

数学建模系列教材

数学建模问题集

电子科技大学应用数学系

数学建模系列教材

数学建模问题集

电子科技大学应用数学系

前 言

本书是我校继《数学建模入门》和《数学知识系列讲座》之后的《数学建模》系列教材的第三本,本书的目的是为大学生数学建模竞赛和数学建模教学提供练习材料。

全书分为三部分:第一部分提供了两个建模范例,目的在于向读者展现同一个建模问题的丰富多采的求解方法。第二部分是一些问题分析实例,这是传统数学教育所忽略的部分,在传统的数学课程中,学生们面临的问题几乎都是明确地(用数学语言)给出了已知条件和求解目标,需要下功夫的主要是求解的过程。而在现实生活中提出的许多问题常常是模糊的和含混的,它们往往是因为人们对某些现象不满意,希望加以改善;或者是人们希望对某些有趣的不明现象加以解释等。这些问题往往都是由若干子问题构成的复杂问题,“建立方程”和“求解方程”通常只是解决问题过程中的一小部分工作,把握住需做哪些工作,以及每部分工作在解决整个问题中的作用是问题分析阶段的基本任务。第三部分是供读者练习的问题。

值得一提的是,本书的材料收集、整理和问题分析工作几乎都是由我校大学生数学建模学社的同学们完成的,其中第一部分由蒋海波,李恩和何莉同学整理;问题分析部分是由陈智,徐克难,胡瑜,舒斐,杨喜,孙威,蔡洁,徐园,周元伟,葛立青,张毅,杨钧,张利强,丁素广等同学完成的,应用数学系非线性分析研究室参与了本书的指导工作。

希望我们的工作能对我国大学生数学建模活动的开展和推广尽一份薄力,书中不妥之处敬请读者批评指正。

电子科技大学应用数学系 非线性科学研究室
一九九六年四月于成都

目

录

第一部分 建模范例	(1)
例一,一个飞行管理问题	(1)
范文一,飞行管理问题的实时算法	(2)
范文二,飞行管理模型的线性化处理方法	(10)
范文三,飞行管理模型的能量梯度求解法	(13)
范文四,飞行管理中的碰撞问题	(16)
例二,保安系统的评价	(18)
范文一,展览馆电视监测系统的分析	(19)
范文二,关于保安系统评价的模型	(23)
范文三,保安系统的安全性	(28)
第二部分 问题分析及实例	(32)
自行车外胎的使用寿命	(33)
城市商业中心最优位置分析	(34)
不同管理模式的最佳选用	(35)
轮胎生产方案	(36)
血型分布规律的探讨	(37)
证券投资专家系统	(39)
标枪的投掷与构造的优化问题	(40)
一记漂亮的投篮	(42)
打水问题	(43)
第三部分 建模习题集锦	(45)
农村停止生育准则对家庭子女数和人口性别比例影响	(45)
局部脑血流量的测定	(45)
电针灸刺激波	(46)
投入与人力资源质量问题	(46)
经济增长模型	(47)
生产策略问题	(48)
最合理的复本数量	(48)
期货投资模型	(48)
汴县经济发展决策模型	(49)
热气管绝热层厚度的热经济学问题	(49)
心脏起搏器电池寿命	(49)
血吸虫病的传播问题	(50)

蜥蜴繁殖	(50)
耕地面积预测	(51)
天然气管网系统	(51)
良种选育	(52)
酵母菌的生长繁殖模型	(52)
胃病起因	(53)
寿险系统	(54)
研究传染病的发展规律	(54)
土地质量评价问题	(55)
一个化学工程控制	(56)
学习质量的评价	(56)
席位分配与集资	(56)
人才录用问题	(57)
工作考核	(58)
强者对弱者的最优选择	(58)
书刊合理流失量的确定和考核评价馆员的管理水平	(58)
几种查字典方式比较	(59)
军舰游戏	(59)
烧水时间	(60)
选矿问题	(60)
扩散实验器中气体稳定状态的收敛性。	(60)

第一部分 建模范例

数学建模(Mathematical Modelling)是用数学的语言和方法,通过抽象、简化建立能近似刻画并“解决”实际问题的一种强有力的数学工具。modelling 一词在英文中有“塑造艺术”的意思,所以从不同的侧面、角度去考察问题就会有不尽相同的数学模型。这正是数学建模所具有的创造艺术性的魅力;同时也启示我们:在建模时,不应拘于一格,而应大胆创新。下面的两例范文,希望读后,有所思有所得。

例一

题目:一个飞行管理问题

——1995 年全国大学生数学建模竞赛 A 题。

在约 10,000 米高空的某边长 160 公里的正方形区域内,经常有若干架飞机作水平飞行。区域内每架飞机的位置和速度向量均由计算机记录其数据,以便进行飞行管理。当一架欲进入该区域的飞机到达区域边缘时,记录其数据后,要立即计算并判断是否会与区域内的飞机发生碰撞。如果会碰撞,则应计算如何调整各架(包括新进入的)飞机飞行的方向角,以避免碰撞。现假定条件如下:

