初中数学

复习提纲

遵义市教育局教研室

一九七八年三月

初中数学目录

第一章 代　　数

一、实　　数

1．实数概念　有理数和无理数总称实数。

有理数　整数和分数总称有理数。

无理数　无限不循环小数叫做无理数。

实数的分类如下表：

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）：}1,2,3,\cdots\\ \text{零：}0\\ \text{负整数：}-1,-2,\cdots\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数：}\frac{2}{3},\ 1\frac{5}{7},\ \cdots\\ \text{负分数：}-\frac{1}{2},\ -20\frac{7}{11}\cdots\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数：}\sqrt{2},\ \sqrt{7},\ \cdots\\ \text{负无理数：}-\sqrt{2},\ -\pi,\cdots\end{cases}\end{cases}
$$

2．数轴、绝对值、互为相反的数、实数大小的比较

（1）数轴（亦称为实数轴）　具有方向、原点和单位长度的直线叫数轴。方向通常规定为由左到右，数轴上任一点，代表一个确定的实数；任一实数，都可用数轴上的一个确定的点来表示。这两类题必须会做。

（2）绝对值　数轴上表示某数的点与原点的距离，叫该

数的绝对值。a 的绝对值记为 $|a|$,0 的绝对值为 0。

$$|a| = \begin{cases} a & (\text{当 } a \geqslant 0 \text{ 时}), \\ -a & (\text{当 } a < 0 \text{ 时})。 \end{cases}$$

(3) 互为相反的数　3 和 (-3)叫互为相反的数。相反的数在数轴上是位于原点两侧而与原点距离相等的两点。0 的相反数是 0。

(4) 实数大小的比较：设两个实数为 α 和 β,并设在数轴上点 A 表示 α,点 B 表示 β。若 A 在 B 左,则称 $\alpha<\beta$；若 A 与 B 重合，则称 $\alpha=\beta$。因此：

① 任何负数<零<任何正数，如 $-2<0$，$-5<3$；

② 正数中，绝对值大的数较大，如 $7.53>7.5$；

③ 负数中，绝对值大的数较小，如 $-\sqrt{3}<-\sqrt{2}$。

3．实数的运算　实数的运算往往分两步：①确定符号；②确定绝对值。

(1) 加法法则：

① 同号相加，符号不变；绝对值相加。

② 异号相加，符号同绝对值大的；绝对值相减（大减小）。

③ $0+a=a$。

(2) 减法法则(变为加法)：减去一数，等于加上它的相反的数，即$a-b=a+(-b)$。

(3) 乘法法则：

① 同号相乘，得正；绝对值相乘。

② 异号相乘，得负；绝对值相乘。

③ $0\times a=0$。

(4) 除法法则：

① 同号相除，得正；绝对值相除。

② 异号相除，得负；绝对值相除。

③ $0\div a=0 \quad (a\neq 0)$。

(5) 乘方：求相同因数的积的运算叫乘方。因此，乘方法则原则上与乘法法则相同，其符号法则如下：

① 正数的任何次方是正数。

② 负数的偶次方是正数；负数的奇次方是负数。如：

$$(-1)^{50}=1, \qquad (-5)^3=-125,$$

③ $0^n=0 \quad (n>0)$

(6) 开方 若 $x^n=a$，则称 x 是 a 的 n 次方根。求一个数的方根的运算叫开方。a 叫被开方数，n 叫根指数。

若 $x^2=a$，则 x 叫 a 的平方根。

若 $x^3=a$，则 x 叫 a 的立方根。

① 奇次方根的性质：正数的奇次方根是正数；负数的奇次方根是负数；零的奇次方根是 0。

② 偶次方根的性质：正数的偶次方根必须是两个相反的数；负数的偶次方根在实数中没有意义；零的偶次方根是 0。

③ 算术根：正数的正的方根叫算术根。零的算术根是零。当 n 是偶数时，符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示的是算术根。$(a\geqslant 0)$

