# 結構動力分析

（增訂版）

總經銷　文笙書局

# 編著者簡歷

| | |
|---|---|
| 民國 64 年 | 國立中興大學土木工程系畢業 |
| 民國 65 年 | 考試院高等考試土木工程科及格、土木技師 |
| 民國 66 年 | 台灣省公路局高級技術員 |
| 民國 67 年 | 電信特種考試高員級土木類及格 |
| 民國 68 年 | 台灣電信管理局高級技術員 |
| 民國 70 年 | 國立台灣大學土木工程學研究所結構組畢業 |
| 民國 70 年 | 考試院專門職業及技術人員高等考試結構工程技師及格 |
| 現　　任 | 私立東南工專土木工程科講師、主任 |


中華民國七十八年十一月十日 增訂版

書　　名：結構動力分析
作　　者：林　永　盛
發 行 人：劉　賢　淋
出 版 者：天佑出版社
台北市杭州南路一段23號 9 樓
TEL: 341-8486·3415471
郵政劃撥：0139914-1
帳　　戶：劉　賢　淋


30元




定價：新台幣壹佰捌拾元整

# 序　言

台灣位處太平洋地震帶，結構物（尤其特殊結構物）需作動力分析與耐震設計已是不爭之事實要求。結構動力分析更為取得結構工程工業技師資格之必備知識與必考科目。

筆者有感於動力中文書籍甚少，有者亦僅為原文書籍之翻譯，缺乏例題解說，讀者研習較為吃力。年前，天一劉主任囑我重新撰寫結構動力單行本以餉讀者，遂乃利用公餘，將本人五年來在天一講授之結構動力課程之心得與講義，加以整理補充編寫而付梓。

本書計分五章，文字敍述力求簡明詳盡，各章節均附例題，舉凡數年來相關之高考題目多列入解說或習題中。誠可為初學者之課本及從事實務工作之工程先進自修參考用書。

本書歷時年餘而完成，實有賴於劉主任之督促、鼓勵與協助，在此致由衷之謝意。筆者才疏學淺，本書之出版雖經數次校對，疏漏之處在所難免，尚祈各位先進不吝指正是盼！

林　永　盛

序於　民國七十五年九月十六日

# 目 錄

# 第一章 緒 論

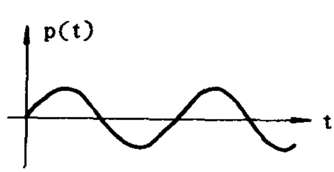
## § 1-1 結構動力之基本概念

吾人所謂「動力」( Dynamic )一詞，實乃隨着時間而變( Time-varying )之意；而動力荷重( Dynamic loads )者，卽指荷重或其大小或其方向或其作用部位隨着時間變化，故爲時間之函數，以 P(t) 表示之。如圖 1-1 所示，爲典型之動力荷重，分週期性與非週期性兩大類。

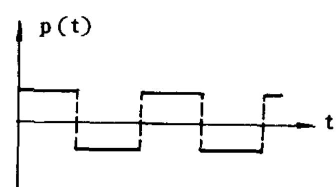
結構物若承載動力荷重，與一般之靜力荷重( Static loads )作用，具有下列兩項主要差異：

(1)結構物在動力荷重作用下之反應( Response )，包括變位、內力、應力、應變等，均隨着時間而改變，是爲動態反應，卽其反應爲時間之連續解而非單一解。

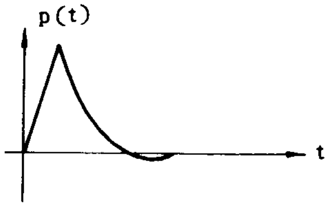
(2)(角)加速度在動力學中扮演一重要角色，因此質量( Mass ) 與加速度相乘積之慣性力( Inertia force )在動力分析中需列入考慮。如圖 1-2 所示，懸臂梁承載動力荷重 P(t) ，其任一截面之剪力與彎矩，必需由外力 P(t) 及因梁之加速度所引起之分佈慣性力平衡而得。



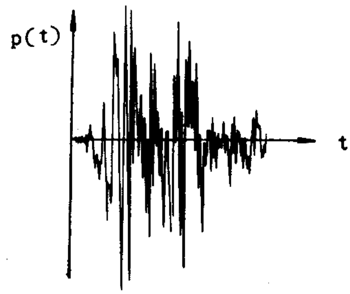

(a)簡諧荷重(週期性)



