大 學 用 書

商用微積分

何 典 恭 著

三民書局印行

商 用 微 積 分

何 典 恭 著

學歷：國立師範大學數學系畢業
經歷：清華大學助敎
淡水工商管理專科學校講師
副敎授、科主任
國立海洋學院兼任副敎授
現職：私立淡水工商管理專科學校敎務主任

三 民 書 局 印 行

行政院新聞局登記證局版臺業字第〇二〇〇號

中華民國六十九年一月初版

© 商用微積分

基本定價肆元貳角伍分

編著者 何典恭

發行人 劉振強

出版者 三民書局股份有限公司

印刷所 三民書局股份有限公司
臺北市重慶南路一段六十一號
郵政劃撥九九九九八號

序　　言

鑒於工商管理院校中，管理科學及計量分析課程的快速發展，微積分課程乃成為不可或缺的基礎。

國內近十年來，體認到中文教本對於革新科學教育之重要性，已有多種中文大學用書問世，微積分的中文教本尤多。然而，編者有感於專為商科學生編寫的，介紹微積分在商科上之應用者甚少，乃憑多年的教學經驗，參考中外的專籍，勉力編成本書，期能裨益於商科的基礎科學教育。雖然，本書因已包含了微積分課程的主要內容，對於一般要初識此一課程之讀者，亦甚適合。

學習本書之讀者，必須具備國內高中高職或相當程度的數學知識，包括代數、三角、平面與解析幾何等。本書對於微分、積分的基本概念、性質及與之有關的基本方法及應用，均作詳細的系統的解說，對於過深的理論則儘量避免，而代之以常識、直覺與圖形來說明，文字的敍述力求平白，務期深入淺出，使讀者對微積分課程有一完整的認識。本書對於例題與習題，均細心精選，以期加強概念，示範求解方法，全書的應用例題、習題甚多，幾乎全為商科上的實際問題。

本書書後附有積分表，重要數值表及中英名詞對照索引，以便於查索、參考。

本書之能完成，應感謝內子陳淑梅女士的精神支援，其加倍的內外辛勞，才能使編者專心致力而無後顧之憂。另外，因編寫工作而剝削了念修、承書二子的伴學遊樂時間，亦使編者深以為歉。

最後，要感謝三民書局劉經理的鼓勵、督促，及願意出版本書。編

者自知才疏學淺，雖然編校均已竭盡心力，但疏漏必仍難免，敢望諸先進不吝指正，則甚幸焉。

編者　謹識

民國六十八年七月

商用微積分　目次

第一章　實數及函數

1-1　實數及其性質，直線坐標系……………………………… 1
1-2　平方根、絕對值、不等式……………………………………10
1-3　函數的意義及結合………………………………………………17
1-4　直角坐標平面，實函數的圖形…………………………………23
1-5　商業上的函數實例………………………………………………35
1-6　可逆函數……………………………………………………………42

第二章　極限與連續

2-1　極限的意義及性質………………………………………………49
2-2　極限的求法…………………………………………………………57
2-3　連續的概念及性質………………………………………………63
2-4　三角函數及其連續性……………………………………………68

第三章　導函數

3-1　瞬間變率與切線之斜率…………………………………………75
3-2　導數與導函數………………………………………………………79
3-3　基本代數函數的導函數…………………………………………84
3-4　三角函數的導函數………………………………………………92
3-5　連鎖律………………………………………………………………95

3-6 可逆函數與反三角函數的導函數…… 101
3-7 隱函數的微分法…… 106
3-8 高階導函數…… 110
3-9 函數的微分…… 112

第四章 導函數的性質

4-1 函數的極值…… 117
4-2 均值定理，增函數與減函數…… 123
4-3 反導函數…… 127
4-4 函數圖形的描繪…… 132
4-5 羅比達法則…… 139

第五章 導函數在商業上的應用

5-1 在經濟學上概念的應用…… 143
I. 邊際成本…… 143
II. 邊際收入…… 145
III. 需求彈性…… 146
IV. 成本彈性…… 150
V. 邊際消費傾向…… 151
5-2 極值的問題…… 157
I. 成本與收入的最佳化…… 157
II. 最大稅收問題…… 159
III. 庫存控制問題…… 161
IV. 一般極值問題…… 164