4．基本运算规律

(1) $a+b=b+a$； (2) $(a+b)+c=a+(b+c)$；

(3) $ab=ba$； (4) $(ab)c=a(bc)$；

(5) $(a+b)c=ac+bc$ 或 $c(a+b)=ca+cb$。

5．运算顺序 第一级运算：加、减，第二级运算：乘、除，第三级运算：乘方、开方。运算顺序遵循下面几点：

(1) 如有括号，括号内先算，先算小括号，次算中括号，

最后算大括号；

(2) 在同括号内，先进行第三级运算，然后进行第二级运算，再进行第一级运算；

(3) 在同级运算中，按式子里的次序进行运算；

(4) 可根据基本运算规律变更上面的运算顺序。

例 1. 计算：$(-6)-(-3)+(-7)-(+5)+(+12)$

解：原式 $=-6+3-7-5+12=15-18=-3$。

注：先将原式化成代数和形式；运用交换律将正数合并，负数合并；最后将正，负数相加。这样做可以减少错误。

例 2. 计算：

$$+16\cdot(-3)^2+5\cdot(-3)-12\div2+(-60)\div(-4)$$
$$+18\cdot(-2)^3-(-3)\cdot(+2)$$

解：原式 $=16\cdot9+5\cdot(-3)-12\div2+(-60)\div(-4)$
$$+18\cdot(-8)-(-3)\cdot(+2)$$
$$=144-15-6+15-144+6=0$$

(注) (1) 先乘方，再乘除，最后加、减。(2) 将相反数合并，运算较简单。

例 3. 计算：

$$\frac{1}{5}\div\frac{1}{3}+\left(1\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\div5+\frac{3}{7}\div(-2)$$
$$+\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{-2}{5}\right)\left(\frac{-5}{7}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\sqrt{\frac{9}{64}}$$

解：原式 $=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{3}{14}+\frac{1}{4}-\frac{2}{7}-\frac{1}{8}+\frac{3}{8}$

$$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{10}\right)$$

$$-\left(\frac{3}{14}+\frac{2}{7}\right)=0+\frac{5}{10}-\frac{7}{14}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

(注)：把分母间有倍数关系的先合并，这样较简单。

例 4．计算：

$$2.75-\left[\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{3}{8}\right)+4\frac{2}{3}\right]$$

解：原式 $=-1\frac{7}{8}$（过程从略）

(注)：若式中既有小数又有分数，一般是将小数化成分数；若分数可化成有限小数，亦可化为小数计算：

例 5．计算：

$$-1\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}\times(-0.2)\times1\frac{3}{4}\div1.4\times\left(-\frac{3}{5}\right)$$

解：原式 $=-\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\left(-\frac{1}{5}\right)\times\frac{7}{4}\times\frac{5}{7}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{3}{10}$

(注)：(1) 对乘除混合运算，可化成连乘积。(2) 乘除运算中，带分数要化成假分数。(3) 连乘积的符号可先决定，

例 6．计算：$-2^2+(-2)^2-(-3)^2-(-3)^3$

解：原式 $=-4+4-9+27=18$。

(注)：$-2^2\neq(-2)^2$，　$-(-3)^2\neq+3^2$

例 7．计算：$|-5|-|-7^2|+\left|\frac{1}{3}\right|-|5\div(-6)|$

解：原式 $=5-49+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}=-44\frac{1}{2}$

例 8．比较实数的大小：

(1) $\sqrt[5]{8}$ 和 $\sqrt[3]{2}$

解 (1)：化成同次根式后，再进行比较：$\sqrt[5]{8}>\sqrt[3]{2}$。

(2) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$和$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

解 (2)：$\because \frac{2}{4}>\frac{3}{9}$，即

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2>\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2, \therefore \frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore -\frac{\sqrt{2}}{2}<-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(注)：化成无限小数后，亦可比较。

练　　习

1．在数轴上把代表下列各数的点表示出来，并比较它们的大小。

5，　-3，　$-5\frac{1}{2}$，　8，　0，　0.3。

2．写出下列各数的相反的数、倒数、相反数的倒数，倒数的相反的数：

3．　$\frac{1}{2}$，　-5，　$-1\frac{4}{3}$，　$-\sqrt{3}$。

3．用简便的方法计算：

(1) $\left(-\frac{7}{8}\right)\div 15\cdot\left(-1\frac{8}{7}\right)$；　(2) $\left(\frac{9}{10}+\frac{1}{15}\right)\times 30$；