- 1) 不碰撞的标准为任意两架飞机的距离大于 8 公里;
- 2) 飞机飞行方向角调整的幅度不应超过 30 度;
- 3) 所有飞机飞行速度均为每小时 800 公里;
- 4) 进入该区域的飞机在到达区域边缘时,与区域内飞机的距离应在 60 公里以上;
- 5) 最多需考虑 6 架飞机;
- 6) 不必考虑飞机离开此区域后的状况。

请你对这个避免碰撞的飞行管理问题建立数学模型,列出计算步骤,对以下数据进行计算(方向角误差不超过 0.01 度),要求飞机飞行方向角调整的幅度尽量小。

设该区域 4 个顶点的座标为(0,0),(160,0),(160,160),(0,160)。

记录数据为:

飞机编号	横座标 X	纵坐标 Y	方向角(度)
1	150	140	243
2	85	85	236
3	150	155	220.5
4	145	50	159
5	130	150	230
新进入	0	0	52

注:方向角指飞行与 X 轴正向的夹角。

试根据实际应用背景对你的模型进行评价与推广。

分析:

本题以空域飞行管理为背景,经简化和整理而成。该问题主要可以归结为非线性规划模型或经一定简化,建立线性规划模型。由于实际的需要,提出的算法应在计算机上快速地完成。

* 1,分析题目的重点,可知:根据实际背景及应用建立模型。

* 2,对问题做出必要合理的假设,必要时,并做简要的说明。如:最多考虑六架飞机这一假设,在范文一中,论述的很充分,值得参考。

* 3,对同一题目,不同的假设,不同的分析问题的角度,可归结为不同的数学模型。如:范文一、二、三、四。

* 4,模型求解的关键是,“快速”算法,以求达到实时。

* 5,后期分析,首先要用题目中所给数据检验模型,对满足条件的一般情况,最好也能模拟一下。可更有力地展示模型的优越。参见范文四。

* 6,讨论误差来源,除定性分析外,也应定量分析。在模型推广时,应对如何达到实时提出建议。

范文一

飞行管理问题的实时算法

谭浩南 朱正光 刘 剑

(复旦大学,上海 200433)

指导教师:蔡志杰

摘 要 本文讨论了在一定区域空间内进行飞行管理避免相撞的模型,提出了直接搜索法和非线性规划(SUMT)法两种解法,并将两种方法有机结合,得出的算法在 486 微机上计算时间小于 10 秒,误差不超过 0.01 度,完全符合问题的要求。

本文接着给出四种不同情况分别用两种方法求解,进行比较检验,取得很好的吻合,充分说明了模型 3 的可靠性。本文还对模型的误差进行分析并对模型进行推广。

关键词:非线性规划,直接搜索,罚函数

一、问题的提出(略)

二、问题的分析

该问题是一个在一定约束条件下的最优化问题,初步分析题意后可知约束条件是非线性的,难以化归为线性规划问题。由于题目涉及数据变量不是太多,可以考虑用逐步求精的直接搜索求解。由于题目要求的精度较高,而对于计算时间的要求也较高,如果求解时间在 2、3 分钟以上将失去任何实际意义。我们将求解时间上限定为 0.5 分,以符合实际的要求。直接搜索法求的近似解能以同时满足两方面的要求。但直接搜索法至少能在较短的时间内得到一个较好的可行解,这就为运用非线性规划的方法提供了条件。非线性规划的算法种类繁多,但均只适用于某些类型的问题。由于缺乏适用的计算机软件包,我们自行编写了实现算法的程序。综合准备时间和收敛速度两方面因素我们选择了 SUMT 算法。SUTM 算法

与直接搜索法相结合,使我们能够在足够短的时间内找到问题的足够精确的解。

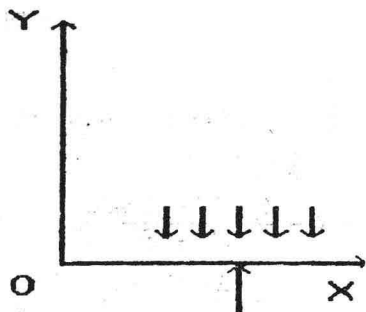
三、模型假设及说明

1. 不碰撞的标准为任意两架飞机的距离大于 8 公里;
2. 飞机飞行方向角调整的幅度不应超过 30 度;
3. 所有飞机飞行速度均为每小时 800 公里;
4. 进入该区域的飞机在到达区域边缘时,与区域内飞机的距离应在 60 公里以上;
5. 最多考虑 6 架飞机;
6. 不必考虑飞机离开此区域后的状况;
7. 飞机进入控制区域后完全服从地面控制台的调度,飞机未接到指令时保持飞行状态不变;
8. 计算机从记录新进入飞机数据到给各飞机发指令间隔为 t_1 , t_1 小于 0.5 分;
9. 飞机接到指令后可立即转到所需角度,即不考虑转弯半径的影响。

