

国外数学资料

数学竞赛试题

(一)

长沙市教师进修学院

纽约城初级中学校际数学联合会

一九七五年秋季竞赛题

竞赛 1 号

第一部分: 10分钟

1. 设 P, q 为正实数, $\log p + \log q = \log(p+q)$, 求用 q 表示 p 的等式。

$$\sqrt{\frac{5+x}{5-x}} + \sqrt{\frac{5-x}{5+x}}$$

2. 设 $-5 < x < 5$, $y = \frac{\sqrt{\frac{5+x}{5-x}} - \sqrt{\frac{5-x}{5+x}}}{\sqrt{\frac{5+x}{5-x}} + \sqrt{\frac{5-x}{5+x}}}$ 写出用 y 表示 x 的等式。

$$\sqrt{\frac{5+x}{5-x}} - \sqrt{\frac{5-x}{5+x}}$$

第二部分: 10分钟

3. 等腰梯形 $ABCD$ 的较长的底边 AB 长 16 吋, 若 $CD = 8$ 吋, $AC = 13$ 吋, 求 $ABCD$ 范围的面积 (平方吋)。

4. 求使 $(\frac{x^2+x+1}{x^2-2x+1} - \frac{x^3+1}{(x-1)^2}) \cdot (x^2-2x+1)$ 具有正整数值的所有的 x 的整数值。

第三部分: 10分钟

5. 求使 $\frac{1}{3} - 0.33333 = \frac{1}{3 \cdot 10^x}$ 成立的 x 的值。

6. $\triangle ABC$ 中, $AB = 13$ 吋, $BC = 14$ 吋, 及 $\angle A = 15^\circ$ 吋, $\angle A$ 的分角线与 $\angle A$ 的分角线交于 p , 求自 p 到 AB 的距离 (吋)。

答: 1. $p = \frac{q}{q-1}$ 3. 60 5. 5.

2. $x = \frac{5}{y}$ 4. 0, -1 6. 4

竞赛 2 号

第一部分: 11分钟

7. 牛奶商人, 希望用 x 加仑的甲级牛奶 (含乳脂 4%), y 加仑的乙级牛奶 (含乳脂 3%) 以及 1 加仑的乳油 (含乳脂 35%) 混合成含乳脂 5% 的牛奶 20 加仑, 求有序数对 (x, y) 。

8. 求从 1 起到 300 的不被 5 整除的或者不被 7 整除的那些整数的和。

第二部分: 11分钟

9. $2x^2 + 2x + k = 0$, $2y^2 - 2y + k = 0$, 及 $x - y = 2$, 求 y 的值。

10. $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, 中线 $\overline{AD}$ 与 BE 相交于 F , 设 $EC=8$ 吋, $DC=6$ 吋, 求 $\triangle DEF$ 范围的面积 (平方吋)。

第三部分: 10分钟

11. 某人要在两种贴现中去选择一种, 第一种贴现是20%的20%, 第二种贴现是30%的30%, 经过选择他选定了第二种并且比如果选择第一种节省了50元。问此人购置款项的未付价为几元?

12. 过等边三角形 ABC 各边的各个三等分点, 在平面内画各边的垂线, 垂足邻近 A 的二垂线交于 A' , 垂足邻近 B 的二垂线交于 B' , 垂足邻近 C 的二垂线交于 C' , $A'B'C'$ 范围的面积与 ABC 范围的面积的比是什么?

答案: 7. (8, 11) 9. $-\frac{3}{2}$ 11. 5000

8. 13683 10. 8 12. $\frac{1}{9}$

竞赛 3 号

第一部分: 10分钟

13. 当 k 取从 1 到 n 的所有的整数值时, 用 n 的式子表示出所有的具形式 $2k+3$ 的数的总和。

14. 求使方程组 $\begin{cases} kx+2y=k \\ 9x+2ky=k^2 \end{cases}$ 的解的集合含有多于一个有序数对 (x, y) 的所有的 k 的值。

第二部分: 11分钟

15. 圆直径为 $\overline{AB}$, C 是 $\overline{AB}$ 上的一点, 且 $\overline{AC}:\overline{CB}=3:1$ 。在圆平面内以 $\overline{AC}$ 及 $\overline{CB}$ 为直径在直径 $\overline{AB}$ 的两边分别各作半圆, 分圆区域 (以 $\overline{AB}$ 为直径的) 为两个不同区域。求这两个区域中较大的那个的面积对较小的那个的面积之比。

16. 某人以平均每小时 2 哩的速度登山, 如果他下山时疾行, 以每小时 6 哩的速度沿原路返回, 那末, 在来回路程中的平均速度是每小时多少哩?

