

矩阵。线性规划与向量

HAEUSSLER 著

矩陣、線性規劃與向量

原著者：E F. Haeussler,

R S. Paul

and B. Kolman

編譯者

宋振春 曹月慶
江苏工业学院图书馆
藏书章

科技圖書股份有限公司

編輯者言

最近三數十年來，凡習工商經貿學科者，均需學習新式數學，如矩陣、線性規畫以及向量等課程。此類新數學現已進展到各具完整體系，均各自獨立成書。在此電算機科學與應用日益普及的時代，此類基本數學觀念的建立更屬急切需要，用淺顯文字來表達，扼要說明其要點，能使一僅具高中程度即可讀通的基本小書的出版，實為當務之急。但市上絕少有此類書籍的發行，實為憾事。

茲選得賓州大學 E. F. Haeussler 與 R. S. Paul 兩教授合著的 “Introductory mathematical analysis.” 2 e. (註：全書 770 頁) 中的最精彩的第十四、十五兩章，與另一本 Drexel 大學教授 B. B. Kolman 所著的 “Introductory linear algebra with application.” (註：全書 470 頁) 的第三章，合併編成為 “矩陣 (矩陣代數)，線性規畫與向量 (與向量空間)” 一書。由於此三章內容各自獨立，可任意選讀，不但可在短期內學到最精彩而重要的新數學基本原理與應用，又可節省購買一內容重覆而厚達千頁的沉重負擔，這是本書出版的目的，希望讀者珍惜這一份小小的薄意。

科技圖書股份有限公司編輯部誌

目 錄

編輯者言

第一章 矩陣代數

1.1 矩 陣	1
1.2 矩陣加法與純量乘法	9
1.3 矩陣乘法	16
1.4 簡化法	28
1.5 簡化法 (續)	38
1.6 反矩陣	44
1.7 行列式	53
1.8 Cramer 法則	63
1.9 用隨伴矩陣求反矩陣	68
1.10 輸入、輸出分析	73
1.11 本章總複習	79
1.12 本章總複習題	84

第二章 線性規畫

2.1 含兩變數的線性不等式	87
2.2 線性規畫	93
2.3 簡易法	101
2.4 虛設變數	114
2.5 對 偶	124

2.6	本章總複習	131
2.7	本章總複習題	133

第三章 向量與向量空間

3.1	平面上的向量	135
3.2	n 一向量	151
3.3	R^3 中的外積	168
3.4	向量空間與子空間	175
3.5	線性獨立與基底	184
3.6	R^n 中的規化正交基底	200

附錄：	習題解答	207
-----	------	-----

第一章 矩陣代數

1.1 矩陣

爲尋求能表示數學與社會上許多情況的方法，而將有關數字排成長方形排列以供研究。例如一線性方程組。

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 9x - 6y + 2z = 0 \end{cases}$$

此方程組的特性是，方程式中的係數與其相關位置。因此方程組可用下列的長方形數字排列來表示。

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 9 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

稱爲矩陣 (matrix)。通常矩陣中的數字是用一個方括弧符號來包括，也可改用圓括弧 ()。

注意：不能使用垂直線段符號， $\left| \right|$ 來代替方括弧或圓括弧，因爲它具有另外一種意義。

矩陣符號通常是用大寫黑體字母，例如 **A**，**B**，**C**，等表示。

用矩陣將問題列成公式，並簡化數學運算頗爲方便。

例如，一製造商欲製造 *A*，*B*，*C* 三種產品，可用下表來表示這些產品在一星期內的產量所需勞力與物料單位數。

表 1.1

	產 品		
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
勞力	10	12	16
物料	5	9	7

2 矩陣、線性規畫與向量

表 1.1 中的這些數字，可改用下列矩陣來表示

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 16 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

矩陣中的橫行 (row) 數，是由上往下寫，而直列 (column) 數是由左往右寫。從上述的矩陣 A 可知

$$\begin{array}{rcc} & \text{第 1 列} & \text{第 2 列} & \text{第 3 列} \\ \text{第一行} & \left[\begin{array}{ccc} 10 & 12 & 16 \end{array} \right. & & \\ \text{第二行} & \left. \begin{array}{ccc} 5 & 9 & 7 \end{array} \right] & = A \end{array}$$

因為矩陣 A 有二行三列，故稱 A 矩陣為 2×3 階 (order) 或稱維 (dimension) 矩陣，行數要放在第一位。同樣，下面的兩個矩陣，

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 5 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{與} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