说明:

1. 假设 3 假定所有飞机速度均为 800km/h,是出于对问题的简化。我们将在模型的推广中给出飞机速度各不相同时的对策。

2. 假设 4 是必要的,否则可以给出无解的例证,如图所示。对该假设可作如下解释:飞机在区域 D 外靠机上雷达在自动保持与其他飞机距离大于 60km,进入区域 D 后由地面控制台进行统一控制,保证飞机距离大于 8km。



3. 假设 5 中 6 架飞机的假设是足够多的。以世界最繁忙的国际航空港之一希思罗机场邻近区域为例,因假设飞机在区域 D 作水平飞行,即知该区域内无机场。设在希思罗机场起降的飞机有一半穿过该区域,希思罗机场 1992 年起降总架次为 22.5 万次(文献 6),则平均每小时有 15 架飞机穿过该区域。而一架飞机穿过该区域最多需 $\frac{160 \times \sqrt{2}}{800} \approx 0.28$ 小时,则任一时刻该区域上空飞机架数的期望值不超过 4.5 架。另外,事实上不同飞机的飞行高度是不同的,这就进一步减少了该区域同一水平面上飞机的数目。以上讨论虽然稍兼粗略,但是足以说明 6 架飞机的假设是合理的。

4. 假设 8 是因为计算机从接到数据到发出命令间存在一个时滞,该时滞固然越小越好,但受机器限制,一般不能忽略。我们取 0.5 分为此时滞的一个上限,以使结果具有实际意义。当 $t < 1$ 秒时,可以认为实现的是实时控制,时滞可以忽略不计。

5. 虽然假设 2 给出的调整范围为 30 度,但实践证明,10 度的调整范围就已足够(从后

面的模型 1 也可看出,即使两机相向飞行,各自所须的调整也不超过 8 度),因而在今后绝大多数讨论和程序的编制中都将搜索区间定为 $[-10,10]$ 度。

四、文中用到的符号及说明

t_1	时滞	(x_{i0}, y_{i0})	第 i 架飞机的坐标
α_{i0}	第 i 架飞机初始方位角	t	时间参数
α_i	第 i 架飞机方位角	$D_i(\alpha_i, \alpha_j)$	时刻 t i, j 两机 距离
S_{ij}	$\sin \alpha_i - \sin \alpha_j$	v	飞机速度
C_{ij}	$\cos \alpha_i - \cos \alpha_j$	$\min D(\alpha_i, \alpha_j)$	i, j 两机预计最短距离
Δx_{ij}	$x_i - x_j$	f	偏差平方和函数
Δy_{ij}	$y_i - y_j$	n	求精次数
x	逐步求精搜索法中每次求精每层循环次数		
$g_{ij}(x)$	i, j 飞机最短距离构成的不等式约束		
$h_{ij}(x)$	关于第 i 架飞机的等式约束		
$P(X, r)$	罚函数	权因子	

五、模型的建立及求解

(一)模型一(两架飞机的情形,略)

(二)模型一

模型二直接将两机模型运用于多机问题,因为它等价于飞机之间两两不相撞。该模型讨论区域中有 6 架以下飞机时的情形,利用了模型 1 判别相撞的函数 ifcrash,同模型 1 一样采取方向角调整幅度平方和最优为调整原则,从而导出目标函数和约束条件如下:

$$\begin{aligned} \min \quad & f = \sum (\alpha_i - \alpha_{i0})^2 \\ \text{s. t.} \quad & \min D^2(\alpha_i, \alpha_j) \geq 64 \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6, i \neq j), t > 0; \\ & \text{或 } t < 0. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \min(D^2(\alpha_i, \alpha_j)) &= \left(-\frac{\Delta y_{ij} S_{ij} + \Delta x_{ij} C_{ij}}{C_{ij}^2 + S_{ij}^2} C_{ij} + \Delta x_{ij} \right)^2 \\ &\quad + \left(-\frac{\Delta y_{ij} S_{ij} + \Delta x_{ij} C_{ij}}{C_{ij}^2 + S_{ij}^2} S_{ij} + \Delta y_{ij} \right)^2 \\ &= \frac{(\Delta x_{ij} S_{ij} - \Delta y_{ij} C_{ij})^2}{C_{ij}^2 + S_{ij}^2} \\ t &= \frac{\Delta y_{ij} S_{ij} + \Delta x_{ij} C_{ij}}{V(C_{ij}^2 + S_{ij}^2)} \end{aligned}$$