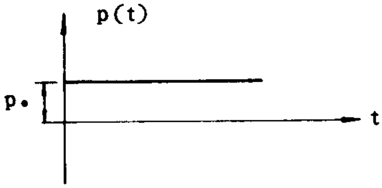

(b)任意週期荷重(週期性)




(c)衝擊性荷重（非週期性）




(d)地震荷重（非週期性）




(e)突加荷重（非週期性）

圖 1-1　典型之動力荷重

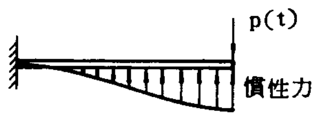



圖 1-2　承載動力荷重之懸臂梁

結構動力反應之分析，一般而言，有兩種基本不同之方法：即定態分析（ Deterministic analysis ）與非定態分析（ Nondeterministic analysis ）。若結構之作用荷重隨着時間變化之型式爲完全確定者，即荷重係給定的（ Prescribed ），則此項分析謂之定態分析；另則若荷重隨時間變化之整個歷程並不完全知悉，其型式爲隨機的（ Random ），僅能以統計方法加以制定者，則此項分析謂之非定態分析。本書僅以定態分析爲內容。

任何結構體，凡具有質量與彈性，當其平衡狀態受到挑撥，即能產生振動（ Vibration ）。此項振動，常爲週期性的，亦即在固定時

間內，其運動將重複進行，此固定時間謂之週期（Period）。在單位時間內往復運動之次數，謂之頻率（Frequency），與週期互為倒數。振動有兩種形態：一為自由振動（Free vibration），另一為強迫振動（Forced vibration）。結構彈性系統不受外力純循本身物理特性而作振動者是為自由振動；強迫振動則在外力激發下進行之振動，最終以激發外力之頻率為其頻率。

茲將動力分析中之重要基本名詞，略述於下：

(1)數學模式（Mathematical model）

實際結構系統之動力問題中，包含了複雜之材料性質、荷重狀況與邊界條件，欲求其正確嚴密解（Close-form solution）甚為困難與費時，因此工程上之解析通常是引入適當之假設與簡化，使複雜問題變為數學上可解或容易解之問題，如此建立之模式為數學模式。當然由數學模式求得之解僅為實際問題之近似解而已。

(2)自由度（Degrees of freedom）

描述一結構系統運動所需之獨立坐標數目，稱為自由度。僅需單一坐標即能加以描述之結構振動系統，稱為單自由度系統（Single degree of freedom systems），簡寫SDOF；需二個以上（含二個）之獨立坐標始能描述其運動者，稱為多自由度系統（Multi-degree-of-freedom systems），簡寫MDOF。大多數之結構為多自由度系統，甚且為無限多自由度。

最基本之SDOF數學模式，如圖1-3所示，其中$u(t)$表示其位移坐標，即自由度之坐標；質量元素$m$表示該結構系統之（質量）慣性特性；彈簧元素$k$表示該結構系統之彈性恢復力與位能特性；阻尼（Damping）元素$c$表示該結構系統之摩擦，空氣阻力與能量消耗之特性；激發力（Exciting force）$P(t)$表示作用於該結構系統之廣義動力荷重（包括結構系統支承擾動荷重）。結構動力之反應，基本上以結構之變位（位移）為表達，其他如速度、加速度、結構之內力、應力、應變等，皆可由變位直接或間接推導而得。

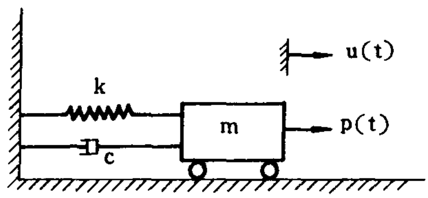



圖 1-3 單自由度系統之數學模式

(3)廣義坐標（Generalized coordinates）與形狀函數（Shape function）

廣義坐標乃是一組諧合於束制條件（Constrained conditions）之獨立位移坐標，其數目足以描述該系統之運動狀態，故廣義坐標之數目即自由度數。

形狀函數則是用於近似描述一連續分佈質量系統變位形狀之認可函數（Admissible function），此函數基本上至少需滿足該系統之幾何邊界條件（Geometric boundary conditions）。形狀函數通常以無因次（Dimensionless）表示。

