微积分程序教学讲义

上　册

（分析引论）

上海师范学院数学系
上海徐汇区教师进修学院

一九八〇年六月

内容提要

本书是程序式的自学讲义，讲述内容是一元微积分。全书共分三册，上册分析引论；中册微分学；下册积分学。上册内容包括函数、极限、连续。本书可供在职进修中学教师，师范、工科院校学生学习，也可作为函授教材，还可供微积分教师作教学参考。

编 者 的 话

程序教学是美国心理学家普莱西和斯金纳首创的教学方法，本书就是吸取了它的优点并结合我国实际情况编写的。

本书系统地叙述了一元微积分的基本理论，还介绍了解题方法。在课本中穿插了大量的基本练习题，以巩固基本知识和加强基本技能的训练。对一些容易引起混淆和疏忽的地方都作了注记。本书先后在上海徐汇区教师进修学院、上海师院数学系进行过试验，效果良好。

上海师院的院系、上海市徐汇区教育局和徐汇区教师进修学院领导，对我们编写及试验工作都十分支持。上海师院数学系应制夷副教授主持了本书的审稿工作。参加审稿工作的有林炎生、张方盛等同志。本书的某些定理的证明是根据应副教授提出的证明方法编写的；在编写中，我们所在单位的很多同志为我们提供了不少资料和许多宝贵意见；浙江丽水师专曹瑞熊同志也提出了不少有益的建议；在印刷过程中，还得到了丽水县印刷厂的大力支持。在此，我们一并表示感谢。

由于我们水平有限，对程序教学的探讨还只是刚刚开始，一定存在不少问题，恳请专家、同行和广大读者批评指正！

上海师范学院数学系　**张建亚**
上海徐汇区教师进修学院　**陈永明**

1980年3月

目　　录

第一章　函　　数

第二章 数列极限

第三章 函数极限

第四章　无穷小量与无穷大量

第五章 连续函数

第一章　函　　数

我们考虑到中学里已经学习过函数，因而只对其重点内容有针对性地加以阐述和补充。

§1　函数概念

一　函数

函数的定义

1 〔正〕 **定义　设有两个变量 x 和 y，变量 x 的变域为 D，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照某一种对应规律 f，都可以唯一地确定变量 y 相应的值，我们就说变量 y 是变量 x 的函数，记为**

$$y=f(x)\qquad x\in D\qquad \text{（读作 } x \text{ 属于 } D\text{）}$$

x 称为自变量，y 称为因变量，从 x 到 y 的对应规律 f 又称函数关系，D 叫做函数的定义域。

为了叙述方便，函数定义可简述为：

$$\text{每一}\,x\in D\xrightarrow{f}\text{唯一}\,y\text{。}$$

2 〔例〕 ① 自由落体运动的规律是

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

其中 s 表示下降距离，t 表示时间，g 是重力加速度。根据

定义，下降距离s是时间t的函数。

② 球的体积和球的半径联系着，二者之间的关系是

$V=$______。

根据定义，球体积V是球半径r的函数。

③ 式子 $y^2=x$。对$(0,+\infty)$中的每一个x值，是不是都有y值与它对应？如果有，有几个值与它对应？这个式子中的y是不是x的函数？

【答案 ②$V=\frac{4}{3}\pi R^3$。③有；有两个；不是。】

3 〔练〕 ① 下列式子中的y是不是x的函数？

$y=\sqrt{-x}$；　　$y=\sqrt{-x^2}$；　　$y=\frac{1}{\sqrt{-x^2}}$。

② 式子 $y=6$中不含x，我们可以这样认为：不论x取什么实数，y总等于6，因此此式中的y也可以看作x的______。

③ 式子$x=1$中不含y，可不可以认为y是x的函数？

④ 式子 $y=\begin{cases}x，& \text{当}x\geqslant 0\text{时}，\\ x^2，& \text{当}x<0\text{时}。\end{cases}$