为使 ifcrash 函数只考虑区域中的飞机相撞情况,我们可作如下修改:因为飞机飞过该区域时间不超过 0.28 小时(即飞正方形区域对角线时间),我们可认为仅当 $\min D < 8$ 且 $0 < t < 0.28$ 小时的时候,飞机在区域中相撞;否则不相撞。在实际计算时,我们更把上限加大到 0.3 小时,实际上是使不相撞的条件更苛刻了一些,相当于对飞机飞离此区域后的情况也作了部分考虑,提高了全局控制的安全性。

对该模型我们采用直接搜索法讨论了一般情况下对原问题的求解,可在规定时间内得到一个近似解,如果放宽时限,则可得一个符合精度要求的最优解。

直接搜索法原理十分简单:构造多重循环,对所有可能解进行判断,进接得出在一定精

度范围内无可质疑的最优解。但如果不使用任何技巧进行直接搜索,必将耗费大量时间。以本题为例,若在 $[-10, 10]$ 度范围内进行搜索,步长 0.01 度,共 6 层循环,需计算 6.4×10^{19} 次,在 $486DX66$ 上计算一次循环内函数费时 2.7×10^{-5} 秒,则此种算法算完显然是不可能的。

为在 30 秒内算出一个较精确的解,我们采用了逐步求精的方法。即每次用一定的步长以较少的循环次数进行“粗选”出的解附近以减小了步长进行“精选”,逐次推进直到达到指定精度。

设每次求精步长减小的倍数是相同的,则每次求精循环次数也相同,设为 x ,我们考虑 $[-10, 10]$ 度区间,精度要求达到 0.01 度,设进行了 n 次求精,则

$$\left(\frac{x}{2}\right)^n = 20/0.01 = 2000$$

总循环次数 $L = n \times x^6 = (\log 2000)/(\log 2) \times x^6$

由此可知 x 减小则 L 减小,但若 x 太小则可能无法收敛到最优解。经验表明 x 在 8 次以上时才能达到较好的搜索效果。

$$n = (\log 2000)/(\log(8/2)) = 5.4 \approx 5$$

此时共需搜索最多 $5 \times 9^6 = 265$ 万次,需费时 71.55 秒。

为将计算时间控制在 30 秒以内,我们又采取了一些优化方法,如:

a. 将底层循环内判别相撞的函数拆细分装在每层循环下,使在高层发现相撞后可提前结束循环;

b. 每进入新一层循环把已积累偏差平方和与已得最小偏差平方和比较,若大则结束该层循环。

c. 每进入新一层循环把已积累偏差平方和与已得最小偏差平方和比较,若大则结束该层循环。

这些措施大大减少了平均搜索次数,使得在多数情况下计算时间少于 30 秒,但程序不能保证在 30 秒内结束运算,仍存在一些特殊情况使计算时间接近最大耗时。我们又试用偏差绝对值和来代替平方和,发现对最优解影响有限,未能明显缩短计算时间。

至此可知用直接搜索法在现有机器条件下难以满足题设要求,要利用该解法,地面控制台必须满足以下条件之一:

1) 拥有速度至少为 $486DX66$ 三倍以上电脑;

2) 降低精度要求至 0.1 度(4次求精步长为 7 ,需时至多 10.81 秒)。

即使模型 2 不能直接用于飞行管理,它仍有以下作用:

1) 可算出符合精度要求的最优解供检验其他模型。

2) 可在相当短的时间内算出具有一定精度的最优解作为其他算法的初值。当精度要求为 1 度时,它算出最优解最多只需 4.3 秒(两次求精步长分别 $7, 6$),大多情况下运算时间为 $2 \sim 3$ 秒。

(三)模型三

该模型将原问题归结为一个非线性规划问题,并用SUMT算法进行了求解。

模型 2 给出的解法虽然不能满足题设要求,却能在较短时间内给出一个较接近最优解的可行解。由此可行解出发,用适当的非线性规划算法可较快得出满足精度要求的最优解。

以 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 为变量, 在模型 2 中我们已经将问题归结为非线性规划问题, 主要约束条件为

$$\begin{aligned} \min f &= \sum (\alpha_i - \alpha_{i0})^2 \\ \text{s. t. } \min D^2(\alpha_i, \alpha_j) &\geq 64 \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6, i \neq j) \end{aligned} \quad (1)$$

由于 $\min D^2(\alpha_i, \alpha_j)$ 的形式复杂, 求导有困难, 我们对 (1) 作一些改变, 将目标函数改为

$$\begin{aligned} f^* &= \sum_{i=1}^6 C_{i,i0}^2 + S_{i,i0}^2 \\ C_{i,i0} &= \cos \alpha_i - \cos \alpha_{i0}, S_{i,i0} = \sin \alpha_i - \sin \alpha_{i0} \end{aligned}$$

将变量改为 $C_{i,i0}, S_{i,i0} (i=1, 2, \dots, 6)$ 共 12 个, 增加等式约束

$$(C_{i,i0} + \cos \alpha_{i0})^2 + (S_{i,i0} + \sin \alpha_{i0})^2 = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, 6)$$