第三部分: 11分钟

17. 设 $A = \left\{ (x, y) \mid \frac{y-2}{x-3} = 5 \right\}$ 而 $B = \left\{ (x, y) \mid y = 5x - 13 \right\}$ 又 A'
 $= \left\{ (x, y) \mid (x, y) \in A \right\}$

列出集 $A' \cap B$ 中所有的元素。

18. $\triangle ABC$ 的 $\overline{BC}$ 边上的中线为 $\overline{AM}$, 如果 $AB=3$ 吋, $AC=5$ 吋, 又 $\angle AMB=60^\circ$, $\overline{AM}$ 的长是 $\frac{1}{2}(\sqrt{k}-1)$ 吋, 求 k 。

答案: 13. n^2+4n 15. 3:1 17. (3, 2)

14. 3, -3 16. 3 18. 33

一九七六年春季竞赛题

竞赛 1 号

第一部分: 11分钟

1. 在有四位候选人的选举中, 当选人接受的选票比另一个对手多30票, 比另二位对手多得35票及48票。如果全部选票有87票, 当选人得几票?

2. 平行四边形相两边长为5米与6米, 一条对角线为8米, 另一条对角线长为 $\sqrt{k}$ 求 k 。

第二部分: 10分钟

3. 有 m 部同样的机器一齐工作, 在 m 小时内做完一件活计, 如果其中取 k 部机器做完同样的活计要多少小时? 用 m 与 k 的式子表示你的答案。

4. 直角三角形 ABC 中, $\overline{CD}$ 是斜边 $\overline{AB}$ 上的高, 如果 $AC:CB=4:9$, 求 $AD:DB$ 。

5. 在直角坐标示中, 与 x 轴及 y 轴相切的那个圆的圆心的坐标为 (x, y) 。如果此圆经过坐标为 $(1, 8)$ 的点, 求所有的可能的有序数对 (x, y) 。

6. 设 BE 及 ME 表示十进的两位数, $E \neq 0$ 。若 $9 \cdot (BE) = 4 \cdot (ME)$, 求所有的可能的有序数对 (BE, ME) 。

答案: 1. 50 3. $\frac{m^2}{k}$ 5. $(5, 5)$ $(13, 13)$

2. 58 4. $16:81$ 6. $(16, 36)(24, 54)(32, 72)$

竞赛 2 号

第一部分: 10分钟

7. 求 xy 平面中的、所有那些不在不等式

$$|x^2 - 4| + |y^2 - 1| > 0 \text{ 的图象上的点坐标。}$$

8. 设 x, y, z 为三个不同的数, x, y, z 以及 x^3, y^3, z^3 都是等差级数, 求 y 。

第二部分: 10分钟

9. 正数 x 可以用十进制中的两位数来表示, 如果它的各位数字和的五倍, 再加上 x , 等于两位上的数字互换, 求 x 。

10. 三角形 ABC 的各边长12吋, 在三角形所在平面内, 以6吋为半径, 以各顶点为圆心画圆。第四个圆外切于这三角圆中的每一个圆, 其半径长为 $(\sqrt{k} + 6)$ 吋, 求 k 。

第三部分: 10分钟

11. 求使 $\log_5(x^2 - 5x + 11) = 1$ 的所有的 x 的实数值。

12. 三角形的边长为10、10及16吋。矩形的周长与三角形的周长相等, 其较长的边长为 $a + \sqrt{b}$, 如果两个区域的面积相等, 求有序数对 (a, b) 。

答案: 7. $(2, 1), (-2, 1), (2, -1), (-2, -1)$

8. 0 9. 27 10. 48

11. 2, 3. 12. $(9, 33)$

竞赛 3 号

第一部分：10分钟

13. 一商人以标价 m 的 75% 售出某商品, 其成本 c 是实际售价的 80%, 求比值 $c:m$ 。

14. 正方形内接于一圆, 正六边形被此圆所内切, 正方形与正六边形的区域的面积之比为 $1:k$, 求 k 。

第二部分：10分钟

15. 三个孩子分一笔钱, 年龄最大的女孩取其中一半少一分钱, 其次的取余下的一半多一分钱, 最小的女孩取余下的 8 分钱, 她们分的那一笔是几分?

