

# 目 錄

## 第五章 飞行的一般运动方程

§ 5—1	引言	1
§ 5—2	飞机的一般运动方程	1
一、	飞机的动力学方程	1
二、	飞机的运动学方程	3
三、	方程组的讨论	3
§ 5—3	运动方程的线化——小扰动方程	4
一、	小扰动的概念	5
二、	运动方程组的线化和划分纵向、横侧运动的条件	5
§ 5—4	小扰动方程的无因次化	13
一、	采用无因次形式的小扰动方程的原因，无因次系统表	13
二、	纵向小扰动方程的无因次形式	14
三、	横侧小扰动方程的无因次形式	16

## 第六章 飞机纵向动稳定性分析

§ 6—1	引言	18
§ 6—2	纵向小扰动方程的拉氏变换形式和方程的一般求解过程	19
一、	纵向小扰动方程的拉氏变换形式及其求解的一般过程	20
二、	特征方程，特征根和模态	23
§ 6—3	特征根的近似计算方法和稳定性判据	27
一、	特征根的近似计算方法	27
二、	霍尔维茨判据	29
§ 6—4	纵向扰动运动的典型示例	31
一、	算例	31
二、	两种典型运动模态及其物理成因	33
§ 6—5	纵向扰动运动特性的简化分析方法	35
一、	短周期模态的简化分析	35
二、	长周期模态的简化分析	38
§ 6—6	飞行条件和气动参数对纵向动稳定性的影响	39
一、	飞行速度的影响	39
二、	飞行高度的影响	40
三、	静稳定裕量的影响	40
§ 6—7	纵向稳定性品质指标简介	43
一、	对长周期模态的要求	43

二、对短周期模态的要求	44
-------------	----

## 第七章 飞机的横侧动稳定性分析

§7-1 引言	46
§7-2 横侧小扰动方程的拉氏变换形式和方程的一般求解过程	46
一、横侧小扰动方程的拉氏变换形式	46
二、横侧小扰动方程的一般求解过程	47
§7-3 横侧扰动运动的典型示例	50
一、算例	50
二、三种典型运动模态及其物理成因	51
§7-4 横侧扰动特性的简化分析方法	54
一、滚转收敛模态的简化分析	54
二、螺旋模态的简化分析	55
三、荷兰滚模态的简化分析	55
§7-5 飞行条件和气动参数对横侧动稳定性的影响和稳定边界的简略分析	56
一、飞行速度的影响	56
二、飞行高度的影响	59
三、气动参数的影响和稳定边界的简略分析	61
§7-6 横侧稳定性品质指标简介	64
一、滚转收敛模态	64
二、螺旋模态	65
三、荷兰滚模态	65
§7-7 纵横向交感运动简介	65
一、引言	65
二、急滚惯性交感运动及其简化分析	65
三、尾旋运动简介	70

## 第八章 飞机的操纵运动

§8-1 引言	75
§8-2 飞机的纵向操纵运动	78
一、纵向操纵运动方程	78
二、升降舵作单位阶跃输入时飞机的反应	81
三、纵向人工阻尼器简介	83
§8-3 飞机的横侧操纵运动	85
一、副翼偏转时,飞机横侧运动的传递函数	85
二、副翼阶跃输入时飞机的反应	89
三、副翼脉冲输入时飞机的反应	91
§8-4 飞机动态操纵品质指标简介	94
一、纵向动态操纵品质指标	95
二、横侧动态操纵品质指标	96

## 附录 I 将飞机视为刚体时运动方程的推导

§ I—1 矢量运算有关知识简介	98
一、数性积 (点积)	98
二、矢量积 (叉积)	99
三、矢量导数	100
四、在动坐标轴系中质点的速度和加速度	101
§ I—2 对动坐标轴系写出的刚体动力学方程	102
§ I—3 飞机的运动学方程	105

## 附录 II 拉氏变换有关知识

§ II—1 引言	108
§ II—2 拉氏变换的定义和基本性质	108
§ II—3 拉氏变换在解微分方程上的应用	112
§ II—4 反变换法	115
§ II—5 几个常用名词解释	116
一、方框图、输入量、输出量	116
二、传递函数	116
三、放大系数	117

## 附录 III 不同机体坐标轴系中气动导数和惯性矩转换公式

§ III—1 气动导数转换公式	118
一、外力 (包括气动力和推力) 和速度的转换公式	118
二、纵向气动导数转换公式	119
三、横侧气动导数转换公式	120
四、舵面效率的转换公式	121
§ III—2 惯性矩、惯性积转换公式	

## 第五章 飛機的一般运动方程

### §5—1 引言

在本教材的中册各章中，已先后介绍了飞机在定常运动中所受的外力矩、靜稳定性、靜操纵性以及非定常运动中的附加力矩等。而在下册各章里，则是主要研究在外力和外力矩作用下飞机的非定常运动特性；即动稳定性和动操纵性等问题。本章所介绍的运动方程，是这一分析和计算的基础。

飞机的运动方程，包括动力学方程和运动学方程，它以微分方程的形式描述了飞机的运动参数和状态参数随时间的变化规律。这组方程是根据理论力学中的动力学和运动学规律得出的。为了使体系清楚和正文简短，我们把方程的推导列入附录 I，而在 §5—2 中直接引出所得的结论。学习这一节时，应该特别注意方程得来的简化假定、对应的轴系和适用范围，以及方程所代表的物理本质。

在 §5—3 中，我们进一步利用某些假定，将上面得到的微分方程组加以线化和简化，并将飞机作为刚体进行空间运动的六自由度方程分离为彼此独立的两组三自由度方程，作为后面分析飞机非定常运动的基础。

在 §5—4 中，介绍了我国目前采用的无因次系统，并将上面得出的线化方程组变成无因次的形式。

### §5—2 飞机的一般运动方程

#### 一、飞机的动力学方程

如果将所有的主次因素都包括在内来严格推导飞机的动力学方程，则由于飞机是一个极其复杂的动力学系统，必然使得导出的方程十分繁杂而难于求解。为了“反映事物的本质，反映事物的内部规律性”，我们可以通过分析和比较，抓住主要矛盾，忽略次要因素，对复杂的方程组进行去粗取精，由表及里的改制而“造成概念和理论的系统”，则所得的方程式可以既代表了飞机运动的主要物理本质，又便于数学处理。这种合理的简化处理方法实际上是分析几乎所有实际工程问题时所普遍采用的。下面我们来说明导出飞机动力学方程时所采用的简化假定和相应的使用这组方程时的限制条件。