对$(-\infty,+\infty)$中的每一个x值，是不是都有唯一的y与之对应？y是不是x的函数？是一个函数还是两个函数？

【答案 ①因在$(-\infty,0]$中每个x，都有唯一的y与它对应，所以是函数；是；不是。②函数。③不可以，因为对于$x=1$，有无穷多个y与它对应。④有；是；一个函数。】

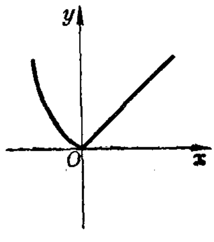

图 1—1—1

4 〔注〕 第**3**④题的函数叫**分段函数**。它是由几个数学式子来表示

的函数。试画出该函数的图象。

【答案　见图1—1—1】

函数值

5〔正〕　**定义　设函数$y=f(x)$，当自变量x取定义域中的某一定值x_0时，因变量的相应值叫做当$x=x_0$时的函数值，记作$f(x_0)$或$f(x)|_{x=x_0}$。**

6　〔练〕　若　$f(x)=2x^2-5$，求

①　$f(1)$；　　　　②　$f(2)$；

③　$(2x^2-5)|_{x=-\frac{1}{2}}$；　　　　④　$(2x^2-5)|_{x=a}$。

【答案　①-3；　②$3$；　③$-\frac{9}{2}$；　④$2a^2-5$。】

7　〔练〕　设$f(x)=e^x-1$，　求　$f(a)$，$f(-a)$；$-f(-a)$；$f(a^2)$；$[f(a)]^2$。

【答案　e^a-1；$e^{-a}-1$；$-e^{-a}+1$；$e^{a^2}-1$；$(e^a-1)^2$。】

8　〔练〕　设　$f(x)=\begin{cases}1,\text{当}x>0\text{时},\\0,\text{当}x=0\text{时},\\-1,\text{当}x<0\text{时},\end{cases}$

求　$f(3)$、$f(7.5)$、$f(-4)$、$f(-10.5)$、$f(0)$，并画出这个函数的图象。

注：这个函数称为**符号函数**，又称为**克朗涅克尔函数**，可记作$f(x)=\operatorname{sgn}x$。

【答案　1；1；-1；-1；0。

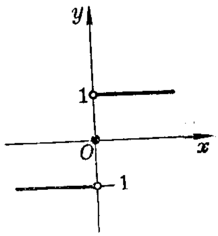

图1—1—2

图象见图1—1—2】

9 〔练〕 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & 当 -\infty<x\leqslant 0,\\ 2^x & 当 0<x<+\infty.\end{cases}$