第六章　定積分

6-1　定積分的意義及性質…… 169

6-2　微積分基本定理…… 176

6-3　曲線所圍區域之面積，截面積已知之立體體積…… 184

第七章　對數與指數函數

7-1　自然對數函數…… 195

7-2　自然指數及實數指數函數…… 201

7-3　一般之對數函數，實數 e 之意義…… 208

7-4　指數函數的應用…… 217

第八章　積分的技巧及應用

8-1　基本公式…… 225

8-2　分部積分法…… 233

8-3　三角函數的積分法…… 239

8-4　代換積分法…… 251

8-5　有理函數的積分法…… 260

8-6　積分表的利用…… 266

8-7　數值積分法—西姆松法則…… 269

8-8　廣義積分…… 277

8-9　積分在經濟學上的應用…… 282

第九章　多變數函數的微分與積分

9-1　多變數函數…… 295

9-2　二變數函數的圖形…………………………………………… 299
9-3　偏導函數的意義及求法，全微分…………………………… 307
9-4　極值問題………………………………………………………… 315
　　I.　一般極值問題……………………………………………… 315
　　II.　最小平方廻歸直線………………………………………… 321
　　III.　二元線性函數的極值，簡易線性規劃問題…………… 325
　　IV.　附帶條件的極值問題—拉格蘭日乘子………………… 331
9-5　二重積分，疊積分……………………………………………… 338

附錄一　積分表

附錄二　自然對數函數值表

附錄三　自然指數函數值表

附錄四　中英名詞對照索引

附錄五　英中名詞對照索引

主要參考書

第一章　實數及函數

1-1　實數及其性質，直線坐標系

微積分（*calculus*）的數學結構，是以實數為基礎的。本節的目的，在於將實數作一概要的敍述，並提出一些重要的性質。

自然數（*natural number*）是指集合

$$N=\{1,2,3,\cdots\cdots\}$$

之元素，下面所述是關於它的二個重要性質。

數學歸納法原理（*principle of mathematical induction*）

設 $S\subset N$，且有下面二性質：

（i）$1\in S$,

（ii）$k\in S\Rightarrow k+1\in S$,

則　$S=N$。

整序性（*well ordering*）

設 $\phi\neq A\subset N$，則 A 有最小元素，即存在 $n_0\in A$ 使得

$n_0\leqq n$，對任意 $n\in A$ 均成立。

整數（*integer*）是指集合

$$Z=\{0,1,-1,2,-2,\cdots\cdots\}$$

之元素，此集合包含 N，其部份集合

$$E=\{2n\mid n\in Z\}$$

的元素稱為**偶數**（*even number*），而 Z 減 E 之差集合

$$Z-E=\{n\in Z \mid n\notin E\}$$

的元素稱爲**奇數** (*odd number*)。

有理數 (*rational number*) 是指集合

$$Q=\left\{\frac{q}{p} \;\middle|\; p,q\in Z,\ \ p\neq 0\right\}$$

之元素，通常亦稱爲**分數** (*fraction*)。有理數皆能表爲**有限小數** (*finite decimal*) 或**無限循環小數** (*repeating decimal*)。分母爲 1 的分數卽爲整數，故 $Q\supset Z$。無限不循環的小數稱爲**無理數** (*irrational number*)。無理數與有理數的全體稱爲**實數** (*real number*)，以 R 表實數全體所成的集合，卽知

$$R\supset Q\supset Z\supset N。$$

實數所具有的一些基本性質綜述於下:

1. **交換性** 對任意 $x,\ y\in R$ 而言，皆有

$$x+y=y+x,\ \ xy=yx。$$

2. **結合性** 對任意 $x,y,z\in R$ 而言，皆有

$$(x+y)+z=x+(y+z),\qquad (xy)z=x(yz)。$$

3. **分配性** 對任意 $x,y,z\in R$ 而言，皆有

$$x(y+z)=xy+xz。$$

4. **單位元素的存在性** 存在有 0 與 1 二相異實數，使得對任意 $x\in R$ 而言，皆有

$$x+0=x,\qquad x\cdot 1=x。$$

5. **反元素的存在性** 對任意 $x\in R$ 而言，均有唯一的實數，記爲 $-x$，稱爲 x 的**加法反元素**，使得

$$x+(-x)=0;$$

對任意不爲 0 之 $x\in R$ 而言，均有唯一的實數，記爲 x^{-1} 或

$\frac{1}{x}$，稱爲 x 的**乘法反元素**，使得

$$x\cdot\frac{1}{x}=1。$$

上面所述的諸性質，對於有理數而言亦皆具有，我們稱具有上述五性質的"數系"爲一**體**（*field*）。實數除了具有上述的性質外，尚有一有理數所無的性質，稱爲**完全性**（*completeness*）。關於實數的完全性，本書不打算作過多的介紹，而僅在介紹由其引出的實數之性質時，提醒讀者注意。譬如，下面要說明的直線坐標系，即須藉實數的完全性，才能建立。