首先是关于与飞机作相对运动的地球的假定。在推导方程时，我们略去地球的旋转运动，这样地轴系就成为理论力学中的“惯性座标轴系”。我们还忽略地球曲率而把地面视为平面而非球面，这样就忽略了飞机运动对地球产生的离心加速度，以及地球旋转和飞机运动所合成的哥氏加速度。此外，由于飞机飞行高度一般远小于地球半径，我们还忽略了飞行高度变化所引起的重力加速度的变化。数字分析表明，对于目前的一般飞机来说，关于地球所作的假定是合理的。但对于  $M > 3$  和  $H > 30,000$  公尺的飞行器，这些简化引起的误差较大，就需要重新考虑了。

其次是关于飞机方面的假定。在一般情况下，飞机上的旋转部件（如喷气发动机转子或

螺旋桨)在飞机运动时所产生的陀螺力矩与飞机的惯性力矩本身相比较小,因而可以忽略。同时还忽略飞机内部的可动部分(如操纵系统),弹性变形以及燃料的流动和晃动对飞机运动方程的影响。综上所述,也就是把飞机视作一个刚体。实践表明,对于一般飞机,在大多数飞行情况下,刚性假定是适用的。此外,我们还把飞机的质量看为常值(即 $\frac{dm}{dt}=0$ ),一般飞机燃油和滑油的小时消耗量不是太大,这样做也是允许的。

第三是关于大气方面的假定。我们认为大气相对于地球是静止的。此时,飞机的对空速度和对地速度相同。

此外认为飞机在一定高度上飞行,既和地面无接触,也不受地面效应的影响。

概略地说,在推导飞机的动力学方程时用了以下简化假定:

1. 地球是静止不动的平面,重力不随高度而变。
2. 飞机是刚体。
3. 大气处于平静状态。

对于飞行 $M$ 数小于3,飞行高度小于三万公尺的一般飞机,当计算操纵、稳定性时,在大多数飞行情况下可以采用上述假定。

在上述简化情况下,根据理论力学中动力学部分的知识,在附录 I—2 中推导出了对于机体轴系的飞机的六自由度动力学方程组[公式 (I—2—2)和 (I—2—11)],引出如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \left( \frac{dV_x}{dt} - V_y \omega_z + V_z \omega_y \right) = \sum X \\ m \left( \frac{dV_y}{dt} - V_z \omega_x + V_x \omega_z \right) = \sum Y \\ m \left( \frac{dV_z}{dt} - V_x \omega_y + V_y \omega_x \right) = \sum Z \end{array} \right. \quad (5-2-1)$$

以上统称为“力方程”。还有

$$\left\{ \begin{array}{l} I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z + I_{xy} (\omega_z \omega_x - \frac{d\omega_y}{dt}) = \sum M_x \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x - I_{xy} (\omega_y \omega_z + \frac{d\omega_x}{dt}) = \sum M_y \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y + I_{xy} (\omega_y^2 - \omega_x^2) = \sum M_z \end{array} \right. \quad (5-2-2)$$

以上统称为“力矩方程”。上两式中符号的意义可参见附录 I,这里不再注出。注意在式(5-2-2)的得出过程中,还补充了一个假定:机体轴系的 $OXY$ 平面是飞机的对称面。

以上六个方程分别代表了飞机沿机体轴系三个轴向的移动和轴系转动的规律。方程左端为惯性项,右端为外力(矩)项。方程的自变量为时间 $t$ 。

## 二、飞机的运动学方程

仅有六个动力学方程，因为未知数多于方程数，还不能使微分方程组闭合，因此，对于求解来说还是不够的。我们知道，动力学方程的外力项与飞机的方向和位置有关。例如，式(5-2-1)的外力项中必定包含重力  $G$  的分力，而此分力的大小又和飞机相对地面的姿态角  $\vartheta, \gamma$  有关。因此，还要求出  $\vartheta, \gamma$  与  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  的运动学关系式，与动力学方程联立求解来确定飞机运动参数随时间的变化。此外，如需要研究飞机的航迹（例如航迹稳定性问题），也直接用到运动学关系式。

根据地轴系和机体轴系之间的几何关系，在附录 I-3 中导出了六个运动学方程 [公式 (I-3-2) 和 (I-3-3)]。其中三个表示了按机体分解的角速度  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  与姿态角变化率  $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\gamma}$  等的关系。引出如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\gamma}{dt} = \omega_x - \operatorname{tg}\vartheta(\omega_y \cos\gamma - \omega_z \sin\gamma) \\ \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\cos\vartheta}(\omega_y \cos\gamma - \omega_z \sin\gamma) \\ \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_y \sin\gamma + \omega_z \cos\gamma \end{array} \right. \quad (5-2-3)$$

另外三个则代表了按机体轴系分解的线速度  $V_x, V_y, V_z$  和对地轴系的线速度  $\dot{x}_d, \dot{y}_d, \dot{z}_d$  之间的关系。它们是

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_d}{dt} = V_x \cos\psi \cos\vartheta + V_y (\sin\psi \sin\gamma - \cos\psi \sin\vartheta \cos\gamma) \\ \quad + V_z (\sin\psi \cos\gamma + \cos\psi \sin\vartheta \sin\gamma) \\ \frac{dy_d}{dt} = V_x \sin\vartheta + V_y \cos\vartheta \cos\gamma - V_z \cos\vartheta \sin\gamma \\ \frac{dz_d}{dt} = -V_x \cos\vartheta \sin\psi + V_y (\cos\psi \sin\gamma + \sin\vartheta \sin\psi \cos\gamma) \\ \quad + V_z (\cos\psi \cos\gamma - \sin\vartheta \sin\psi \sin\gamma) \end{array} \right. \quad (5-2-4)$$

## 三、方程组的讨论

以上列出了飞机的一般运动方程式 (5-2-1) 至 (5-2-4) 共十二个方程。这组方程是以时间  $t$  为自变量的多元非线性的联立微分方程组。下面对方程作几点讨论。

### 1. 外力项的讨论

首先分析一下动力学方程有那些外力（矩）项以及它们和那些参数有关。作用于飞机的外力和外力矩有：

(1) 等于常数的重力。此力对重心不产生力矩。重力在动座标轴上的分力与姿态角  $\vartheta, \gamma$  有关。

(2) 动力装置产生的推力和推力矩。它们和飞行速度、高度以及发动机推力调节装置的参数有关。在研究飞机动态特性时，假定推力调节装置的参数不变，故推力和推力矩仅与飞行