求 $f(-2)$、$f(-1)$、$f(0)$、$f(1)$、$f(2)$。并画出这个函数的图象。

【答案 -1；0；1；2；4。图象见图1—1—3。】

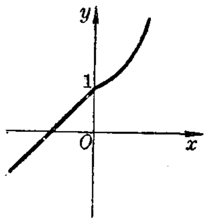

图1—1—3

函数表示法

10〔正〕 众所周知，函数有三种常用表示法：列表法、图象法、解析法。用得较多的是解析法。除此之外，有时还直接用语句来反映一个函数。

11〔例〕 “y是不超过x的最大整数”，譬如当$x=3.5$时$y=3$；当$x=11$时，$y=11$；当$x=-4.2$时，$y=$______。

显然，对于$(-\infty, +\infty)$中每一个x，都有唯一的y与之对应，因此，y是x的函数。

我们把这个函数记为$y=[x]$，画出它的图象，并求：

$[-7]$、$[-\pi]$、$[4\frac{1}{2}]$。

【答案 -5；图象见图1—1—4；-7；-4；4。】

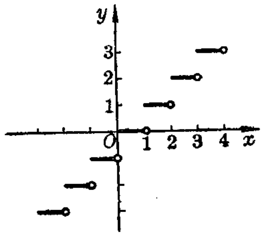

图1—1—4

12〔例〕 “设x是有理数

时，y 的值是1；x 是无理数时，y的值是0”，这句话也确定了一个函数，通常用符号

$D(x)$表示， 即 $y=D(x)=\begin{cases}1，当 x 为有理数时，\\ 0，当 x 为无理数时，\end{cases}$

显然，$D(2)=1$；$D(\pi)=0$；$D(-\frac{10}{3})=1$。

求：$D(1)$；$D(0.\dot{1})$；$D(3.1416)$；$D(\sqrt{2})$。

注：这个函数通常叫做**狄利克来函数**。

【答案 1；1；1；0。】

二 函数定义的剖析

函数的对应规律

13〔正〕 所谓函数的对应规律是指：从自变量 x 的值得到因变量 y 的值的某种规律。例如函数 $y=2x$的对应规律是指：自变量 x 乘以2。

$$x \xrightarrow{f：乘以2} y.$$

14〔练〕 指出下列函数的对应规律：

① $y=3x^2+1$； ② $y=\sin 4x$；

③ $s=\sqrt[3]{t}$。

【答案 ①自变量平方，乘以3再加1；②自变量乘以4，再取正弦；③自变量开立方。】

15〔正〕我们不妨把对应规律比作一台“加工机”。例如图

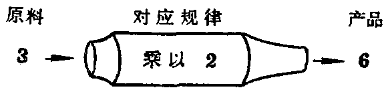

图 1—1—5

1—1—5中的这台“加工机”的功能是“乘以2”．如果投入原料“3”，那么得到的产品(函数值)便是“6”．

试将“原料”换为-3、a^2、x_0、x_0+h．求相应的“产品”；将“原料”换为x，求“产品”．

【答案　-6；$2a^2$；$2x_0$；$2(x_0+h)$；$2x$．】

16〔正〕 在代数里，我们研究各种数．在抽象地研究数时，我们不管这些数是2还是3，而笼统地记为字母(譬如a)．同样，我们要研究各种函数．在抽象地研究函数时，我们不管这些函数的对应规律是乘以2还是其它的什么，而笼统地记为一个字母，譬如说是f．这样，“原料”x投入f这台“加工机”时，就得到产品．这里的f就代表了对应规律．它是所有具体的对应规律的抽象形式．

17〔正〕在同一问题中，如果我们需要研究两个不同的数，那么应将它们记为两个不同的字母(譬如a及b)．同样，在同一问题中，如果我们需要研究两个不同的函数也应将它们的对应规律记为两个不同的字母(譬如f及ϕ)．

18〔注〕不能把记号$y=f(x)$看作f乘以x．

定义域和值域

19〔正〕定义　自变量的变域D称为函数的**定义域**．对于D中每一个x值，都唯一对应一个确定的函数值，所有函数值的全体叫做函数的**值域**，记为R．

20〔正〕当函数$y=f(x)$通过一个解析式表达时，我们约定：它的定义域就是使该表达式有意义的自变量值的全体．

例如，函数$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，当$1-x^2>0$时才有意义，所以它的定义域D为____。

【答案　$|x|<1$。】

21〔练〕求下列函数的定义域：

① $y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x}$；　　② $y=\lg(x^2-4)$；

③ $y=\arcsin\frac{x+1}{x}$。

【答案　① $0\leqslant x\leqslant 1$；② $x>2$或$x<-2$；③ $x\leqslant-\frac{1}{2}$。】

22〔结〕求定义域时必须掌握下列几点：

① 函数里如果有分式，分母的值不能为0；

② 函数式里如果有偶次根式，根号里所含的式子的值必须大于、等于0；

③ 函数式里如有对数记号，则真数必须是__数；

④ 函数式里如果有正切函数或者余切函数，在正切、余切函数符号下的式子的值分别不能等于______和______；

⑤ 函数式里如果有反正弦函数或反余弦函数，在反正弦函数、反余弦函数符号下的式子的绝对值不能大于__。

【答案　③正；④$k\pi+\pi/2$；$k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$。⑤1。】