首先，我們在 Z 中定義**次序關係**（*order relation*）。對 Z 中二相異元素 x,y 而言，若存在 $n\in N$，使得

$$x+n=y,$$

則稱 x 小於 y 或 y 大於 x，記爲 $x<y$ 或 $y>x$。顯然，對任意 $n\in N$ 而言，恒有

$$n>0, \qquad -n<0。$$

對於 $x,y\in Q$，且

$$x=\frac{q_1}{p_1}, \qquad y=\frac{q_2}{p_2},$$

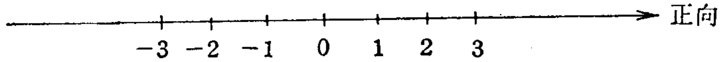
$p_1,p_2\in N$，$q_1,q_2\in Z$ 而言，若

$$y-x=\frac{p_1q_2-p_2q_1}{p_1p_2}$$

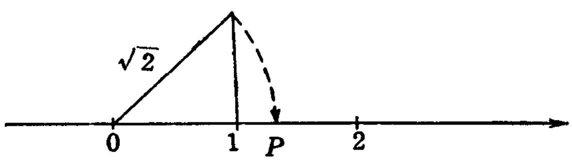
中，$p_1q_2-p_2q_1>0$，則稱 x 小於 y 或 y 大於 x，記爲 $x<y$ 或 $y>x$。

今於直線上任取一點，以表實數 0，稱爲**原點**（*origin*），並另取一點以表實數 1，稱爲**單位點**（*unit*），直線上以原點爲起點，指向單位點的一向稱爲**正向**（*positive direction*），另一向稱爲**負向**。在直線上以原

點與單位點爲基準，依相等間隔取點，然後將整數由小而大，從負向到正向，依次列於直線上，如下圖所示：



若將上述的間隔等分，則可將$\frac{-1}{2}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{5}{2}$，…等的有理數由小而大從負向到正向排於直線上；同樣的，用各種不同的方法細分各間隔，可將所有的有理數列於直線上，且較大者在較小者的正向。換句話說，祇要於直線上取定原點和單位點，則任何一有理數均可唯一確定的排列於直線上。易知，對任意二個相異的有理數 x,y 而言，$\frac{1}{2}(x+y)$亦爲有理數，且排列於 x,y 所排列二點之中點，從而知 x,y 間排有無限多個有理數。雖然有理數緻密的排列到直線上，然而有理數仍未佈滿直線，譬如$\sqrt{2}=1.41421\cdots\cdots$爲一無理數，因此下圖中之 P 點即無有理數排列於其上。事實上，若我們將無理數亦排列到直線上，則可恰好佈滿直線，關於這一點，則須賴實數的完全性來肯定。至於無理數要如



何排到直線上呢？我們舉一例來說明，譬如無理數

$$\pi=3.14159\cdots\cdots,$$

我們要將之排於 3 的正向，4 的負向；3.1 的正向，3.2 的負向；3.14 的正向，3.15 的負向；3.141 的正向，3.142 的負向；3.1415 的正向 3.1416 的負向；…等，而直線上確有唯一的一點，滿足上述的描述。當我們將實數排列到直線上後，直線上的每一點恰有一實數代表它，而

每一實數亦恰有直線上的一點與之對應。這一佈滿實數的直線就稱爲**實數線** (*real line*) 或**直線坐標系** (*line coordinate system*)，各點所表的實數稱爲該點的**坐標** (*coordinate*)，通常以 $P(x)$ 表實數線上坐標爲 x 之點 P。此後，數線上的點 $P(x)$ 與其坐標 x 常不特加以區分。坐標爲有理數的點稱爲**有理點** (*rational point*)，坐標爲無理數的點稱爲**無理點** (*irrational point*)。由實數的完全性可證明，任意二相異點之間均有無限多的有理點與無理點。此外，讀者應該了解，比較起來，有理點要比無理點"少得多"，使得你任意從數線上取一點時，所取得之點爲有理點的情況幾乎不可能。

我們利用實數線來定義實數的次序。若 $P(y)$ 在 $P(x)$ 之正向，則稱 x 小於 y 或 y 大於 x，記爲 $x<y$ 或 $y>x$。大於 0 的數稱爲**正數** (*positive number*)，小於 0 的數稱爲**負數** (*negative number*)。故自然數亦稱爲**正整數** (*positive integer*)。

設 $a<b$，則下面各點集合均稱爲**區間** (*interval*):

$$[a,b]=\{x\,|\,a\leqq x\leqq b\},$$

$$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\},$$

$$[a,b)=\{x\,|\,a\leqq x<b\},$$

$$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqq b\},$$

$$[a,\infty)=\{x\,|\,x\geqq a\},$$

$$(a,\infty)=\{x\,|\,x>a\},$$

$$(-\infty,a]=\{x\,|\,x\leqq a\},$$

$$(-\infty,a)=\{x\,|\,x<a\},$$

$$(-\infty,\infty)=R,$$

前四者稱爲**有限區間** (*finite interval*)，a，b 稱爲其**端點** (*end point*)，其餘則稱爲**無窮區間** (*infinite interval*)。有限區間 $[a,b]$ 稱爲**閉區間**