彈性結構體，即使簡單如一根梁，其質量分佈各處，理論上需以無窮多個坐標來描述該運動，其振動常無一定之型態可循，唯實際上，吾人常以簡化方式假設其振動時之變位形狀為有限 n 種形狀疊加（Superposition）之結果，使無窮自由度轉變為有限自由度，甚至為單自由度，以為分析。

依據廣義坐標及形狀函數，對單向結構物（One-dimensional structure）之振動變位形狀（即位移）可寫成

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{N} Z_i(t)\,\phi_i(x) \quad \cdots\cdots (1\text{-}1)$$

式中 N＝所選用變位形狀函數之數目，即自由度。

$\phi_i(x)$＝形狀函數，通常為無因次，x 為沿結構物軸向之坐標

$Z_i(t)$＝對應於形狀函數 $\phi_i(x)$ 之廣義坐標（即振幅），為位

移之單位。

如圖 1-4(a)所示之例，爲一振動中之簡支梁，其變位可表示成圖(b)中各正弦函數之和。各正弦波之振幅，即爲該對應函數波形之廣義坐標，以數學式表示如下：

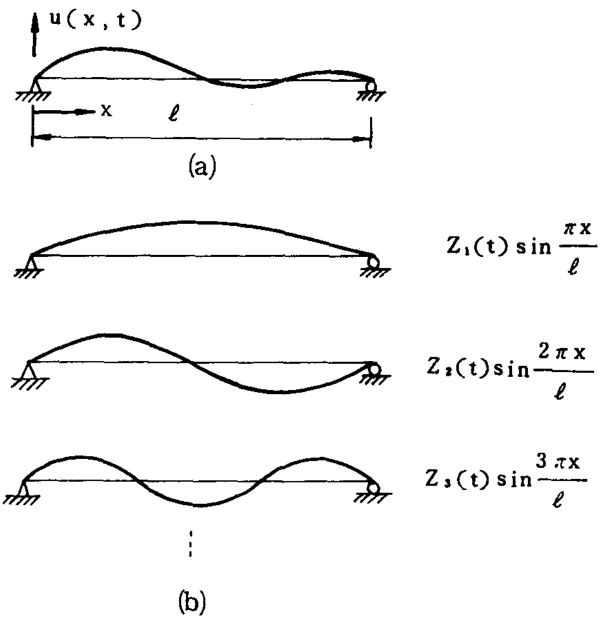



圖 1-4 以正弦函數表示簡支梁之變位

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t)\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

$$=Z_1(t)\sin\frac{\pi x}{\ell}+Z_2(t)\sin\frac{2\pi x}{\ell}+$$

$$Z_3(t)\sin\frac{3\pi x}{\ell}+\cdots$$

其中各形狀函數 $\sin\dfrac{n\pi x}{\ell}$ 均滿足簡支梁之幾何邊界條件 $\phi_n(o)$

$=0$ 及 $\phi_n(\ell)=0$。

(4)黏滯性阻尼（Viscous damping）

實際結構物之阻尼非常複雜，諸如結構接頭之鬆弛、結構元件與非結構元件間之摩擦、材料之阻尼、混凝土之微裂縫等機構（Mechanism）之組合。在動力分析中考慮之阻尼力大小，若假設與運動速度大小成正比，而方向與運動速度方向相反，此型之阻尼，稱爲黏滯性阻尼。

結構振動系統於振動時若假設無阻尼元素存在，或阻尼可略而不計者，稱爲無阻尼振動（Undamped vibration）。反之，稱爲含阻尼振動（Damped vibration）。

# §1-2　運動方程式之推算法

研究結構系統之振動現象，吾人需先建立描述該系統各自由度運動狀況之運動方程式。運動方程式爲控制振動系振動之微分方程式，多自由度系統之運動方程式爲聯立微分方程式，或偏微分方程式。

運動方程式之推導通常可採用下列任一種方法：

(1)動力平衡法（Dynamic equilibrium method）

(2)虛位移法（虛功法）（Virtual displacement method）

(3)漢彌爾頓原理（Hamilton's principle）

茲分別敍述之，並列舉例題於下。

## §1-2-1　動力平衡法

此法乃向量推導法，針對結構系統之各自由度，選取自由體（Free body），標示出作用在自由體上之各種外力，利用牛頓定律得

$$m\frac{d^2u(t)}{dt^2}=m\ddot{u}(t)=\Sigma P(t) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{-}2)$$