分別是 3×3 階與 4×2 階。

矩陣中的數字，稱為元素 (element 或目 entry)。為要表示矩陣中任何元素，例如一個 2×3 階矩陣，計有下列兩種方法：

第一：用不同的字母

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

其次，只用一個字母，如 a ，而用適當的雙腳標 (double subscripts) 來表示它的位置。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

對元素 a_{12} 而言，第一個腳標 1 是指元素 a_{12} 的位置。在第一行；第二個腳標 2，則指元素 a_{12} 是在第 2 列。

同樣，元素 a_{23} 是指元素 a_{23} 位在第 2 行，第 3 列。

因此，可用符號 a_{ij} 來表示第 i 行，第 j 列的元素。

本章所要討論的，是各種不同型式的矩陣運算其應用。首先對矩陣作一個完整的定義。

定義：由 m 行與 n 列數字所排成的長方形數列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

稱為 $m \times n$ 矩陣或 $m \times n$ 階矩陣。

對元素 a_{ij} 而言， i 是行腳標， j 是列腳標。

為簡便計， $m \times n$ 矩陣可用符號 $[a_{ij}]_{m \times n}$ ，或更簡單 $[a_{ij}]$ 來表示。若 $[a_{ij}]$ 係 2×3 ，則 $i = 1, 2$ ，而 $j = 1, 2, 3$ ，而 $[a_{ij}]$ 有 6 個元素。通常， $m \times n$ 矩陣共有 mn 個元素。

注意：不要將元素符號 a_{ij} 與矩陣 $[a_{ij}]$ 混淆。

一個矩陣如只有一行，例如

$$A = [1 \quad 7 \quad 12 \quad 3],$$

則稱為行矩陣 (row matrix)。此時 A 為 1×4 階；同樣，若矩陣僅有一列，例如 5×1 階矩陣

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 15 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

則稱為列矩陣 (column matrix)。

例題 1

下列矩陣

$$A = [1 \quad 2 \quad 0], \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 5 & 1 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = [7], \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & -2 & 4 \\ 9 & 11 & 5 & 6 & 8 \\ 6 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4 矩陣、線性規畫與向量

分別為 1×3 , 3×2 , 1×1 與 3×5 階。

例題 2

- (a) 作一 3 元素列矩陣，而 $a_{21} = 6$ ，其餘的 $a_{ij} = 0$ 。
此矩陣為

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- (b) 若矩陣 $A = [a_{ij}]$ 為 3×4 階，且 $a_{ij} = i + j$ ，試求 A 。
此處 $i = 1, 2, 3$ ，而 $j = 1, 2, 3, 4$ 。所以 A 有 $(3)(4) = 12$ 個元素。因 $a_{ij} = i + j$ ，故 $a_{11} = 1 + 1 = 2$ ， $a_{12} = 1 + 2 = 3$ ， $a_{13} = 1 + 3 = 4$ ，等等，故得

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 & 1+4 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 & 2+4 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

- (c) 已知 $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$ ，其餘的 $a_{ij} = 0$ 。試作一 3×3 階矩陣 I 。此矩陣為

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

定義：兩矩陣相等，若且唯若它們的階數相同，對應元素亦相同。

例如：

$$\begin{bmatrix} 1+1 & \frac{1}{2} \\ 2 \cdot 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

但是

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

而且

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot I$$

由相等的定義可知，對矩陣方程式

$$\begin{bmatrix} x & y+1 \\ 2z & 5w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

若爲一正確的陳述，必與下述方程組爲等效 (equivalent)

$$\begin{cases} x = 2 \\ y + 1 = 7 \\ 2z = 4 \\ 5w = 2 \end{cases}$$

解之，得 $x = 2$ ， $y = 6$ ， $z = 2$ ， $w = \frac{2}{5}$ 。

一個矩陣方程式，可定義成一組線性方程式如以上所示，這是一個重要的事實。

某些矩陣型式，在矩陣理論中扮演著重要角色。下面將先討論三種矩陣。

元素都是 0 的 $m \times n$ 矩陣，稱爲 $m \times n$ 階零矩陣 (zero matrix)，記作 $\mathbf{O}_{m \times n}$ ，或簡寫成 $\mathbf{O}$ 。例如， 2×3 階零矩陣，爲