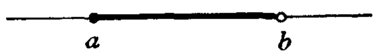
(*closed interval*)，而 $[a,b)$ 或 $(a,b]$ 則均稱爲**半閉或半開** (*half-closed, half-open interval*)。

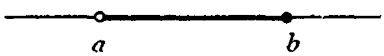
設集合 $A\subset R$，則實數線上之點集合 $\{P(x)\mid x\in A\}$ 稱爲 A 的**圖形** (*graph*)。區間的圖形如下諸圖所示:

$[a,b]$ 

(a,b) 

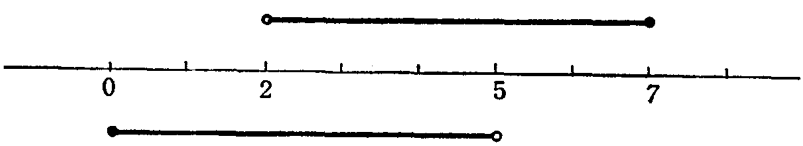
(a,∞) 

$[a,b)$ 

$(a,b]$ 

$(-\infty,a]$ 

通常，爲表明上之方便起見，常把圖形畫於數線的上方或下方。譬如下圖表出集合 $[0,5)$ 與 $(2,7]$，並從而知



$$[0,5)\cup(2,7]=[0,7],$$

$$[0,5)\cap(2,7]=(2,5)。$$

關於實數的次序關係，有下述的重要性質:

(1) **三一律** (*trichotomy law*)

對任意之 $x,y\in R$ 而言，恰有下面三者之一成立:

$$x<y,\quad x=y,\quad x>y。$$

(2) **遞移律** (*transitive law*)

對任意之 $x,y,z\in R$ 而言，若 $x<y$ 且 $y<z$，則 $x<z$。

(3) **加法律** (*additive law*)

設 $x,y\in R$，且 $x<y$，則對任意 $z\in R$ 而言，皆有

$$x+z<y+z。$$

(4) **乘法律** (*multiplicative law*)

設 $x,y\in R$，且 $x<y$，則對任意 $a>0$ 而言，皆有

$$ax<ay。$$

由上述四個基本性質，可推得一切有關實數次序關係的式子，下面卽爲一些熟知的定理:

定理 1-1

對 $x,y\in R$ 而言，$x<y\Leftrightarrow -x>-y$。

定理 1-2

對 $x,y\in R$，且 $a<0$ 而言，$x<y\Leftrightarrow ax>ay$。

定理 1-3

對 $x,y\in R$ 而言，$x<y\Leftrightarrow x-y<0$。

定理 1-4

設 $x\neq 0$，則 $x^2>0$。

定理 1-5

設 $x,y\in R$，則

$$xy>0 \Leftrightarrow (x>0 \text{ 且 } y>0) \text{ 或 } (x<0 \text{ 且 } y<0)。$$

定理 1-6

設 $x,y,z,w\in R$，則

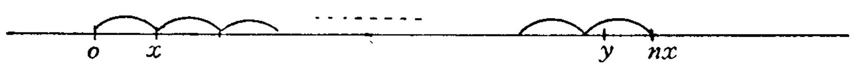
$$x<y \text{ 且 } z<w\Rightarrow x+z<y+w。$$

下面關於實數次序之重要性質，可由完全性推得，在此提出而不證明。

定理 1-7 阿基米德性質 (*Archimedian property*)

設 $x,y\in R$，$x>0$，則存在 $n\in N$，使得 $nx>y$。

上述阿基米德性質的幾何意義是，不管 x 爲怎麼樣（小）的正數，而 y 爲怎麼樣（大）的實數，以 x 來度量 y，經過有限次，必可超過 y，如下圖所示：



例 1 設 ε 爲一任意之正數，則必有一自然數 n_0 使得

$$n\geqq n_0\Rightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon,$$

試證之。

證 因爲 ε 爲一正數，由阿基米德性質知，必有一自然數 n_0 使

$$n_0\varepsilon>1。$$

由習題第 8 題知，$\frac{1}{n_0}>0$，故由乘法律得

$$\frac{1}{n_0}(n_0\varepsilon)>\frac{1}{n_0}\cdot 1,$$

$$\varepsilon>\frac{1}{n_0}。$$

由習題第 9 題知，