速度和高度有关。

(3) 气动力和力矩。一般来说，它们与飞行速度、角速度、高度、操纵面偏角以及所有这些参数的各阶导数有关。

## 2. 方程的封闭情况

由方程组的惯性项所包含的参数和对外力项的讨论可知，方程包括的未知量共有  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$ ;  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ ;  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $\vartheta$ ;  $x_d$ ,  $y_d$ ,  $z_d$  和  $\delta_x$ ,  $\delta_y$ ,  $\delta_z$  等十五个。而方程式的数目仅有十二个。如果考虑到惯性项和外力项中一般不出现方位角  $\psi$ ，重心对地座标  $x_d$ ,  $z_d$  等三个参数，则参数降为十二个，但同时也就自动取消了式 (5—2—3) 的第二式和式 (5—2—4) 的第一、三两式，方程式的数目也减少了三个。总之，方程数和参数的数目不相等，方程组是不封闭的。因此，为了求解这组方程，就需要给定某些变量随时间变化的规律。根据给出参数的不同，可以把飞行力学问题分成几个类型，这一点在下面讨论。

## 3. 飞行力学的几类主要问题及方程的应用

### (1) 握杆稳定性问题

这类问题研究飞机在飞行中受到扰动，而操纵面偏角保持不变时飞行参数随时间的变化。故此时操纵面偏角  $\delta_x$ ,  $\delta_y$  和  $\delta_z$  为已知量，因而减少了三个未知量，由十二个方程式解剩余的十二个未知数。这类问题从数学上看主要是求解齐次联立微分方程组的问题。它是飞机气动设计的最重要的内容之一，也是检查飞行品质的一个重要项目，将在第六、七章中详加讨论。

### (2) 操纵反应问题及其“逆命题”

操纵反应问题是给定操纵力或操纵面偏角随时间的变化规律，求飞行参数的相应变化。如果是给定操纵面偏角的变化，则已知  $\delta_x(t)$ ,  $\delta_y(t)$ ,  $\delta_z(t)$  三个参数（一般视作“输入量”详见第八章），而由十二个方程求其余的十二个变量（一般视作“输出量”）。此时微分方程组是非齐次的。如果是给定杆力的变化规律，即给定  $P_x(t)$ ,  $P_y(t)$ ,  $P_z(t)$ （视作“输入量”），则应补充三个“操纵系统方程”，这三个方程中输入为杆力而输出为操纵面偏角。这样就共有十五个方程求解十五个变量。此时方程组也是非齐次的。这类问题是研究飞机操纵反应问题，也是飞行品质中要重点检查的，我们将在第八章中讨论。

所谓操纵反应的“逆命题”，是事先给出所要求的运动参数的变化规律，求所需要的操纵面偏角或杆力的变化规律。

### (3) 自动控制时的稳定性问题

当飞机具有自动控制系统时，操纵面的运动规律一般由控制系统和飞机受控参数之间的调节规律来决定。此时需要补充控制系统的方程来和原来的十二个方程式联立求解。这类问题也将在第八章中提及。

除了上述问题之外，飞行力学中还有一些重要的问题。例如松杆稳定性问题，此时需要补充操纵系统方程而令杆力等于零。又如考虑结构弹性变形时的稳定性和操纵性问题，对大气紊流的反应问题等，均需要追加方程式或对原方程组加以变动。限于篇幅，本教材中就不一一涉及了。

## § 5—3 运动方程的线性化——小扰动方程

由于在 § 5—2 中列出的飞机一般运动方程式是高阶、非线性的，因此一般不能用解析法

求解。在目前的条件下，利用计算机求解当然是一个重要的途径。但如对方程加以合理的简化处理，使其能够解析求解而又保持必要的工程准确度，便于我们从所得的解析解中分析各种气动和构造参数对于飞机动态特性的影响，这也是极有价值的。由于解析解中直接包含了各种飞行参数和气动参数，它比仅给出数值的数字解往往更具有普遍意义。这仍是目前飞行力学研究中普遍采用的方法。

除了几种特殊类型的方程之外，目前能够进行解析处理的最常见的微分方程，就是线性微分方程。使运动方程线化的方法通常称为“小扰动法”，下面就要着重介绍这一概念。

### 一、小扰动的概念

在简化方程的过程中，用到基准运动（或称初始运动、未扰运动）和扰动运动的概念。基准运动是指飞机按照驾驶员的意愿，以一定规律进行的运动。在本教材上册中介绍的各种飞行动作，均属基准运动。飞机在作基准运动时，可能受到偶然的外界干扰而使运动参数与基准运动参数有所偏离，因之在一段时间内运动并不按预计的规律进行，这种运动称为扰动运动。

加于飞机的外界干扰，可能来自周围大气的紊动、发动机工作的变化、飞机载重或重量分布的变化以及驾驶员的偶然操纵等。它可以是瞬时性的扰动，也可以是持续性的扰动。如果加于飞机的扰动量较小，因而在同一时刻里，扰动运动参数与基准运动参数的差别量较小，扰动量二阶以上的量可以略去不计，这种扰动运动就称为小扰动运动。“差别较小”只能从相对意义上来理解，绝对量值范围应视具体情况而定。根据已有的经验，对“小扰动”的限制往往不太严格。用小扰动法处理后的简化方程，在大多数飞行情况下均能给出从工程角度来看足够满意的精确结果。这是由于：第一，在大多数情况下，主要的气动参数的变化均与扰动量成线性关系；第二，飞行中即使遇到相当强烈的扰动，也往往只有很小的线速度和角速度的扰动量。当然在加入小扰动的假定之后，所得到的线化方程也就必然受到一定的限制。例如，它不再适宜于研究尾旋或失速后的飞行，或者 $\gamma$ 研究角的扰动量达到 $90^\circ$ 左右的情况。总之，检验小扰动理论适用范围的唯一标准，仍是客观实践。毛主席曾指出：“**通过实践而发现真理，又通过实践而证实真理和发展真理**”，同学们可以在今后的学习、特别是工作实践中，逐渐加深对小扰动概念的理解。

### 二、运动方程组的线化和划分纵向、横侧运动的条件

下面将会看到，引入小扰动假定之后，即可将运动方程线化；但如基准运动是非定常运动（例如变速运动），则线化之后的小扰动方程显然是变系数的，一般仍然不能解析求解。实际上只要基准运动参数变化不很强烈，或基准运动本身是定常直线运动，则可将所得的小扰动方程视作常系数的。