(3) $(-8)[(-1.25)(-1.28)]$

4．在什么条件下，$\frac{y}{2x}$

(1) 是正数；　　　　　(2) 是负数；

(3) 等于零；　　　　　(4) 没有意义。

5．(1) $2-4^2\times 5$，$(2-4)^2\times 5$ 和 $(2-4^2)\times 5$ 相等吗？为什么？

(2) $|-3|-|-4|$ 和 $|-3-4|$ 相等吗？$|-5\times2|$ 和 $|-5|\times2$ 相等吗？

6．计算：

(1) $\left(-\frac{3}{2}\right)^3\times\left(-\frac{4}{3}\right)^2\div\left(-\frac{1}{2}\right)-3^2-(-3)^2$，

(2) $\dfrac{3}{\dfrac{-5}{7}}+\dfrac{-\dfrac{3}{5}}{7}$。

(3) $(-3)^2-\left(-1\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{2}{9}-6\div\left|-\frac{2}{3}\right|$。

(4) $\left(-2\frac{1}{2}\right)-\left[(-6.2)\div6.5-\left(-6\frac{1}{5}\right)\right]$，

(5) $\left(3\frac{1}{3}\right)^2-\left(-6\frac{1}{2}\right)\times\frac{4}{13}+(-2)^4\div[(-2)^3+2]$

(6) $\left\{\left[4\frac{2}{3}\div\left(-\frac{1}{4}\right)+(-0.4)\times\left(-6\frac{1}{4}\right)\right]\right.$

$\left.\div\left(-\frac{3}{5}\right)-20\right\}\times(-1)^{19}$。

7．比较下列各数的大小：

(1) $-3\sqrt[3]{2}$ 和 $2\sqrt[3]{-4}$；

(2) $0.25+3\frac{1}{8}$ 和 $|-3.375|$；

(3) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$ 和 1。

思　考　题

1．两个数中绝对值大的就是较大的数，这句话对不对？何时正确？已知 $a^2>b^2$， 能否推出 $a>b$？

2. 在什么情况下，一个数的平方反而比这个数小?

3. 在什么情况下,一个数的倒数比它大、比它小、和它相等?

4. 两个无理数的和、差、积、商是否一定是无理数? 举例说明。

5. 在什么情况下，一个数的相反数比它大、比它小、和它相等?

6. 已知 $|a-3|=2$，在数轴上找出 a 的位置。

7. 比较下列数的大小：

$\sqrt{0.7}$； 0.7； $\frac{9.2}{11}$。

8. 求证：$\sqrt{3}$， $\log_2 5$ 是无理数。

二、代 数 式

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整　式}\\ \text{分　式}\end{cases}\\ \text{无理式　（根式）}\end{cases}$$

1. 整式

(1) 整式的加、减、乘、除应注意以下各点：

① 实数的各种运算规律，仍适用于代数式的运算。

② 运算顺序与实数运算顺序相同。

③ 名称上要作相应改变，如加数改为加式等。

2. 方幂的运算法则

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad a^m \div a^n = a^{m-n};$$

$$(a^m)^n = a^{mn}; \quad (ab)^m = a^m b^m; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}。$$

3．乘法公式

(1) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$;

(2) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;

(3) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;

(4) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

(5) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;

(6) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$;

(7) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$;

(8) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$。

例 1．用代数式表式：a 与 b 的平方和加上 a 与 b 的和的平方；当 $a=-3$，$b=-4$时，求这个代数式的值。

解：代数式为 $a^2+b^2+(a+b)^2$，当 $a=-3$，$b=-4$ 时

$$原式=(-3)^2+(-4)^2+[(-3)+(-4)]^2$$
$$=9+16+(-7)^2=74。$$

例 2．化简下式；当 $a=-\frac{2}{7}$，$b=0.4$ 时，求这个代数式的值：

$$2a-\{7b+[4a-7b-(2a-6a-4b)]-3a\}$$

解：
$$原式=2a-\{7b+[4a-7b+4a+4b]-3a\}$$
$$=2a-\{7b+8a-3b-3a\}$$
$$=2a-4b-5a=-3a-4b,$$

当 $a=-\frac{2}{7}$，$b=0.4$ 时，

$$原式=-3\left(-\frac{2}{7}\right)-4\cdot(0.4)=-\frac{26}{35}。$$

注：(1) 去括号时，括号前是负号，则括号内各项应变号；

(2) 去括号应由内到外，并随时合并同类项；

(3) 如遇有分数和小数，一般把小数化成分数。

例 3. 计算：

$$\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{4}ab+2b^2-1\right)+(0.5-0.4a^2+0.1b^2)$$

$$-\left(\frac{1}{4}b^2-3+0.7ab-a^2\right)。$$

解：将上式变为加法，再按 a 的降幂排列，用竖式加法演算：

$$\begin{array}{rrrrr} & 0.5a^2 & -0.75ab & +2b^2 & -1 \\ & -0.4a^2 & & +0.1b^2 & +0.5 \\ +) & a^2 & -0.7ab & -0.25b^2 & +3 \\ \hline & 1.1a^2 & -1.45ab & +1.85b^2 & +2.5 \end{array}$$