23〔正〕如果一个函数反映了某一实际问题中量与量之间的关系，那么它的定义域就是使实际问题有意义的自变量的值的全体。

例如，圆面积s是圆半径r的函数：　$s=\pi r^2$。

从解析式看，自变量可为一切实数，但考虑到r是半径，

必须有$r>0$，所以此函数的定义域是____。

【答案 $(0, +\infty)$。】

24〔练〕自由落体运动的规律： $s=\frac{1}{2}gt^2$。

如果已知物体在距离地面高度为h处落下，求此函数的定义域。

【答案 $[0, \sqrt{\frac{2h}{g}}]$。】

确定函数的要素

25〔正〕函数概念中涉及了定义域D、对应规律f和值域R。很明显，如果定义域D与对应规律f确定了，那么这个函数的值域便确定了。因此，定义域D和对应规律f是确定函数的要素。

如果两个函数的定义域和对应规律都相同，那么这两个函数是相同的，只要两者之一不同，便是____的函数。

【答案 不同。】

26〔例〕函数$f(x)=\lg x^2$与$\phi(x)=2\lg x$是否表示同一个函数？

如果你感到困难，请先学下面带"△"的题目，否则就跳过这个题目(以后遇到带"△"的题目都作这样处理，不再声明)。

27△ $f(x)=\lg x^2$的定义域是______，$\phi(x)=2\lg x$的定义域是______，所以两者的定义域(不同 相同)。

【答案 27题 $(-\infty, 0)$、$(0, +\infty)$；$(0, +\infty)$；不同。 26题 不是。】

28〔例〕函数$f(x)=x$与$\phi(x)=\sqrt{x^2}$是不是表示同一函数？

29△ 函函数$\phi(x)$也可表为

$$\phi(x)=\begin{cases}x, & 当\ x\geqslant 0,\\ -x, & 当\ x<0.\end{cases}$$

你认为$f(x)$和$\phi(x)$的对应规律相同吗？

【答案 **29**题 不相同。**28**题 不是。】

30〔引〕函数$y=2x$与函数$u=2v$是不是一样的？

31△ 分别写出函数$y=2x$与函数$u=2v$的定义域。

32△ 这两个函数的对应规律是否相同？

【答案 **31**题 $(-\infty,+\infty)$；$(-\infty,+\infty)$。

32题 相同，对应规律都是自变量乘以2。

30题 一样。】

33〔正〕由此可见，只要______及______一样，不管自变量及因变量采用什么字母，我们认为是同一个函数。

【答案 定义域；对应规律。】

34〔练〕下列各对函数是否相同？为什么？

① $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$\phi(x)=1$；

② $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$，$\phi(x)=1$；

③ $f(x)=\lg(1-x)-\lg(1+x)$，$\phi(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$；

④ $y=x^2$，$x=\sqrt{y}$。

【答案 ①不相同。②相同。③相同。④不相同。】

35〔正〕最后，我们用集合概念来叙述函数：如果对于集合D里每一元素x，按照某一种确定的对应规律f，都有

集合R里唯一的一个元素y与它对应，则称f是集合D上的一个函数。记作$f: D\to R$，简单地记为$y=f(x)$。通常也说y是x的函数。

§2 函数的几种特性

一 函数的奇偶性

偶函数

1 〔引〕我们来考察函数 $f(x)=x^2$。

① 函数$f(x)=x^2$的定义域D是什么？

② 下列各对函数值是否相等：

$f(1)$与$f(-1)$；$f(11)$与$f(-11)$；$f(a)$与$f(-a)$。

③ 这个函数的图象有什么特征？

④ 我们看到，函数$f(x)=x^2$具有这样一个特性：

对于函数定义域中任意数值a，都有$-a\in D$，且$f(a)=f(-a)$。因为式中a是任意的，为了方便，我们也可以说，对D中任意x，都有$-x\in D$，且$f(x)=f(-x)$。即当自变量改变符号时，对应的函数值____。

【答案 ①$(-\infty, +\infty)$。②都相等。③关于y轴对称。④相等。】

2 〔引〕函数$y=x^4$、$y=x^6$、……、$y=x^{2n}$(n为正整数)是否具有上述特征？

【答案 具有。】