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

或就一般而言，

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

注意：不要將矩陣 $\mathbf{O}$ 與數字 0 混淆。

一個矩陣，若具有相同的列數與行數，例如 n 行與 n 列，則稱爲 n 階方矩陣 (square matrix)，換言之， $m \times n$ 矩陣爲方矩陣，若且唯若 $m = n$ 。故

$$\begin{bmatrix} -2 & 7 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{與} \quad [3]$$

分別爲 3 階與 1 階方矩陣。

6 矩陣、線性規畫與向量

在 n 階方矩陣中，位在對角線上從左上角到右下角的元素 a_{11} ， a_{22} ， a_{33} …… a_{nn} 稱為主對角線元素 (main diagonal entries)，或簡稱主對角線 (main diagonal)。

在下列矩陣中

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

其主對角線元素為 $a_{11} = 1$ ， $a_{22} = 5$ ， $a_{33} = 9$ 。

一方矩陣中，若所有位在主對角線下方（或上方）的元素都是零，稱為上（或下）三角矩陣 [upper (lower) triangular matrix]。例如

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{與} \quad \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

分別為上三角矩陣與下三角矩陣。

習題 1-1

1 已知矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = [6 \quad 2]$$

$$G = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J = [4]$$

- 試指出各矩陣的階數。
- 何者為方矩陣？

- (c) 何者爲上三角矩陣，下三角矩陣？
 (d) 何者爲行矩陣？
 (e) 何者爲列矩陣？

在習題 2 至習題 9 中，設

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 14 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

2 問矩陣 A 的階數爲何？

試找出

3. a_{43} 4. a_{12} 5. a_{32} 6. a_{34} 7. a_{14}

8. a_{55}

9 問主對角線元素爲何？

10. 試寫出 5 階的上三角矩陣，所有不爲 0 的元素均等於 1。

11. 若 A 爲 3×4 階，且 $a_{ij} = 2i + 3j$ ，試寫出 $A = [a_{ij}]$ 。

12. 若 B 爲 2×2 階，且 $b_{ij} = (-1)^{i+j} (i^2 + j^2)$ ，試寫出 $B = [b_{ij}]$ 。

13. 若 $A = [a_{ij}]$ 爲 12×10 ，則 A 有多少個元素？

若 $i = j$ 時， $a_{ij} = 1$ ，且 $i \neq j$ 時， $a_{ij} = 0$ 。

試找出 a_{33} ， a_{52} ， $a_{10, 10}$ 及 $a_{12, 10}$ 。

14. 舉出下列兩矩陣的主對角線。

a. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 7 & 0 & 4 & -1 \\ -6 & 6 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} x & 1 & y \\ 9 & y & 7 \\ y & 0 & z \end{bmatrix}$

15. 試寫 (a) 4 階；(b) 6 階的零矩陣。

在習題 16. 至 19. 中，試解矩陣方程式。

16. $\begin{bmatrix} 2x & y \\ z & 3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

8 矩陣、線性規畫與向量

$$17. \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ x & 7 \\ 3y & 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$18. \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3x & y & 3z \\ 0 & w & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 9 \\ 0 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$19. \begin{bmatrix} 2x & 7 \\ 7 & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 7 \\ 7 & y \end{bmatrix}$$

20. 某證券經紀商賣給顧客A股票200張，顧客B股票300張，顧客C股票500張，顧客D股票300張。

試寫出表示所賣出各種股票數的行矩陣。若各種股票分別以每股20元，30元，45元及100元賣出。試據此資訊寫出其列矩陣。

21. 華華公司用矩陣方法表示每月的銷售報告。矩陣中的每一行依序表示普通，高級與特級各型車輛賣出數量，每一列依序表示紅色、白色、藍色與紫色車輛賣出數量。代表一月(J)與二月(F)份的矩陣為

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 6 & 0 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

試問：一月份賣出的白色特級車有幾輛？

二月份賣出的藍色高級車有幾輛？

在那一個月份賣出的紫色普通車比較多？

那種型式與那種顏色的車在兩個月內的銷售量一樣？

在那一個月份賣出的高級車比較多？

公司在那一個月份所賣出的紅色車比較多？

公司一月份賣出幾輛車？

22. 輸入-輸出矩陣(input-output matrices)，係由W. W.