16. 设 $a=1776$ $b=1+a$ $c=2+a$ 又 $d=3+a$ 求下式的值

$$\frac{a}{a+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+d}$$

第三部分：10分钟

17. 设 x 与 y^2 成比例, y 与 z^3 成比例, 当 $x=24$ 时, $y=2$; 当 $y=18$ 时, $z=3$ 。

求 $z=1$ 时, x 的值是多少?

18. 圆 O 的割线 $\overleftrightarrow{EDC}$ 与 $\overleftrightarrow{EBA}$ 交于 E , $\overline{AB}$ 为直径, 而 CD 为弦。如果 $AB=2DE$, $m\angle E=18$, 求 $m\angle CQA$

答案: 13. 3:5 15. 34 17. 24

14. $\sqrt{3}$ 16. $\frac{5}{3}$ 18. 54°

一九七五年高级中学竞赛题

1. 设 $[x]$ 表示使 $n \leq x$ 的最大整数 n , 又设 $f(x) = [x/12\frac{1}{2}] \cdot [-12\frac{1}{2}/x]$,

如果 $0 < x < 90$, 那么 f 的值域含 k 个元素, 求 k 。 (8)

2. ABC 与 CBA 分别是同一正整数的, 以 9 为基的及以 7 基的为数。试以 10 为基表示出这个整数。 (248)

3. 求适合 $x^2 + y^2 \leq 25$ 及 $y = x - 3$ 的所有的有序整数对 (x, y) ,

$[(4, 1), (3, 0), (2, -1), (1, -2), (0, -3), (-1, -4)]$

4. 一些人共同分担购买小船的款子, 如果其中 10 人后来决定不参加, 余下的每人又多增加负担 2 元, 问原先同意购船的是几人。 (100人)

5. 三角形边长为 6, 8 及 10。其较大锐角的角平分线把原三角形所分成为两个三角形, 求这两个三角形中较大的一个三角形的面积。 (15)

6. $x^3 + 2px^2 - px + 10 = 0$ 的根是整数并且成等差级数, 求 p 的值。 (-3)

7. 一列火车长 x 米以等速度前进, 从它进入 300 米长的隧道到完全通过隧道经历了 20 秒钟, 隧道顶部一盏固定的灯光在列车上照了 10 秒钟, 求 x 。 (300)

8. 设 a, b 及 c 为不相等的数, 并且 $a^3 + 3a + 14 = 0$, $b^3 + 3b + 14 = 0$, 及 $c^3 + 3c + 14 = 0$, 求 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 的值。 $(-\frac{3}{14})$

9. 内接于圆的梯形的两底边长为10与20, 它的一腰长 $\sqrt{89}$, 求一对角线的长。

(17)

10. 设 i 代表虚数单位, 求适合 $a+bi=x+\frac{1}{x}$ 及 $x^2+\frac{1}{x^2}=110$ 的所有的有序数对

$$(a, b), \left[(5, 0) \left(-\frac{5}{2}, \frac{3\sqrt{7}}{2} \right) \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3\sqrt{7}}{2} \right) \right]$$

11. 设 a_n 表示一个数列的第 n 项。如果 $a_1=1, a_2=3, a_3=5$, 又对所有的 $n>3$

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3}.$$

求数列的前30项的和。

(900)

12. 在 $\triangle ABC$ 中, D 在 $\overline{AB}$ 上, E 在 $\overline{BC}$ 上。设 $\overline{CO} \cap \overline{AE} = \{K\}$, $\overline{BK} \cap \overline{AC} = \{F\}$ 。

如果 $AK:KE=3:2, BK:KF=4:1$, 求 $CK:KD$ (3:2)