引入小扰动假定后所得的线化方程，由于阶次太高，求解不便。在一定的条件（见后述）下，线性的小扰动方程可以分离为彼此独立的两组，称为纵向和横侧小扰动方程。这样就使方程组的阶次大为降低，便于解析求解。

由本教材《中册》可知，在飞机对称面内的运动参数称为纵向运动参数，不在飞机对称面内的运动参数称为横侧运动参数。如果满足下述条件（此时的基准运动简称为对称定直飞行）：

1. 飞机具有对称平面（外形和质量分布都对称）；



2. 在基准运动中对称平面与铅垂平面相重合 (即  $\gamma = 0$ )，且运动处于对称平面内 (即  $\beta = 0$ )；

3. 飞机的基准运动是定常直线飞行；

则扰动运动方程组可以分离为彼此独立的两组。其中一组只包含纵向运动参数，称为纵向扰动运动方程组；另一组只包含横侧运动参数，称为横侧扰动运动方程组 (下面将证明这一结论)。

本教材仅限于研究对称定直飞行时的小扰动问题。这虽然给飞机的基准状态加了很大的限制，但对称定直飞行状态是各种类型的一般飞机所最经常使用、因而是最有代表性的状态。许多国家所规定的大多数动态飞行品质的检查条款，也都是针对这一状态制定的。此外，深入分析表明，某些其它基准运动，或某些与基准运动参数偏离较大的扰动运动 (称为有限干扰运动) 的特性，有时也可通过对称定直飞行时的小扰动运动的特性来表示。因此这一研究就更有重要的意义。

用下标“0”代表基准运动参数，在对称定直飞行时，它们是： $V_{x_0}, V_{y_0}, V_{z_0} = 0$ ； $\omega_{x_0} = \omega_{y_0} = \omega_{z_0} = 0$ ； $\vartheta_0, \psi_0 = \gamma_0 = 0$ ； $x_{d_0}, y_{d_0}, z_{d_0} = 0^*$ ； $\delta_{x_0} = \delta_{y_0} = 0, \delta_{z_0}$ 。根据小扰动的概念，此时扰动运动参数可用基准运动参数附加一小扰动量 (以前置符号“ $\Delta$ ”来表示) 表示，即

$$\begin{aligned} V_x &= V_{x_0} + \Delta V_x, & V_y &= V_{y_0} + \Delta V_y, & V_z &= \Delta V_z; \\ \omega_x &= \Delta \omega_x, & \omega_y &= \Delta \omega_y, & \omega_z &= \Delta \omega_z; \\ \vartheta &= \vartheta_0 + \Delta \vartheta, & \psi &= \Delta \psi, & \gamma &= \Delta \gamma; \\ x_d &= x_{d_0} + \Delta x_d, & y_d &= y_{d_0} + \Delta y_d, & z_d &= \Delta z_d; \\ \delta_x &= \Delta \delta_x, & \delta_y &= \Delta \delta_y, & \delta_z &= \delta_{z_0} + \Delta \delta_z. \end{aligned}$$

同样，可将基准运动时的外力和外力矩项表示 (在对称定直飞行时它们都等于零) 为

$$\begin{aligned} \sum X_0 &= \sum Y_0 = \sum Z_0 = 0; \\ \sum M_{x_0} &= \sum M_{y_0} = \sum M_{z_0} = 0. \end{aligned}$$

而扰动运动的外力和外力矩项亦可用基准运动时的值 (均为零) 加上一个小扰动量来表示，即

$$\begin{aligned} \sum X &= \Delta \sum X, & \sum Y &= \Delta \sum Y, & \sum Z &= \Delta \sum Z; \\ \sum M_x &= \Delta \sum M_x, & \sum M_y &= \Delta \sum M_y, & \sum M_z &= \Delta \sum M_z. \end{aligned}$$

我们知道，不论基准运动或扰动运动，都应该满足动力学和运动学的普遍规律，即满足式 (5-2-1—4) 的微分方程组，故可将上面列出的基准运动参数和扰动运动参数均代入方程组，然后将对应的方程两两相减，并在运算过程中根据小扰动的概念略去二阶和二阶以上的小扰动量，结果就得到一组只包含小扰动量作为变量的线性化方程。它们是：

\* 我们选取地轴系时，使  $Ax_d y_d$  平面与基准运动的飞行平面相重合，故  $\psi_0$  与  $z_{d_0}$  均等于零。

$$\left\{ \begin{array}{l} m \left( \frac{d\Delta V_x}{dt} - V_{y0} \omega_z \right) = \sum X \\ m \left( \frac{d\Delta V_y}{dt} + V_{x0} \omega_z \right) = \sum Y \\ m \left( \frac{dV_z}{dt} + V_{y0} \omega_x - V_{x0} \omega_y \right) = \sum Z \end{array} \right. \quad (5-3-1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_x \frac{d\omega_x}{dt} - I_{xy} \frac{d\omega_y}{dt} = \sum M_x \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} - I_{xy} \frac{d\omega_x}{dt} = \sum M_y \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} = \sum M_z \end{array} \right. \quad (5-3-2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\gamma}{dt} = \omega_x - \operatorname{tg} \vartheta_0 \omega_y \\ \frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega_y}{\cos \vartheta_0} \\ \frac{d\Delta \vartheta}{dt} = \omega_z \end{array} \right. \quad (5-3-3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Delta x_d}{dt} = \Delta V_x \cos \vartheta_0 - \Delta V_y \sin \vartheta_0 - (V_{x0} \sin \vartheta_0 + V_{y0} \cos \vartheta_0) \Delta \vartheta \\ \frac{d\Delta y_d}{dt} = \Delta V_x \sin \vartheta_0 + \Delta V_y \cos \vartheta_0 + (V_{x0} \cos \vartheta_0 - V_{y0} \sin \vartheta_0) \Delta \vartheta \\ \frac{dz_d}{dt} = V_{y0} \gamma + V_z - (V_{x0} \cos \vartheta_0 - V_{y0} \sin \vartheta_0) \psi \end{array} \right. \quad (5-3-4)$$

由上述方程已可看出，在后面两组运动学方程中，纵向和横侧运动已经分离。具体来看，式(5-3-3)第三式和式(5-3-4)第一、二式只包含纵向小扰动参数，而式(5-3-3)第一、二式和式(5-3-4)第三式则只出现横侧小扰动参数。还可看出，在前两组动力学方程左端的惯性项中，纵向、横侧小扰动参数也各分别出现在一组方程之中，纵向和横侧运动也已分离。下面就需要进一步看，此时动力学方程的外力(力矩)项中，纵向和横侧小扰动参数是否也已分离？为此，就需要考查外力(矩)增量的具体表达形式。