式中之m表示質量；u(t)表示位移坐標；ΣP(t)表示作用在自由體之外力，包括恢復力、阻尼力及外加荷重。其中m$\ddot{u}$(t)項爲慣性

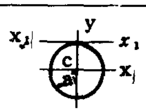
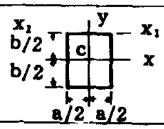
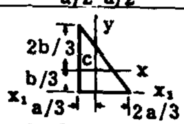
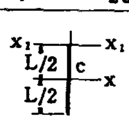
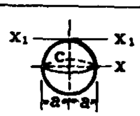
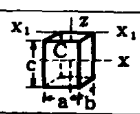
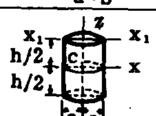
力，若移至等號右邊，如下式所示：

$$\Sigma P(t) - m\ddot{u}(t) = 0 \quad \cdots\cdots(1\text{-}3)$$

（1-3）式表示將慣性力（矩）加在運動加速度（角加速度）之相反方向上，與自由體上之其他作用外力平衡之，如此可使動力問題循靜力方法處理，此乃達倫勃原理（d'Alembert's principle），稱爲動力平衡法。

慣性力爲質量與加速度之乘積；慣性力矩爲慣性矩（Moment of inertia）與角加速度之乘積，常用剛體（Rigid body）之慣性矩參考表 1-1 。

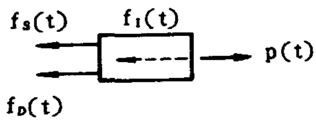
表 1-1 常用剛體慣性矩表

| 薄鈑或三向度剛體 | $I_x = M i_x^2$ | $I_{x_1} = M i_{x_1}^2$ | $I_z = M i_z^2$ |
| --- | --- | --- | --- |
|  | $M\frac{a^2}{4}$ | $M\frac{5a^2}{4}$ | $M\frac{a^2}{2}$ |
|  | $M\frac{b^2}{12}$ | $M\frac{b^2}{3}$ | $M\frac{a^2+b^2}{12}$ |
|  | $M\frac{b^2}{18}$ | $M\frac{b^2}{6}$ | $M\frac{a^2+b^2}{18}$ |
|  | $M\frac{\ell^2}{12}$ | $M\frac{\ell^2}{3}$ | $M\frac{\ell^2}{12}$ |
|  | $M\frac{2a^2}{5}$ | $M\frac{7a^2}{5}$ | $M\frac{2a^2}{5}$ |
|  | $M\frac{b^2+c^2}{12}$ | $M\frac{b^2+c^2}{3}$ | $M\frac{a^2+b^2}{12}$ |
|  | $M\frac{3a^2+h^2}{12}$ | $M\frac{3a^2+4h^2}{12}$ | $M\frac{a^2}{2}$ |

**例 1-1**

試利用動力平衡法推導圖 1-3所示單自由系統數學模式之運動方程式，其中 c 表示黏滯性阻尼係數，k 爲彈簧常數。

【解】如圖 1-3中所示，由靜平衡位置向右之位移 $u(t)$ 爲廣義坐標在任何時間 t ，取該質量爲自由體，則作用在其上之所有力包括慣性力 $f_I(t)$、彈簧力 $f_S(t)$、阻尼力 $f_D(t)$ 與外加荷重 $p(t)$，如下圖所示。




由水平方向力之平衡，得

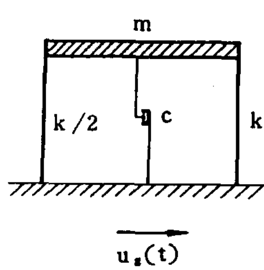
$$f_I(t)+f_D(t)+f_S(t)=p(t)$$

今 $f_I(t)=m\ddot{u}(t)$ ， $f_D(t)=c\dot{u}(t)$ ， $f_S(t)=k\,u(t)$，代入之，得運動方程式爲

$$m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+k\,u(t)=p(t)$$

**例 1-2**

如右圖所示之單層屋架，設版梁之勁度爲無限大，其質量爲m；柱之勁度各爲 k/2，無質量，且不計軸向變形；結構之黏滯性阻尼係數爲 c 。今其支承地面因地震引起水平擾動位移 $u_g(t)$，試取版梁相對於地面之水平位移 $u(t)$ 爲廣義坐標，推導其運動方程式。