13. 父亲、母亲及儿女年龄总和是73岁, 父亲的年龄是女儿的二倍时他们二人的年龄的和是132岁, 试写出一个式子用女儿现在的年龄 d 表示出母亲现在的年龄 m 。

$$(m=29-2d)$$

14. 等腰梯形 $ABCD$ 的两底 $\overline{AB}$ 与 $\overline{CD}$ 相隔12单位, $AB=10, CD=8$ 。点 R 在梯形的对称轴上, 且使 $\angle CRB=90^\circ$, 求从 R 到 AB 的可能距离? (2, 10)

15. 等边三角形的外接圆上一点到两个相邻的顶点的距离为3与6, 求该点到最远顶点间的距离。 (9)

16. 如果 $a_1=x, a_2=x^{a_1}$, 一般地, $a_n=x^{a_{n-1}}$, 当 $x=(\frac{4}{3})^{\frac{1}{2}}$ 时,

$a_{1000000}$ 的准确到千分之一的值是什么? ()

17. 直角三角形 ABC 的斜边 $\overline{AB}$ 上的点 D , 使 $CB=BD$, 如果 $\angle B=40^\circ$,

求 $\angle ACD$ (20)

18. 两个人从一堆牙签中轮流移去1, 2, 3, 4, 5, 6或7根, 直到移尽为止, 谁移去最后一根的就输了。如果开始时有牙签1000根, 首先移去的人在第一次移去时要移几根, 才能在以后的整个游戏中保证得胜。 (7根)

19. 求所有的使 $\frac{12(x^2-4x+3)}{x^3-3x^2-x+3}$ 具有正整数值的那些 x 的整数值。 (0)

20. 一张形状为等边三角形 ABC 的纸片, 且 $AB=8$, 将它对折使顶点 A 落在边 BC 上, 由 AC 上的点与 AB 上的点所连成的折痕长为 x , 当点 A 沿着 BC 从 B 到 C 移动时, x 变化。如 x 的最大值为 M , 而最小值为 m , 求有序数对 (M, m) 。 ($4\sqrt{5}, 4$)

21. 五边形 $ABCDE$ 的顶点的坐标是 $A(0,0), B(1^1,0), C(11,2), D(6,2)$ 及方程为 $x=k$ 的直线将五边形所围分成面积相等的两个部分, 如果 $k=a+b\sqrt{6}$ 求有序整 $E(0,8)$ 数对 (a,b) 。 (8,2)

22. A, B 二人从同一地点出发, 向反方向前进, 各行一小时, 分别到达各自的终点 x 与 y 。又从原出发点, 互换彼此到达的目的地, A 将在 B 到达终点 x 之后35分钟到达终点 y 。求 A 的速度与 B 的速度的比。 (3:4)

23. 求适合于 $x^5=656,356,768$ 的整数 x 。 (59)

24. $\triangle ABC$ 的各边长为 6. 如果 x 是 $\overline{CA}$ 上的接近 C 的三分点, 又中线 $\overline{AM}$ 与 $\overline{Bx}$ 相交于 D , 那末 $MD = k\sqrt{3}$, 求 k (5)

25. 单位分数是一个形如 $\frac{1}{n}$ 的分数, 其中 n 是大于 1 的整数. 求两个最大的单位分数, 它们中的每一个都是有理数的平方, 它们的和也是有理数的平方.

26. 如果 $a \neq 0$, $x+y=a$, 及 $x^3+y^3=b$, 求出 a 与 b 表示 x^2+y^2 的式子. ($\frac{a^3+2b}{3a}$)

27. 求适合于 $3\sqrt{x^2-2y} + \frac{3}{\sqrt{x-2y}} = 10$ 及 $x=ay+b$ 的所有的实数有序对 (a, b)
($(2, 9), [(2, \frac{1}{9})]$)

28. 一张形状为等边三角形 ABC 的纸片, $AB=15$, 当 A 折到 BC 上的点 D , 且 $BD=3$ 时, 由 $\overline{AB}$ 上的点与 $\overline{AC}$ 上的点所连成的折痕的长为 $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ 求. (343)