Leontief所研究。指出在某一期間，存在某一經濟體系內各部門間的內部關係。以下的矩陣M是一個假設例子。消費部門與生產部門皆可視為製造商、政府機關、鋼鐵工廠、農業部門、家計部

門等。矩陣中每行元素表示某部門的輸出量，而這些輸出量被其他四個部門所消費。例如工廠 A 的總生產量，其中 50 給本身，70 給 B ，200 給 C ，360 給其他消費部門。第一行元素的總和為 680，表示 A 在某一時期內的總輸出量。至於矩陣的每列元素表示某一特定部門所消耗而由每一部門輸出時所得到的消耗量。譬如製造 680 單位製品時，工廠 A 消耗， A 的 50 個單位， B 工廠的 90 個單位， C 工廠的 120 個單位而 420 個單位則從其他製造商輸入。試求每列的元素總和，與每行的總和。試比較兩數有何不同？假設 A 部門增加 20% 輸出，即 136 個單位。並設因而導致每一部門皆增加 20% 的輸入，則部門 B 必需增加多少輸出？同樣對 C 與 D 又將如何？

	消費者			
	工廠 A	工廠 B	工廠 C	其 他 消費者
製造廠商				
工廠 A	50	70	200	360
工廠 B	90	30	270	320
$M =$ 工廠 C	120	240	100	1,050
其他製造商	420	370	940	4,960

1.2 矩陣加法與純量乘法

假設一汽車經銷商欲推銷高級與特級兩種汽車。每種車有兩種顏色；紅色與藍色。在一月份及二月份的銷售量分別用銷售矩陣來表示如下：

高級 特級

$$J = \begin{matrix} \text{紅色} \\ \text{藍色} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

矩陣 J 與 F 中的每一行，仍表示在一指定顏色下，各種車輛賣出數目

。每一列表示在指定車型下，各種顏色賣出的車輛數。代表各型車輛與各色車輛在兩個月中賣出的總銷售量，是將 **J** 與 **F** 兩矩陣中相對應的元素相加。

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

此種情況，提供這兩個同階矩陣相加的概念。

定義：若 **A** 與 **B** 為兩個 $m \times n$ 矩陣，則 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 是一個由 **A** 與 **B** 中相對應的元素相加而得的 $m \times n$ 矩陣。

所以，若

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{與} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

則 **A** 與 **B** 為同階 (2×3)，且

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

例題 3

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -6 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+7 & 2-2 \\ 3-6 & 4+4 \\ 5+3 & 6+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -3 & 8 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

無法處理，因為兩矩陣並不同階。

若矩陣 **A**，**B**，**C** 與 **O** 同階，則矩陣加法具有下列諸性質：

- $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ 交換律 (Commutative property)
- $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ 結合律 (Associative property)
- $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$ 同一律 (Identity property)

上述諸性質可用下例來說明：

例題 4

設

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a. \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$b. \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} + \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$c. \mathbf{A} + \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

故零矩陣在矩陣加法所扮演的角色與實數中的零一樣。

現回到前述的汽車經銷商，二月份銷售量列成如下矩陣

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

若三月份各型與各色車輛銷售量是二月份的兩倍，則三月份的銷售矩陣 $\mathbf{M}$ 可由矩陣 $\mathbf{F}$ 中的每一元素乘以2，而得

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix}$$

此運算可寫成

$$\mathbf{M} = 2\mathbf{F} = 2 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

當作一個實數乘一矩陣的運算。由此，可得到下列的定義。

定義：若 $\mathbf{A}$ 為 $m \times n$ 矩陣， k 為一實數〔亦稱為純量（scalar）〕，則 $k\mathbf{A}$ 可由 $\mathbf{A}$ 中每一元素乘上 k 所得的 $m \times n$ 矩陣來表示。此種運算，稱為純量乘法（scalar multiplication）。

故，若

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

則

$$k\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}$$

例題 5 設

12 矩陣、線性規畫與向量

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

試求

a. $4A$.

$$4A = 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 4 & 4 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 16 & -8 \end{bmatrix}$$

b. $-\frac{2}{3}B$.

$$-\frac{2}{3}B = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}(3) & -\frac{2}{3}(-4) \\ -\frac{2}{3}(7) & -\frac{2}{3}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{8}{3} \\ -\frac{14}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

c. $\frac{1}{2}A + 3B$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A + 3B &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ 21 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{2} & -11 \\ 23 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d. $0A$.

$$0A = 0 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

e. kO .

$$kO = k \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

若矩陣 A , B 與 O 為同階, 則對任一純量 k , k_1 與 k_2 , 可得成立下列的純量乘法性質

- $k(A + B) = kA + kB$
- $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$
- $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$
- $0A = O$
- $kO = O$

性質(d)與(e), 在例題 5 中的(d), (e)已說明過, 其餘將在習題中逐