【解】依題意，此爲SDOF ，因有相對運動發生，茲定參考固定軸，如下圖(a)所示。

在任何時間 t ，取版梁爲自由體如下圖(b)所示，其上之所有作用力包括慣性力 $f_I(t)$、阻尼力 $f_D(t)$與 恢復力 2〔$f_S(t)$〕。由

水平方向力之平衡，得

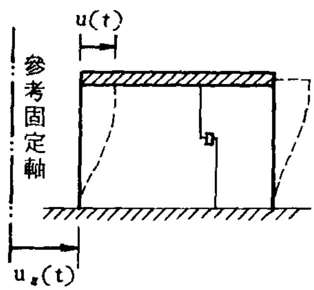
$$f_I(t)+f_D(t)+2\,[f_S(t)]=0$$

今 $f_I(t)=m\,[\ddot{u}_g(t)+\ddot{u}(t)]$, $f_D(t)=c\,\dot{u}(t)$,

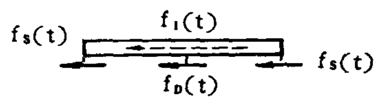
$f_S(t)=(\frac{k}{2})\,u(t)$，代入之，得其運動方程式為

$$m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=-m\ddot{u}_g(t)$$

上式中 $-m\ddot{u}_g(t)$ 稱為有效荷重（Effective load），此為支承擾動所引起。




(a)



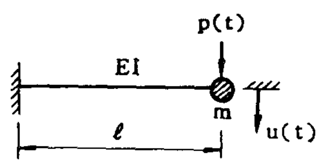

(b)

---

**例 1-3**

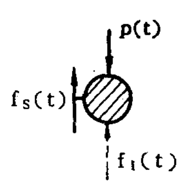
如右圖所示之懸臂梁，其質量與阻尼不計。今梁自由端有一堆積質量m，其上承載動力荷重 p(t)，試依圖示自由度坐標 u(t)，推導其運動方程式。

（71 年結構技師檢覈）




---

【解】廣義坐標 u(t)係由靜力平衡位置定起。在任意時間 t，取質量m為自由體，如右圖所示，其上之所有作用力包括慣性力 $f_I(t)$，恢復力 $f_S(t)$ 及外加荷重 p(t)。由垂直方向力之平衡得



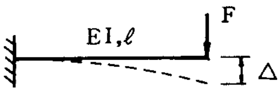

$$f_I(t)+f_S(t)=p(t)$$

今 $f_I(t)=m\ddot{u}(t)$，$f_S(t)=ku(t)=\frac{3EI}{\ell^3}u(t)$，代入之

得其運動方程式為

$$m\ddot{u}(t)+\frac{3EI}{\ell^3}u(t)=p(t)$$

【註】懸臂梁之勁度 k 計算如下：

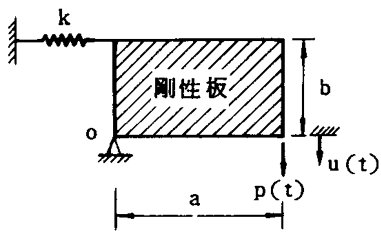



由結構靜力學知$\triangle=\dfrac{F\ell^3}{3EI}$

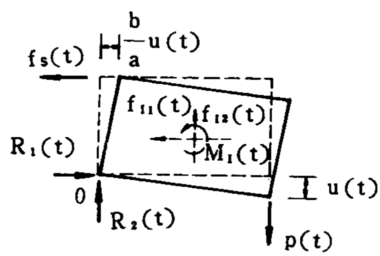
$$\therefore k=\frac{F}{\triangle}=\frac{3EI}{\ell^3}$$

例 1-4

如右圖所示之平面矩形均質剛性板，其單位面積之質量為 $\rho$ 。今板在動力荷重 p(t) 之作用下，繞鉸支承作微小振幅之振動。試依圖示之廣義坐標 u(t)，以動力平衡法推導其運動方程式。




【解】廣義坐標 u(t) 係由系統之靜力平衡位置定起。在任意時間 t ，取剛性板為自由體，如右圖所示。其上之所有作用力包括質心位置之水平慣性力 $f_{I1}(t)$ ,垂直慣性力 $f_{I2}(t)$, 慣性力矩 $M_I(t)$ ,彈簧力 $f_S(t)$ ，外加荷重 p(t)及鉸支承之反力 $R_1(t)$ 與 $R_2(t)$。




