{直角三角形之面積}=\frac{ab}{2}.$$

在前節已得 30°, 45°, 60° 之函數,進而討論求得任一角之函數,今以下頁自0°至90°之三角函數之四位或五位表(註),預料其結果;欲求0°至45°之一角之函數,先於首列查出此角,而所求之函數值,卽此函數之頂標題之行與角度之列相交處;列如

$$\sin 15^\circ=\ .2588,$$

$$\cot 41^\circ=1.1504\text{等}.$$

同理,欲求45°至90°之一角之函數,先於末列查出此角,而所求之函數值,卽此函數之底標題之列與角之行與相交合處;例如

$$\cos 64^\circ=.4384,$$

$$\sec 85^\circ=11.474\text{等}.$$

(註)亦名爲三角函數之自然數值,以別於其對數(閱葛氏四位對數表之II,III兩表).