29. 圆的直径 AB 长为 12, 其三分点为 C 与 D , 在 AB 的同侧以 $\overline{AC}$ 与 $\overline{AD}$ 为直径分别画半圆, 又在 $\overline{AB}$ 的另一侧以 $\overline{BD}$ 与 $\overline{BC}$ 为直径分别画圆. 这四个半圆把原来的圆分成三部分. 如果中间那个区域的面积为 $K\pi$, 求 K . (24)

30. 十进制的五位数 $ABCDE$ ($A \neq 0$), 其中不同的字母不必代表不同的数码. 如果这个数是一个整数的四次幂且 $A+C+E=B+D$. 求数码 C (6)

一九七六年竞赛题

1. 求第 n 项为 $\frac{7^{n-1}}{10^n}$ 的无穷级数的和. ($\frac{1}{3}$)

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=60^\circ$, 又 $\angle A < \angle B$, $\angle C$ 的平分线交 AB 于 E . 如果 CE 是 AE 与 EB 的比例中项, 求 AE/AC 的值. ($\frac{\sqrt{3}}{2}$)

3. 在 $\triangle ABC$ 中, D 在 $\overline{AB}$ 上且使 $AD:DB=1:2$, 而 G 在 $\overline{CD}$ 上且使 $CG:GD=3:2$, 如果 $\overline{BG}$ 交 AC 于 F , 求 $BG:GF$. (4:1)

4. 在 50 进制中, 整数 x 是用数码 CC 表示的, 且 x^3 是用数码 $ABBA$ 表示的. 若 $C > 0$, 以 10 为基表示出 B 的所有的可能的值. (3.24)

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=120^\circ$, $AB+BC=21$, 又 $AC+BC=20$. 求 BC . (13)

6. $\frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = \frac{29}{10}$ 有一个根是 $\frac{1+\sqrt{K}}{5}$, 其中 K 是负数, 求 K . (-24)

7. 如果比 n 个连续整数的和 100 的数等于其次 n 个连续整数的和, 求 n (10)

8. 在菱形的每条边上画外正方形, 这些正方形的中心连接成一个凸四边形 Q . 如果菱形各边的长为 6, 而它有一个角的度数是 30° , 求四边形 Q 的面积.

9. 在直角坐标平面中的格点是它的两个坐标都是整数的点, 在方程 $x^2 + y^2 = 625$ 的图象的圆上有多少个格点?

10. 一个整数, 除本身以外, 叫做另一个可以被它所整除的那个整数的真因子。求 1030310 的最大的真因子。 (10201)

11. $xy=20$ 与 $x^2+y^2=41$ 的图象的交点连接起来成一个凸四边形的面积。

12. 一商人以每 3 只 16 分钱的价格购进一批桔子。他又以每 4 只 21 分钱的价格购进比前一批数量加倍的桔子。如果他以每 3 只 k 分钱的价格全部出售。可得到所投资的 20% 的收益。求 k 。 (19)

13. 一个俱乐部发觉, 为了达到它的成员中每一个未成年的成员就有两个成年成员的比率, 或者是引入 24 个成年成员, 或者退去 x 个未成年成员, 求 x (12)

14. $\triangle ABC$ 的各边长为 10, 半径长为 3 的圆与 AB 及 $\overline{AC}$ 相切, 如果从圆心到 BC 的距离为 $a\sqrt{3-b}$, 求有序的有理数对 (a, b) 。 [(5, 6)]

15. 在 $\triangle ABC$ 中, D 在 BC 上, 且使 $BD:DC=3:3$, 又 E 在 AD 上且使 $AE:ED=5:6$ 。如果 BE 交 AC 于 F , 求 $BE:EF$ 。 (2:9)

16. 求无穷级数 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ 的和, 其中 m 为正整数。

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}} & \text{当 } n=4m^2-3 \text{ 或 } n=4m-2 \text{ 时} \\ -\frac{1}{2^{n-1}} & \text{当 } n=4m-1 \text{ 或 } n=4m \text{ 时} \end{cases} \quad \left(\frac{6}{5}\right)$$

17. 设 a, b, c 为正整数, a 是一个整数的立方, $c=b+1$, 且 $a^2+b^2=c^2$, 求 c 的最小的许可值。 (315)