设  $\Delta A = A - A_0$  为任一外力(矩)项增量(例如为  $\sum X$  或  $\sum M_x$ )，一般来说，它是所有小扰动参数的函数。而任何函数关系，总可以展成泰勒级数的形式。完整的泰勒展开式可以写成

$$\Delta A = A - A_0 = \left( D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \dots \right) A \quad (5-3-5)$$

式中  $D$  代表微分算子

$$D \equiv \left( \Delta V_x \frac{\partial}{\partial V_x} + \Delta V_y \frac{\partial}{\partial V_y} + \Delta V_z \frac{\partial}{\partial V_z} \right) + \left( \omega_x \frac{\partial}{\partial \omega_x} + \omega_y \frac{\partial}{\partial \omega_y} + \omega_z \frac{\partial}{\partial \omega_z} \right) \\ + \dots + \left( \Delta \dot{V}_x \frac{\partial}{\partial \dot{V}_x} + \Delta \dot{V}_y \frac{\partial}{\partial \dot{V}_y} + \Delta \dot{V}_z \frac{\partial}{\partial \dot{V}_z} \right) + \dots \quad (5-3-6)$$

式(5-3-5)包含项目极多,形简而实繁。根据我们学过的空气动力学知识和本教材《中册》所述,可以把其中绝大多数项目去掉而只保留主要几项。第一,由小扰动的概念,舍去所有变量的二次及二次以上项目。即(5-3-5)中取消 $D^2$ 以上项。第二,引入准定常假设的概念(详见第二章)。在引入这一假设后,式(5-3-6)中含 $\Delta \dot{V}_x \dots$ 及对时间的高阶导数均予忽略(这里必须指出,重要的力矩导数,即洗流时差导数 $M_z^*$ ,是不能忽略的,我们在以后实用的方程中将予保留,而此处姑且不予考虑)。在经过上述简化后,式(5-3-5)可写成

$$\Delta A = \left( \frac{\partial A}{\partial V_x} \right)_0 \Delta V_x + \left( \frac{\partial A}{\partial V_y} \right)_0 \Delta V_y + \dots + \left( \frac{\partial A}{\partial \vartheta} \right)_0 \Delta \vartheta + \dots \quad (5-3-7)$$

(包括所有小扰动变量与一阶导数的乘积项)

式中脚标“0”代表导数在基准状态取值。

下面我们就反过来讨论方程(5-3-7)是否实现了纵向和横侧小扰动参数的分离。

由于假定基准飞行状态是对称定直平飞,则由图5-1的示意关系可以看出,纵向气动力(矩)对于横侧小扰动参数在基准状态下的导数必等于零。图中曲线在基准状态处(纵轴上)的一阶导数连续,这一点是和实验结果符合的。

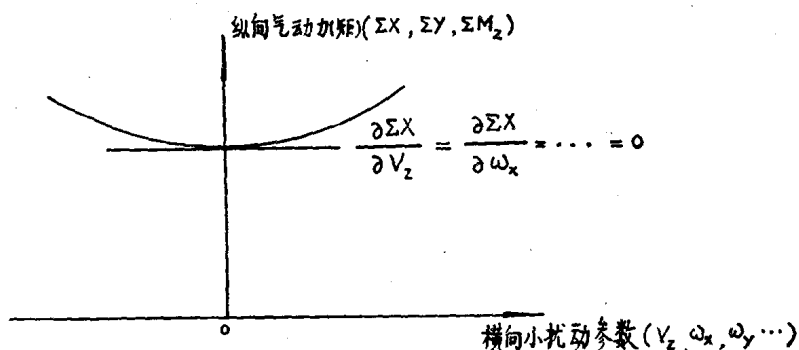


图5-1 纵向外力和横侧参数的示意关系

同样由对称定直飞行的概念可以立即看出,横侧气动力增量对纵向小扰动参数在基准状态的导数也必等于零。综合来看,如式(5-3-7)中 $\Delta A$ 是纵向外力增量则方程右端就只有纵向小扰动参数项,反之也是一样。这样,就实现了式(5-3-1)和(5-3-2)外力(矩)项的分离。

综上所述,可以把式(5-3-1—4)分成彼此独立的两组方程。其中一组为(5-3-1)的第一、二两式,(5-3-2)的第三式,(5-3-3)的第三式,(5-3-4)的第一、二两式,合称纵向小扰动方程组。它们是:

$$\left\{ \begin{aligned}
 m \left( \frac{d\Delta V_x}{dt} - V_{y_0} \omega_z \right) &= \left( \frac{\partial \Sigma X}{\partial V_x} \right)_0 \Delta V_x + \dots \\
 m \left( \frac{d\Delta V_y}{dt} + V_{x_0} \omega_z \right) &= \left( \frac{\partial \Sigma Y}{\partial V_x} \right)_0 \Delta V_x + \dots \\
 I_z \frac{d\omega_z}{dt} &= \left( \frac{\partial \Sigma M_z}{\partial V_x} \right)_0 \Delta V_x + \dots \\
 \frac{d\Delta \vartheta}{dt} &= \omega_z \\
 \frac{d\Delta x_d}{dt} &= \Delta V_x \cos \vartheta_0 - \Delta V_y \sin \vartheta_0 - (V_{x_0} \sin \vartheta_0 + V_{y_0} \cos \vartheta_0) \Delta \vartheta \\
 \frac{d\Delta y_d}{dt} &= \Delta V_x \sin \vartheta_0 + \Delta V_y \cos \vartheta_0 + (V_{x_0} \cos \vartheta_0 - V_{y_0} \sin \vartheta_0) \Delta \vartheta
 \end{aligned} \right. \quad (5-3-8)$$

这六个方程中包含  $\Delta V_x$ ,  $\Delta V_y$ ,  $\omega_z$ ,  $\Delta \vartheta$ ,  $\Delta x_d$ ,  $\Delta y_d$  和  $\Delta \delta_z$  等七个小扰动变量。而另一组为式 (5-3-1) 至 (5-3-4) 的其余各式, 合称横侧小扰动方程组。它们是:

$$\left\{ \begin{aligned}
 m \left( \frac{dV_z}{dt} + V_{y_0} \omega_x - V_{x_0} \omega_y \right) &= \left( \frac{\partial \Sigma Z}{\partial V_z} \right)_0 V_z + \dots \\
 I_x \frac{d\omega_x}{dt} - I_{xy} \frac{d\omega_y}{dt} &= \left( \frac{\partial \Sigma M_x}{\partial V_z} \right)_0 V_z + \dots \\
 I_y \frac{d\omega_y}{dt} - I_{xy} \frac{d\omega_x}{dt} &= \left( \frac{\partial \Sigma M_y}{\partial V_z} \right)_0 V_z + \dots \\
 \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_x - tg \vartheta_0 \omega_y \\
 \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\omega_y}{\cos \vartheta_0} \\
 \frac{dz_d}{dt} &= V_{y_0} \gamma + V_z - (V_{x_0} \cos \vartheta_0 - V_{y_0} \sin \vartheta_0) \psi
 \end{aligned} \right. \quad (5-3-9)$$