使问题 (1) 变为一个 12 个变量, 21 个 2 次约束条件的目标函数求极小值的问题

$$\begin{aligned} \min f^*(X) &= \sum_{i=1}^6 (C_{i,i0}^2 + S_{i,i0}^2) \\ \text{s. t. } g_{ij}(X) &= \min D^2(C_{i,i0}, C_{j,j0}, S_{i,i0}, S_{j,j0}) - 64 \geq 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad i < j) \\ h_i(X) &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $X = (C_{1,i0}, C_{2,i0}, \dots, C_{6,i0}, S_{1,i0}, S_{2,i0}, \dots, S_{6,i0})$

$$\begin{aligned} \min D^2(C_{i,i0}, C_{j,j0}, S_{i,i0}, S_{j,j0}) \\ = \frac{((S_{i,i0} - S_{j,j0} + S_{i0,j0}) \cdot \Delta x_{ij} - (C_{i,i0} - C_{j,j0} + C_{i0,j0}) \cdot \Delta y_{ij})^2}{(S_{i,i0} - S_{j,j0} + S_{i0,j0})^2 + (C_{i,i0} - C_{j,j0} + C_{i0,j0})^2} \\ h_i(X) = (C_{i,i0} + \cos \alpha_{i0})^2 + (S_{i,i0} + \sin \alpha_{i0})^2 - 1 \end{aligned}$$

Himmelblau 在文献 [1] 中列举了三类 12 种算法, 我们对这 12 种算法进行了比较, 主要是考虑其收敛速度的快慢, 其次由于没有现成的软件包可供使用, 必须自己编制有关程序, 程序准备时间的长短, 即算法变为程序的复杂程度也必须考虑。综合上述两方面因素, 我们选择了序列无约束最小化方法 (Sequential Unconstrained Minimization Technique), 简称 SUMT 算法。

SUMT 算法的基本思想是重复地求解一系列无约束问题, 它们的解在极限情况下超于非线性规划问题的极小点。算法的详细内容参见文献 [1][2][3][4], 现概述如下:

首先构造罚函数 $P(X_k, r) = f^*(X_k) + r_{k-1}^{-1} \sum_{i=1}^6 \frac{1}{g_{ij}(X)} + r_{k-1}^{-1} \sum_{i=1}^6 h_i^2(X_k)$, 其中权因子 r_k 是一单调递减数列。对每个 r_k 值求 X_k 使 $P(X_k, r_k)$ 取极小值。设精度要求 ϵ , 当 $|X_k - X_{k-1}| < \epsilon$ 时结束运算, $\bar{x}_k$ 即为符合所需精度要求的最优解。

对此具体问题, 我们置

$$\begin{aligned} P(X, r) &= f^*(X) + r_{-1} \sum_{i=1}^6 h_i^2(X) + r(-\sum_{i,j=1, i \neq j}^6 \lg g_{ij}(X)) \\ r_k &\rightarrow 0, \quad r_0 = \max\{10^{-2}, \frac{|v^*|}{100}\}, \quad r_k = \frac{r_{k-1} - 1}{\sqrt[8]{10}} \end{aligned}$$

为此问题编制程序 SUMT1 对题目的数据进行运算, 初始值用模型 2 以精度为 1 度时算出的最优值代入, 如果如下:

	初始角 α_0	偏转角 $\Delta\alpha$
飞机 1	243.00	0.00
飞机 2	236.00	0.00
飞机 3	220.50	2.14
飞机 4	159.00	-0.42
飞机 5	230.00	0.00
飞机 6	52.00	1.49

偏差平方和 6.98

该程序运行时间为 7.2 秒。

迄今为止,我们尚未讨论时滞对解的影响。在模型 3 中,Planesumt 的运行时间是稳定的,约为 4 秒左右。用模型 2 的 Solve 求粗略最优解耗时在 2~4.3 秒,随最优解出现位置不同而改变,加上裕量后我们可以在 10 秒以内给出最优解,故将时滞定为 10 秒,由假设 7 只需将各架飞机的坐标按原速度方向向前移动 10 秒内的位移,在此基础上求解即可,这在程序上实现起来相当简便。考虑时滞后得出的结果如下表所示:

	初始角 α_0	偏转角 $\Delta\alpha$
飞机 1	243.00	0.00
飞机 2	236.00	0.00
飞机 3	220.50	2.22
飞机 4	159.00	-0.72
飞机 5	230.00	2.13
飞机 6	52.00	1.16

偏差平方和 11.3292

该模型运行结果在精度和耗时两方面都是令人满意的。我们建议地面控制台采用比 486DX66 快 8 倍以上的机器,这样就可以进行实时控制了。对题目所给例子给出的第一个最优解,可以认为即是在实时控制的假设下给出的。