注：如各项的系数都可以化成有限小数，此时比化为分数方便。

例 4. 计算：(1) $-(-2ab^2)^3$；(2) $(4x+2)(3x-7)$

解：

(1) 原式 $=-[(-2)^3a^3(b^2)^3]=-(-8a^3b^6)=8a^3b^6$。

(2) $(4x+2)(3x-7)=4x\cdot3x-4x\cdot7+2\cdot3x-2\cdot7$

$$=12x^2-28x+6x-14$$

$$=12x^2-22x-14。$$

例 5. 计算：$(3x-2x^2+x^3-5)(x-2x^2-1)$。

解：按降幂排列，

原式 $=(x^3-2x^2+3x-5)(-2x^2+x-1)$，

用竖式乘法：

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & 1 & -2 & +3 & -5 \\
\times) & & & & -2 & +1 & -1 \\
\hline
 & & & -1 & +2 & -3 & +5 \\
 & & +1 & -2 & +3 & -5 & \\
+) & -2 & +4 & -6 & +10 & & \\
\hline
 & -2 & +5 & -9 & +15 & -8 & +5
\end{array}
$$

∴ 原式 $=-2x^5+5x^4-9x^3+15x^2-8x+5$。

例 6. 用乘法公式计算：$(-a+2b^2-3c^3)^2$

解：用上述公式 (8)：

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= (-a)^2+(2b^2)^2+(-3c^3)^2+2\cdot(-a)\cdot 2b^2 \\
&\quad +2\cdot 2b^2\cdot(-3c^3)+2\cdot(-3c^3)(-a) \\
&= a^2+4b^4+9c^6-4ab^2-12b^2c^3+6ac^3。
\end{aligned}
$$

练　　习

1. 计算：

   (1) $x^{n+2}\cdot x^{n+1}$； (2) $(a^{n+2}b^{n-1})^2$； (3) $a^3(-a)^2(-a^n)$

2. a 为实数，$(-a)$ 一定是负数吗？$3a$ 必定大于 a 吗？ a 为何值时， $2a=a$？

3. 计算：$(3x^2-5x+6)-(-x^2-2x+8)+(-4x^2+3x-7)$

4. 计算：$(2x^n-3x^{n-2}+5x^{n-3})(x^{n-2}-x^{n-3})$

5. 计算：

   (1) $(3x^2-2y^2)^2$； (2) $(2x^2-3y^2)^3$；

   (3) $(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a-b)$

   (4) $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$

思　考　题

1. 说明当 x 在何种情况，$\frac{|x|}{x}$的值是：

(1) 1；(2) -1； (3) 不存在。

2. 下列等式在何时成立：$|a|=a$；$|a|=-a$，$|a|=|-a|$；

3. $(a-b)^2=(b-a)^2$?；　　$(a-b)^3=(b-a)^3$?；

$-(a-b)=b-a$?

4. a 必定大于 $-a$ 吗？有无例外？

5. 计算：

(1) $(3a^{2n+2}b^{m+3}-5a^{2n+1}b^{m+2})\div\frac{1}{2}a^{n+1}b^{m-1}$；

(2) $(3x^ny^{m+1})^2\cdot(-2x^{n+1}y^m)^3$；

2. 因式分解

(1) 什么叫因式分解：把一个整式化成几个整式相乘的形式叫因式分解。

(2) 因式分解方法

① 提公因式法。如：

$$5(x-y)^3-10(y-x)^2=5(x-y)^2(x-y-2)$$

② 应用公式分解法。

常用公式：平方差公式：

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)；$$

完全平方公式：

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2；$$

立方和、差公式：

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)；$$

完全立方公式：

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3。$$

例：

$$x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2y + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 + (2y)^3$$
$$= (x + 2y)^3。$$