这六个方程中包含  $V_z$ ,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $Z_d$  和  $\delta_x$ ,  $\delta_y$  等八个小扰动变量。

方程 (5-3-8) 和 (5-3-9) 还不是我们采用的小扰动方程的最后形式, 这是由于: 第一, 各动力学方程的外力项尚未展开成包括所有必要项目的形式。第二, 纵向小扰动方程 (5-3-8) 是对机体轴系写出的 (见附录 I)。根据我国的习惯, 研究纵向动态特性的多用气流轴系。为此, 需将式 (5-3-8) 转换成对气流轴系的形式, 并进行变量变换。下面就来进行这一工作。

首先对纵向小扰动方程 (5-3-8) 进行坐标变换。由 § I-2 可知, 推导飞机动力学方程的全过程显然对于原点与重心相重合、而  $OXY$  平面又在飞机对称面内的任何动坐标轴系都是适用的。但是我们选用的却是与飞机相固联的机体轴系。采用这一轴系的明显优点在于对于机体轴系的转动惯量  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$  以及惯性积  $I_{xy}$  均为常值而不随飞行姿态变化, 且  $I_{xz} = I_{yz} = 0$ , 因而解方程时惯性项简化。对于纵向运动来说, 如果我们采用气流轴系,

则由于飞机的运动限于在对称面内，因而只用到  $I_z$ ，而  $I_z$  仍为常值，故惯性项上并不会增加麻烦，而外力项（特别是其中的气动力参数）方面却更符合于我们在空气动力学中的习惯。下面就来推导对气流轴系写出的纵向小扰动方程。

如将式 (5-3-8) 中第一、二两个力方程视为对气流轴系导出的，则由图 5-2 中的几何关系可以看出有  $V_{x_0} = V_0$ ， $V_{y_0} = 0$ ， $\Delta V_x = \Delta V$ ，而气流轴系转动角速度分量

$\omega_z = \frac{d\Delta\theta}{dt}$ 。利用上述关系，立即可以把式 (5-3-8) 中第一、二两式的左端（惯性项）

改成对气流轴系的形式

$$m \frac{d\Delta V}{dt} = \dots\dots$$

$$mV_0 \frac{d\Delta\theta}{dt} = \dots\dots$$

而且由于  $\frac{dX_d}{dt} = V \cos\theta$  和  $\frac{dY_d}{dt} = V \sin\theta$ ，可以直接得出运动学方程

$$\frac{d\Delta x_d}{dt} = \cos\theta_0 \cdot \Delta V - V_0 \sin\theta_0 \cdot \Delta\theta$$

$$\frac{dy_d}{dt} = \sin\theta_0 \cdot \Delta V + V_0 \cos\theta_0 \cdot \Delta\theta$$

来取代式 (5-3-8) 的第五、六两式。同时式 (5-3-8) 的第三、四两式保持不变。

至于改为对航迹轴写出的两个力方程的外力项增量，可以通过图 5-2 中作用于飞机的外力  $G$ ， $P$ （假设它通过重心）， $Y$ ， $Q$  及这些力与航迹轴的几何关系，根据 § 5-2 中对外力项所作的分析，将它们展开成如下形式：

$$\Delta G = 0$$

$$\Delta P = P^V \Delta V + P^H \Delta H$$

$$\Delta Y = Y^V \Delta V + Y^\alpha \Delta\alpha + Y^H \Delta H$$

$$\Delta Q = Q^V \Delta V + Q^\alpha \Delta\alpha + Q^H \Delta H$$

式中

$$P^V = \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_0, \dots\dots$$

同样可将式 (5-3-8) 第三个力矩方程的外力矩增量展开成

$$\Delta M_z = M_z^V \Delta V + M_z^\alpha \Delta\alpha + M_z^{\dot{\alpha}} \Delta\dot{\alpha} + M_z^{\omega_z} \omega_z + M_z^H \Delta H + M_z^{\delta_z} \Delta\delta_z^*$$

\* 此组外力（矩）项增量表达式中忽略了平尾对全机升力、阻力的影响，即忽略  $Y^\alpha \Delta\dot{\alpha}$ ， $Y^{\delta_z} \delta_z$ ， $Q^{\delta_z} \delta_z$  和  $Y^{\omega_z} \omega_z$ （主要由平尾产生）等项。

式中还用  $\Delta H$  代替了  $\Delta Y_d$ 。因为飞行高度  $H$  和重心对地座标  $Y_d$  仅差一个常量，即  $H = Y_d + C$ 。