六、模型的检验及误差分析

(一)模型检验

模型二用遍历所有可能解的方式得出最优解的,其解(在可能的精度内)的最优性是毋庸置疑的故我们可用模型二求出满足精度要求的解来检验模型 3 的结果。

我们对 3 组数据分别用模型二和模型三进行求解,结果如下

	(X_0, Y_0, α_0)	$\Delta\alpha(\text{Model 2})$	$\Delta\alpha(\text{Model 3})$
飞机 1	(60, 100, 270)	-6.53	-6.55

飞机 2	(70,100,270)	5646	5.47
飞机 3	(80,100,270)	3.08	3.09
飞机 4	(50,100,270)	-4.16	-4.20
飞机 5	(40,100,270)	-6.48	-6.54
飞机 6	(0,40,0)	-4.30	-4.30

第一组:为避免侧面碰撞,6架飞机都需转动产大的角度,这是较为极端的情况,偏差的平方和较大,但没有一架飞机需调整的角度在10度以上。

	(X_0, Y_0, α_0)	$\Delta\alpha(\text{Model 2})$	$\Delta\alpha(\text{Model 3})$
飞机 1	(60,80,180)	4.91	4.91
飞机 2	(60,70,180)	2.54	2.58
飞机 3	(60,60,180)	0.36	0.40
飞机 4	(60,90,180)	-7.32	-7.33
飞机 5	(60,100,180)	-4.95	-5.00
飞机 6	(0,80,0)	4.16	4.17

第二组:与第一组类似:但可能发生的碰撞是正面的。

	(X_0, Y_0, α_0)	$\Delta\alpha(\text{Model 2})$	$\Delta\alpha(\text{Model 3})$
飞机 1	(0,70,0)	1.62	1.62
飞机 2	(55,5,90)	1.09	1.12
飞机 3	(90,60,180)	1.91	1.92
飞机 4	(60,130,270)	0.04	0.07
飞机 5	(80,5,180)	0.00	0.00
飞机 6	(0,60,0)	4.00	4.00

第三组:四架飞机十字交错而过,另有两架飞机水平飞行,两个模型都给出了较令人满意的调度。

各组数据吻合程度很好,且给出的调整方案也颇为符合逻辑,与一般常识相符,这说明模型三的算法是可靠的。值得指出的是以模型二的较粗略的可行解作为模型三的输入是非常必要的,这不但使解能快速收敛到指定精度;使计算时间符合要求,而且可用保证所求解的全局最优性。宾州大学教授 James. P. Ignizio 曾在其所著 Goal Programming and Extensions 中指出“非线性最优化…不具有用于求解问题的比较初等的通用方法,更令人失望的

是非线性最优化不能保证对一个一般的问题找出整体最优解,除非这个问题具有非常特殊的形式。这意味着研究人员必须经常满足于只找出局部的最优解。事实上,即使所采用的方法能偶然找出整体最优解,但往往也很难判别这个最优解是整体的还是局部的。”这就指明了求一般的非线性规划问题的全局最优解目前尚无良策。如果没有模型 2 的输出作为模型 3 的输入,要找到全局最优解至少是相当困难的,时间上当然难以满足要求。

(二)误差分析

1. 建模中的误差

考察模型假设可知假设 9 带来一定误差,简单分析后可知考虑转弯半径使飞行轨迹在垂直飞行方向上产生一个偏差 X

$X = (1 - \cos\theta)R$, 其中 R 为转弯半径, θ 为转角。

对最小转弯半径小于 10 公里的中小型飞机,转角小于 15 度时偏差

$$X \leq (1 - \cos 15^\circ) * 10 = 0.34 \text{ 公里}$$

对最小转弯半径约为 40 公里的大型飞机,转角小于 8 度时偏差

$$X \leq (1 - \cos 8^\circ) * 40 = 0.39 \text{ 公里}$$

两种情况下偏差均小于相撞条件 8 公里的 5%,可以忽略不计。由于飞行管理中让一架飞机做大于 8 度的转向是较少发生的事(由模型 1 知两架距离为 60 公里的飞机在一条直线上相对飞行时,也只需要一架转 7.66 度,一架转 7.67 度即可避免相撞)。故该处假设可以认为是合理的。下面给出发生极端情形的一个对策:设一架大型飞机做 30 度的转弯,此时偏差 $X = (1 - \cos 30^\circ) * 40 = 5.36$ 公里不可忽略。在飞机开始转弯后(转弯过程约需 1.6 分钟)地面控制站的计算机可看出一条曲率处处大于 $1/40$ 的偏转线,以此曲线引导飞机飞回偏转线。这种局部调整法的优点在于计算简单,不对全局的调整角度方案产生影响,特别适用于这种小概率事件。