③ 分组分解法

a）分组后，用提公因式方法，如：

$$3ac + 3ad - 2bc - 2bd = 3a(c+d) - 2b(c+d)$$
$$= (3a - 2b)(c + d)$$

b）分组后，使用公式，如：

$$a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + 2cd - d^2 = (a+b)^2 - (c-d)^2$$
$$= (a + b + c - d)(a + b - c + d)$$

c）分组后，使用公式和提公因式，如：

$$2x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 1 = 2x^3(x+1) - (x+1)^2$$
$$= (x+1)(2x^3 - x - 1)$$
$$= (x+1)[(2x^3 - 2x) + (x - 1)]$$
$$= (x+1)(x-1)(2x^2 + 2x + 1)$$

④破项法：将某项分为若干项的代数和，然后使用分组分解法。

例 1.

$$a^2 - 4ab + 3b^2 + 2bc - c^2 = a^2 - 4ab + 4b^2 - b^2 + 2bc - c^2$$
$$= (a - 2b)^2 - (b - c)^2$$
$$= (a - 3b + c)(a - b - c)$$

例 2.

$$y^4 - 47y^2 + 1 = y^4 + 2y^2 + 1 - 49y^2 = (y^2+1)^2 - (7y)^2$$
$$= (y^2 + 7y + 1)(y^2 - 7y + 1)$$

（在有理数范围内）

例 3． $x^3-3x-2=x^3-\underline{2x^2+2x^2}-\underline{4x+x}-2$

$$=(x^3-2x^2)+(2x^2-4x)+(x-2)$$

$$=(x-2)(x^2+2x+1)$$

$$=(x-2)(x+1)^2$$

例 4． $x^4+4=x^4+4x^2-4x^2+4=(x^2+2)^2-(2x)^2$

$$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

注：破项时，要考虑到下一步的分解，不可随意破项；分组后，往往要使各组系数成比例。

⑤ 二次三项式的分解法

a）使用公式，如：$x^2+6x+9=(x+3)^2$

b）破中项法，如：

$$x^2-5x-6=x^2+x-6x-6=x(x+1)-6(x+1)$$

$$=(x+1)(x-6)$$

c）叉乘试算法（十字相乘法）如：

$$2x^2+x-6=(x+2)(2x-3) \qquad \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{4-3=1} \end{array}$$

d）求根法 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

这里 x_1、x_2 是二次三项式 ax^2+bx+c 的根即：

$$ax_i^2+bx_i+c=0;\quad i=1,2。$$

因此，二次三项式的分解问题，归结为求 $ax^2+bx+c=0$ 的根的问题。

例 1． $x^2+2x-1\frac{1}{4}$

解：令 $x^2+2x-1\frac{1}{4}=0$ 解得 $x_1=\frac{1}{2}$ ，$x_2=-2\frac{1}{2}$。

$$\therefore\ x^2+2x-1\frac{1}{4}=(x-x_1)(x-x_2)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+2\frac{1}{2}\right)$$

例 2． x^2+4x+1

解：令 $x^2+4x+1=0$ 解得

$$x_1=-2+\sqrt{3},\quad x_2=-2-\sqrt{3},$$

$$\therefore\ x^2+4x+1=(x+2-\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3})$$

注：公式法仅解决某些特殊问题，破项法，叉乘试算法也仅解决某些特殊问题，当系数很大，或系数是分数、小数时，使用此法很不方便。而求根法对二次三项式的分解的解决是彻底的，完善的，应充分重视这一方法。

(3) 分解因式的一般步骤

① 如有公因式，应先提出；

② 如无公因式，则可试用公式分解法；

③ 如 ①、② 行不通时，可试用分组分解法；

④ 对二次三项式，可用上述方法中的任一个，以方便为准；

⑤ 分解得的因式如能分解时，应继续分解，直至不能分解为止。我们可用下面的“顺口溜”“来描述这一过程”：提公因，用公式，十字相乘试一试，实在不行再分组，直到分完才了事。

例 分解因式：$x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$。

介一：分组分解法。

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=(x^4+y^4-2x^2y^2)-2(x^2-y^2)z^2+z^4-4y^2z^2\\
&=(x^2-y^2)^2-2(x^2-y^2)z^2+z^4-4y^2z^2\\
&=(x^2-y^2-z^2)^2-4y^2z^2\\
&=(x^2-y^2-z^2+2yz)(x^2-y^2-z^2-2yz)
\end{aligned}$$