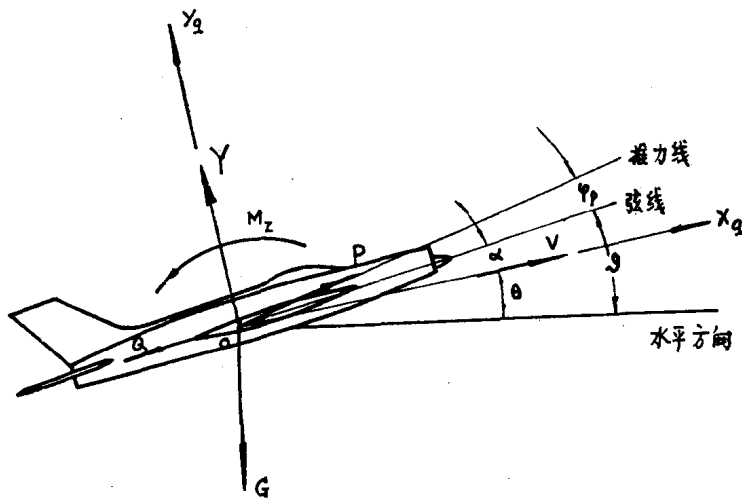


图5—2 飞行速度和作用在飞机上的各外力与气流轴系的关系

综上所述，并利用本节中讨论过的小扰动法的一般原则，即可得到对气流轴系列出的纵向小扰动方程为：

$$\left. \begin{aligned}
 m \frac{d\Delta V}{dt} &= (P^V \Delta V + P^H \Delta H) \cos(\alpha_0 + \varphi_p) - P_0 \sin(\alpha_0 + \varphi_p) \Delta \alpha \\
 &\quad - (Q^V \Delta V + Q^\alpha \Delta \alpha + Q^H \Delta H) - mg \cos \theta_0 \Delta \theta \\
 m V_0 \frac{d\Delta \theta}{dt} &= (P^V \Delta V + P^H \Delta H) \sin(\alpha_0 + \varphi_p) + P_0 \cos(\alpha_0 + \varphi_p) \Delta \alpha \\
 &\quad + (Y^V \Delta V + Y^\alpha \Delta \alpha + Y^H \Delta H) + mg \sin \theta_0 \Delta \theta \\
 I_z \frac{d\omega_z}{dt} &= M_z^V \Delta V + M_z^\alpha \Delta \alpha + M_z^{\dot{\alpha}} \Delta \dot{\alpha} + M_z^{\omega_z} \omega_z + M_z^H \Delta H + M_z^{\delta_z} \Delta \delta_z \\
 \frac{d\Delta x_d}{dt} &= \cos \theta_0 \Delta V - V_0 \sin \theta_0 \Delta \theta \\
 \frac{d\Delta H}{dt} &= \sin \theta_0 \Delta V + V_0 \cos \theta_0 \Delta \theta \\
 \frac{d\Delta \vartheta}{dt} &= \omega_z \\
 \Delta \theta &= \Delta \vartheta - \Delta \alpha
 \end{aligned} \right\}$$

(5—3—10)\*

式(5—3—10)共七个方程，包含 $\Delta V$ ， $\Delta \theta$ ， $\Delta \vartheta$ ， $\Delta \alpha$ ， $\omega_z$ ， $\Delta x_d$ ， $\Delta H(\Delta y_d)$ ， $\Delta \delta_z$ 等共八个小扰动变量。下面，将上述方程作如下加工整理：第一，将方程划分为两类：第一类称为耦合方程，这些方程彼此互相影响，必须同时求解；第二类称为非耦合方程，它

\* 最后一个方程用于变量置换。可由几何关系式 $\theta = \vartheta - \alpha$ (见图5—2)小扰动化后得出。

们不影响别的方程，因此可以在耦合方程解出之后再单独求解。第二，根据关系式  $\Delta\theta = \Delta\vartheta - \Delta\alpha$  和  $\omega_z = d\Delta\vartheta/dt$ ，在耦合方程组中消去变量  $\Delta\theta$  和  $\omega_z$ 。第三，在耦合方程组中，按变量  $\Delta V$ ， $\Delta\alpha$ ， $\Delta\vartheta$ ， $\Delta H$  和  $\Delta\delta_z$  的顺序排列，并把  $\Delta\delta_z$  作为输入量放在等式右边，而把其余变量作为输出量放在等式左边。结果，得到飞机的纵向小扰动方程组如下：

——偶合的方程组（包含  $\Delta V$ ， $\Delta\alpha$ ， $\Delta\vartheta$ ， $\Delta H$ ， $\Delta\delta_z$  五个变量）

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ m \frac{d}{dt} - [P^V \cos(\alpha_0 + \varphi_p) - Q^V] \right\} \Delta V + [P_0 \sin(\alpha_0 + \varphi_p) + Q^a - mg \cos \theta_0] \Delta \alpha \\ & + mg \cos \theta_0 \Delta \vartheta - [P^H \cos(\alpha_0 + \varphi_p) - Q^H] \Delta H = 0 \\ & \cdot [P^V \sin(\alpha_0 + \varphi_p) + Y^V] \Delta V - \left\{ m V_0 \frac{d}{dt} + [Y^a + P_0 \cos(\alpha_0 + \varphi_p) - mg \sin \theta_0] \right\} \Delta \alpha \\ & + [m V_0 \frac{d}{dt} - mg \sin \theta_0] \Delta \vartheta - [P^H \sin(\alpha_0 + \varphi_p) + Y^H] \Delta H = 0 \\ & - M_z^V \Delta V - (M_z^a \frac{d}{dt} + M_z^a) \Delta \alpha + (I_z \frac{d^2}{dt^2} - M_z^{\omega_z} \frac{d}{dt}) \Delta \vartheta - M_z^H \Delta H \\ & = M_z^{\delta_z} \Delta \delta_z \\ & - \sin \theta_0 \Delta V + V_0 \cos \theta_0 \Delta \alpha - V_0 \cos \theta_0 \Delta \vartheta + \frac{d \Delta H}{dt} = 0 \end{aligned} \right. \quad (5-3-11)$$

——非耦合的方程（增加了  $\Delta x_d$ ， $\Delta\theta$ ， $\omega_z$  三个变量）

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{d \Delta x_d}{dt} = \cos \theta_0 \Delta V - V_0 \sin \theta_0 \Delta \theta \\ & \frac{d \Delta \vartheta}{dt} = \omega_z \\ & \Delta \theta = \Delta \vartheta - \Delta \alpha \end{aligned} \right. \quad (5-3-12)$$

仍采用对于机体轴系写出的横侧小扰动方程（5-3-9），对此组方程可作与上述过程相类似的处理。首先根据对外力项的分析，将横侧力（矩）增量展开成

$$\begin{aligned} \sum Z &= Z^\beta \beta + Z^{\omega_x} \omega_x + Z^{\omega_y} \omega_y + Z^{\delta_y} \delta_y - Q_0 \beta + mg \cos \vartheta_0 \gamma^* \\ \sum M_x &= M_x^\beta \beta + M_x^{\omega_x} \omega_x + M_x^{\omega_y} \omega_y + M_x^{\delta_x} \delta_x + M_x^{\delta_y} \delta_y \\ \sum M_y &= M_y^\beta \beta + M_y^{\omega_x} \omega_x + M_y^{\omega_y} \omega_y + M_y^{\delta_x} \delta_x + M_y^{\delta_y} \delta_y \end{aligned}$$

然后，进行下述处理：第一，将对机体轴系的几何关系式  $V_z^* = V_0 \beta$ ， $V_y = -V_0 \alpha$ ， $V_x = V$  代入（5-3-9）第一式，用变量  $\beta$  取代  $V_z$ 。第二，将方程分为耦合的和非耦合的两类。第三，在耦合方程组中，按变量  $\beta$ ， $\omega_x$ ， $\omega_y$ ， $\gamma$ ， $\delta_x$ ， $\delta_y$  的顺序排列，并把  $\delta_x$  和  $\delta_y$  作