2. 计算误差

模型一、二计算过程中的误差仅来源于机器的截断误差,对于最后结果没有重大影响。

模型三计算中的误差来源于

a. 建模过程中对目标函数进行替换时。

b. 用 SUMT 算法进行计算时。

对于 a 我们以 $\Delta\alpha$ 从 0 到 10 度计算了 $c_0^2 + s_0^2$ 以 1 度为基准的相对误差,如下表所示。

偏差(度)	偏差的平方	拟偏差	相对拟偏差	拟偏差相对误差
0	0	0	0	0
1	1	3.046E—4	3.046E—4	0
2	4	1.218E—4	1.218E—4	0
3	9	2.741E—3	2.741E—3	0
4	16	4.872E—3	4.874E—3	4.1E—4
5	25	7.611E—3	7.615E—3	5.2E—4

6	36	1.095E—2	1.097E—2	1.8E—3
7	49	1.491E—2	1.493E—2	1.3E—3
8	64	1.946E—2	1.949E—2	1.5E—3
9	81	2.462E—2	2.467E—2	2.0E—3
10	100	3.038E—2	3.046E—2	2.6E—3

相对误差在 0.3% 以下, 这些表明替换函数对最后结果没有显著影响。

对于 b 我们认为文献[1][2][3][4]中提供的算法已考虑了误差问题。在程序中实际给出了两个误差操作是: 相对精度 ϵ_1 和绝对精度界 ϵ_2 , 当满足

$$|x_j(k, j) - x_{j-1}(k-1, j-1)| < \epsilon_1 |x_j(k, j)| + \epsilon_2$$

时程序结束。这保证了了解的误差在精度要求以内。

3. 输入误差对结果影响

通过对输入数据给以小的扰动, 经大量计算可得如下定性结果:

- 飞机位置有小的扰动对结果影响甚微, 扰动增大时影响明显。
- 飞机方向角的扰动结果影响显著, 扰动大小与结果变化幅度基本是在一个数量级上。

以上结果说明为保证结果的准确性应尽量减小对飞机方向角测量的误差, 同时对飞机位置测量的误差也应控制在一定范围以内。

七、模型的评价及推广

(一) 模型的评价

模型三是我们得到的主要结果, 该模型可对区域内任意位置、方向的 6 架以内的飞机给出调整对策, 如果飞机管理的计算机计算速度比 486DX66 快 10 倍左右, 则可实现实时控制。具有计算时间短、精度高的特点, 实用性强, 较为完满地解决了原始问题。建模过程中用到的非线性规划方法具有一般性, 容易作出推广。缺点是当飞机数目增多时, 非线性规划的规模增大了, 计算时间增长较快, 幸好对假设的分析表明这种情况是很少发生的。

(二) 模型的推广(略)

参考文献(略)

范文二

飞行管理模型的线性化处理方法(部分)

刘铁成 张 良 聂兆虎

(山东大学, 济南 250100)

指导教师: 许宝刚

一、模拟与线性规划模型

要解决飞行角度调整问题, 首先要判断出哪些飞机会在区域内发生碰撞, 令

$$L_{i,j}(t) = (x_i(t) - x_j(t))^2 + (y_i(t) - y_j(t))^2 - 64,$$

整理得

$$l_{i,j}(t) = at^2 + bt + c$$

其中

$$a = 4v^2 \sin^2 \frac{\theta_i^0 - \theta_j^0}{2}, v = v_i = v_j$$

$$b = 2v[(x_i^0 - x_j^0)(\cos\theta_i^0 - \cos\theta_j^0) + (y_i^0 - y_j^0)(\sin\theta_i^0 - \sin\theta_j^0)]$$

$$c = (x_i^0 - x_j^0)^2 + (y_i^0 - y_j^0)^2 - 64$$

两架飞机 P_i 和 P_j 在区域内发生碰撞的条件是:

1) 两架飞机间的最短距离小于等于 8 公里;

2) 刚达到距离 8 公里时两飞机仍在区域内。

由条件 1) 可得约束

$$b^2 - 4ac \geq 0 \quad (3)$$

且两飞机距离达到 8 公里的时刻为

$$T_{ij} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

由条件 2) 可得下列约束

$$\begin{cases} T_{i,j} > 0 \\ 0 \leq x_i(T_{i,j}) \leq 160 \\ 0 \leq x_j(T_{i,j}) \leq 160 \\ 0 \leq y_i(T_{i,j}) \leq 160 \\ 0 \leq y_j(T_{i,j}) \leq 160 \end{cases} \quad (4)$$

如果 P_i 和 P_j 同时满足 (3) 和 (4), 它们就会在区域内相撞, 否则不会在区域内相撞, 根据上述结论, 我们编制了计算机程序 Aircraft Administration (程序见附录), 求出各个相撞的飞机, 并对相撞任何两架飞机进行调整, 使其满足:

(1) 调整后相撞飞机的总数量不大于调整前相撞飞机的总数量;