由 $\Sigma M_0=0$ ，得平衡方程式為

$$f_S(t)(b)+f_{I1}(t)\left(\frac{b}{2}\right)+f_{I2}(t)\left(\frac{a}{2}\right)+M_I(t)$$

$$=p(t)\,a$$

今 $f_S(t)=k\left[\dfrac{b}{a}u(t)\right]$

$$f_{I1}(t)=(\rho ab)\left[\frac{b}{a}\cdot\frac{\ddot{u}(t)}{2}\right]$$

$$f_{I2}(t)=(\rho ab)\left[\frac{\ddot{u}(t)}{2}\right]$$

$$M_I(t)=I_G\alpha=(\rho ab)\left(\frac{a^2+b^2}{12}\right)\left[\frac{\ddot{u}(t)}{a}\right]$$

代入上列平衡方程式，化簡得運動方程式爲

$$\left[\frac{\rho ab}{3}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\right]\ddot{u}(t)+\left(\frac{b^2}{a^2}k\right)u(t)=p(t)$$

或 $m^*\ddot{u}(t)+k^*u(t)=p^*(t)$

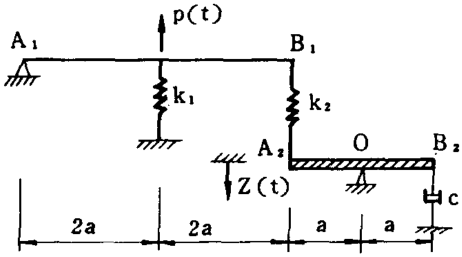
其中 $m^*=\dfrac{\rho ab}{3}\left(1+\dfrac{b^2}{a^2}\right)$，稱爲其廣義質量（Generalized mass）

$k^*=\dfrac{b^2}{a^2}k$，稱爲其廣義勁度（Generalized stiffness）

$p^*(t)=p(t)$，稱爲其廣義荷重（Generalized load）

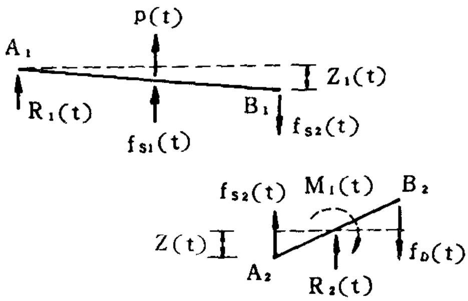
例 1-5

如下圖所示之結構，$A_1B_1$ 爲無質量之剛性桿，$A_2B_2$ 爲質量m之均質剛性桿。今在動力荷重 p(t) 之作用下，作垂直方向之微振幅振動。試依圖示之廣義坐標 Z(t)，以動力平衡法推導其運動方程式。




（72 年7月結構技師檢覈類似題）

【解】本題爲單自由度系統，因彈簧完全控制兩剛性桿之相對運動。在任意時間 t，分別取 $A_1B_1$ 桿及 $A_2B_2$ 桿爲自由體，並採用 $B_1$ 處之垂直位移 $Z_1(t)$ 爲輔助坐標，如下圖所示。




假設 $Z(t) > Z_1(t)$

由 $A_1B_1$ 桿，$\Sigma M_{A1} = 0$ 得

$$p(t)(2a) + f_{s1}(t)(2a) - f_{s2}(t)(4a) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

由 $A_2B_2$ 桿，$\Sigma M_0 = 0$ 得

$$f_{s2}(t)(a) + M_I(t) + f_D(t)(a) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

今設 $Z(t) > Z_1(t)$，則 $f_{s2}(t) = k_2〔Z(t) - Z_1(t)〕$

又 $f_{s1}(t) = k_1〔Z_1(t)/2〕$

代入(1)式，解得

$$Z_1(t) = \frac{1}{k_1 + 4k_2}〔4k_2 Z(t) - 2p(t)〕\cdots\cdots\cdots(3)$$

又 $M_I(t) = I_G\,\alpha = \dfrac{m}{12}(2a)^2〔\ddot{Z}(t)/a〕 = \dfrac{ma}{3}\ddot{Z}(t)$

$$f_D(t) = c\dot{Z}(t)$$

代入(2)式，並利用(3)式消去 $Z_1(t)$，化簡得運動方程式爲

$$\frac{m}{3}\ddot{Z}(t) + c\dot{Z}(t) + \left(k_2 - \frac{4k_2^2}{k_1 + 4k_2}\right)Z(t)$$

$$= -\frac{2k_2}{k_1 + 4k_2}\,p(t)$$

或 $m^*\ddot{Z}(t) + c^*\dot{Z}(t) + k^*Z(t) = p^*(t)$