\* 气动力  $Q, Z$  是在气流轴系中定义的，故对机体轴有  $Z_i = Z \cos \beta - Q \sin \beta$ 。将此式用小扰动法处理后，即得本式之前五项。第六项很容易看出为重力在  $OZ_i$  方向投影的增量。

为输入量放在等式右边，而把其余变量放在等式左边。结果，得到飞机的横侧小扰动方程组如下：

——耦合的方程组（包含  $\beta$ ,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\gamma$ ,  $\delta_x$ ,  $\delta_y$  六个变量）

$$\left\{ \begin{aligned} [mV_0 \frac{d}{dt} - (Z^\beta - Q_0)]\beta - (mV_0 \alpha_0 + Z^{\omega_x})\omega_x - (mV_0 + Z^{\omega_y})\omega_y \\ - mg \cos \vartheta_0 \gamma = Z^{\delta_y} \delta_y \\ - M_x^\beta \beta + (I_x \frac{d}{dt} - M_x^{\omega_x})\omega_x - (I_{xy} \frac{d}{dt} + M_x^{\omega_y})\omega_y = M_x^{\delta_x} \delta_x + M_x^{\delta_y} \delta_y \\ - M_y^\beta \beta - (I_{xy} \frac{d}{dt} + M_y^{\omega_x})\omega_x + (I_y \frac{d}{dt} - M_y^{\omega_y})\omega_y = M_y^{\delta_x} \delta_x + M_y^{\delta_y} \delta_y \\ - \omega_x + tg \vartheta_0 \omega_y + \frac{d\gamma}{dt} = 0 \end{aligned} \right. \quad (5-3-13)$$

——非耦合的方程（增加了  $\psi$ ,  $Z_d$  两个变量）

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{1}{\cos \vartheta_0} \omega_y \\ \frac{dZ_d}{dt} &= -V_0 \cos \vartheta_0 \psi + V_0 (\beta - \sin \alpha_0 \gamma) \end{aligned} \right. \quad (5-3-14)$$

## §5-4 小扰动方程的无因次化

### 一、采用无因次形式的小扰动方程的原因，无因次系统表

上节得出的扰动运动方程都是有因次的。利用这组方程直接求解结果当然是可以的，在实际计算中有时也这样做。但在飞行力学中，常将小扰动方程写成无因次的形式。这是由于方程中出现的各气动力，习惯上常以无因次的系数形式给出（例如升力常用  $C_y$  而不是  $Y$  来表示），而由无因次方程所得的结论中，便于我们分析各气动系数的影响，而有利于飞机的气动分析和设计。使方程无因次化，实质上也就是使方程规格化。

这里需要指明，不同国家，甚至不同书籍、文献中无因次结果往往不一样，这主要是因为：(1) 选用的座标轴系不一样；(2) 选用的时间常数不一样；(3) 选用的质量常数不一样；(4) 选用的特征长度不一样；(5) 无因次气动导数的定义不一样。因此在阅读资料时，必须首先弄清所用的座标轴系和符号的定义。本教材中介绍我国目前采用的无因次系统。

下面首先列出无因次系统表，通过它把方程中所有出现的有因次量用无因次量的形式来表示。即表中第一列（有因次量），等于第二列（除数）与第三列（无因次量）的乘积。所有的无因次量，除大家熟悉的气动力（矩）系数外，均称为“无因次  $\times \times$  量”，例如表中  $\bar{V}$ ,  $\bar{H}$ ,  $\bar{\rho}$  分别称为无因次速度，无因次高度和无因次密度。个别量在飞行力学中有专门名词表示，我们在第四列备注中注明。



无因次系统表

有因次量	除数	无因次量	备注
$Q, Y, Z, P, G$	$\frac{1}{2} \rho_0 V_0^2 S$	$C_x, C_y, C_z, C_p, C_G$	
$M_z$	$\frac{1}{2} \rho_0 V_0^2 S b_A$	$m_z$	
$M_x, M_y$	$\frac{1}{2} \rho_0 V_0^2 S l$	$m_x, m_y$	
$V$	$V_0$	$\bar{V}$	
$\omega_z, \dot{\alpha}$	$V_0/b_A$	$\bar{\omega}_z, \bar{\alpha}$	
$\omega_x, \omega_y$	$V_0/(l/2)$	$\bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y$	
$m$	$\rho_0 S b_A/2$	$\mu_1$	相对密度 (纵向)
$m$	$\rho_0 S l/2$	$\mu_2$	相对密度 (横侧)
$I_z$	$m b_A^2$	$\bar{I}_z^2$	} $\bar{I}_x, \bar{I}_y, \bar{I}_z$ 称为绕 $ox,$ $oy, oz$ 轴 of 的无因次惯性半径
$I_x, I_y, I_{zy}$	$m(l/2)^2$	$\bar{I}_x^2, \bar{I}_y^2, \bar{I}_{xy}^2$	
$x_d, H$	$b_A$	$\bar{x}_d, \bar{H}$	
$Z_d$	$l/2$	$\bar{Z}_d$	
$t$	$\tau_1 = 2m/\rho_0 S V_0$	$\bar{t}$	(纵向)
$t$	$\tau_2 = m/\rho_0 S V_0$	$\bar{t}$	(横侧)
$a$	$a_0$	$\bar{a}$	
$\rho$	$\rho_0$	$\bar{\rho}$	

上表中  $a$  为音速，方程中尚未出现。但在无因次过程中用到它，故列出。又  $\rho_0$  为基准状态之大气密度，注意勿与海平面的密度相混。

## 二、纵向小扰动方程的无因次形式

为了将纵向小扰动方程 (5-3-11) 和 (5-3-12) 无因次化，需要先将方程中各有因次量写成表中除数与无因次量的乘积，然后将各式用某一因次通除。这一过程从原理上说十分简单，但由于项目和参数较多，特别是有的参数是一个以上变量的函数，使得求导数比较麻烦，所以整个无因次化过程仍是一项细致而繁琐的工作。下面我们只举方程 (5-3-11) 第一式为例，说明无因次化的过程，而直接引出其它方程的无因次化的结果。学习的重点也在于弄清无因次化的原理，而无须逐一推导每一方程。

方程 (5-3-11) 的第一式中，各有因次量可表示成 (无因次系统表中已有的项目不予列出)：