(2) 两架相撞飞机设为 P_i, P_j 若 P_i 调整后相撞飞机的总数量小于 P_j 调整后的相撞飞机的总数量, 则优先考虑调整飞机 P_i 。

(3) 若 P_i 调整后相撞飞机的总数量等于 P_j 调整后的相撞飞机的总数量, 则调整角度较小的一个飞机。

依照上述原则, 经过反复调整, 即可得到一个满足题目要求的较优的调整范围。

对给定的两架飞机 P_i 和 P_j , 我们考虑它们的相对运动, P_i 和 P_j 相碰当且仅当 P_i 在某一时刻以相对速度 $u_{i,j}$ 进入以 P_j 为圆心, 以 8 公里为半径的圆形区域内, 如图 1 所示, 设图中的圆的半径为 8 公里, O 点为一架飞机, P_i, C 点有一架飞机 P_j , 则 $\angle AOB$ 即为 P_i 相对于 P_j 做相对运动时的禁飞方向。

在给出线性规划模型之前, 我们先给出模型中要用到的符号和函数的定义。

令 $f: [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] - \{(\alpha, \alpha) | 0 \leq \alpha \leq 2\pi\} \rightarrow [0, 2\pi]$, 对 $\alpha \in [0, 2\pi]$ 和 $\beta \in [0, 2\pi]$

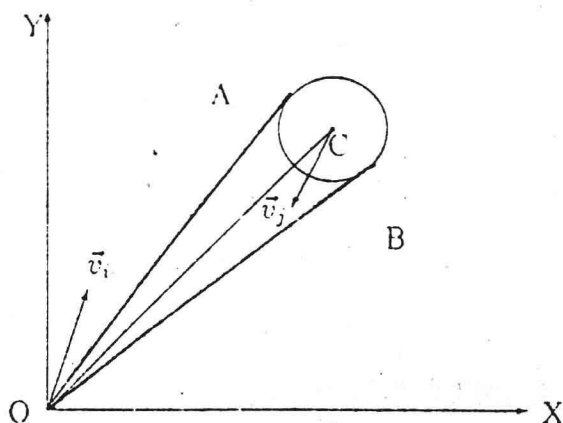


图 1

$$f(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\alpha + \beta + \pi}{2} & \text{当 } \alpha > \beta \text{ 且 } \alpha + \beta < 3\pi \\ \frac{\alpha + \beta - 3\pi}{2} & \text{当 } \alpha > \beta \text{ 且 } \alpha + \beta \geq 3\pi \\ \frac{\alpha + \beta + 3\pi}{2} & \text{当 } \alpha < \beta \text{ 且 } \alpha + \beta < \pi \\ \frac{\alpha + \beta - \pi}{2} & \text{当 } \alpha < \beta \text{ 且 } \alpha + \beta \geq \pi \end{cases}$$

易见 $f(\alpha, \beta)$ 是 α 和 β 的线性函数, 且 $\theta_{ij} = f(\theta_i, \theta_j)$ 。

令 $\varphi_{i,j}$ 是点 $(x_i(0), y_i(0))$ 指向点 $(x_j(0), y_j(0))$ 的向量与 X 轴正向的夹角 $\varphi_{i,j}$ 的值由下式给出

$$\varphi_{i,j} = \begin{cases} \arctg \frac{y_j(0) - y_i(0)}{x_j(0) - x_i(0)} & \text{当 } y_j(0) - y_i(0) > 0 \\ \pi + \arctg \frac{y_j(0) - y_i(0)}{x_j(0) - x_i(0)} & \text{当 } y_j(0) - y_i(0) < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{当 } y_j(0) = y_i(0) \end{cases}$$

令 $d_{i,j} = \sqrt{(x_i(0) - x_j(0))^2 + (y_i(0) - y_j(0))^2}$, $\psi_{ij} = \arcsin \frac{8}{d_{i,j}}$, 则不碰撞的条件为: $\theta_{i,j} - \varphi_{i,j} > \varphi_{i,j}$ 或 $\varphi_{i,j} - \theta_{i,j} > \psi_{i,j}$ 。令

$$g(\theta_{i,j}, \varphi_{i,j}) = \begin{cases} \theta_{i,j} - \varphi_{i,j} & \text{当 } \theta_{i,j} > \varphi_{i,j} \\ \varphi_{i,j} - \theta_{i,j} & \text{当 } \theta_{i,j} < \varphi_{i,j} \end{cases}$$

设第 i 架飞机为避免相撞需沿逆时针调整 $\Delta\theta_i^2$ 或沿顺时针调整 $\Delta\theta_i^2$, 且二者之中至少有一个为零(非零的值就是飞机飞行角度调整的幅度 $\Delta\theta_i$)。我们以所有飞机的调整幅度之和最小为目标, 建立线性规划模型如下:

目标函数

$$\min z = \sum_{i=1}^n (\Delta\theta_i^1 + \Delta\theta_i^2)$$

约束条件