18. 在矩形 $ABCD$ 中, 如果 $AB=6$ 及 $BC=8$ 。在矩形外部画等边三角形 ADE 及 DCF 。如果 $\triangle BEF$ 的面积是 $a\sqrt{3+b}$, 求有理数的有序数对 (a, b) [(25, 6)]

19. 一个十进制的二位数, 各位数字和的三倍与这个数相加起来, 它的数码就互换位置了, 求所有的正整数。 (12, 24, 36, 48)

20. 在三角形中, 三条中线的长为 9、12 及 15。求那一条画出最长的中线的边的长。 (10)

21. 直角坐标系中的点 $A(-1, 4)$ 及 $B(2, -3)$ 在 AB 上使 $AC:CB=3:4$ 的点为 C , 求点 C 的坐标。 $\left(\left(\frac{2}{7}, 1\right)\right)$

22. 求满足:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-y+z} &= \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z} \\ x+y+z &= 8 \\ x-y+z &= 4 \end{aligned}$$

的所有的实数的有序的三重数 (x, y, z) 。[(2, 2, 4), (4, 2, 2)]

23. 有一个其边长为整数的具有最小周界的直角三角形, 其一直角边为 AB , 其斜边比 $\overline{AB}$ 长 7 单位, 且 $AB > 100$, 求 AB 。 (112)

25. 第一个数列其第 n 项 $a_n = 2n^2 + 3n - 1$ 第二个数列其第 n 项 $b_n = 3n^2 - 2n + 1$ 。且 $a_n = b_n$ 的 n 值满足 a 和 b 的等式。 $(n^2 + 3n - 1)$

26. 式 $\sqrt{10 + \sqrt{10 + \sqrt{10 + \dots}}}$ 中，点表明所表示的运算的形式是无限限制的， a 和 b 是常数，它们之间满足公共函数，这个式子可以表示为 $\frac{a + \sqrt{b}}{c}$ 的形式，求 a, b, c 的值。 $((1, 41, 2))$

27. 求方程 $|x| + |y - 1| = 2$ 的图象所围的区域的面积。 (8)

28. 在 $\triangle ABC$ 中，过顶点 A 的高线与中线分别为 4 与 5。单位长由中线及 $\overline{AB}$ 所确定的角平分线所平分。求 AC 。 $(\sqrt{97})$

29. 三个正整数的平方是等差级数，第三个整数比第一个大 12。求这三个整数。 $(2, 10, 14)$

30. 矩形纸片 $ABCD$ 对折起来，使 AD 沿 DC 落下。折痕在 AB 上确定一点 E ，且 E 是 AB 的靠近 B 的三分点，求 $EC : BC$ 。 $(\sqrt{3} : 2)$

31. 求所有的满足 $(16x^2 - 9)^2 + (9x^2 - 16)^2 = (25x^2 - 25)^2$ 的 x 的实数值。

$$(\pm \frac{3}{4}, \pm \frac{4}{3}, \pm 1)$$

32. 设 $\sin x + \cos x = -\frac{1}{5}$ ，且 $\frac{3}{4}\pi \leq x \leq \pi$ ，求 $\cos 2x$ 的值。 $(\frac{7}{25})$

33. 求所有的适合 $yz + xz = 13$ ， $xz + xy = 25$ ， $xy + yz = 20$ 的实数的有序的三重数 (x, y, z) 。 $[(6, \frac{8}{3}, \frac{3}{2}), (-6, -\frac{8}{3}, -\frac{3}{2})]$

34. 为了纪念纽约城的经济冻结，传闻政府机关提出了制定两种新型温度计中的一种的计划。在这些新的刻度中， F 表示伏特温度计上的度数， K 表示凯莱温度计上的度数，与摄氏刻度比较时，已知 $0^\circ C = 40^\circ F = 25^\circ K$ ， $100^\circ C = 280^\circ F = 125^\circ K$ 求出用 $^\circ K$ 表示 $^\circ F$ 的等式。 $(F = \frac{9}{5}K - 5)$

35. $\triangle ABC$ 中， $AB = 5$ ， $BC = 6$ ， $AC = 7$ ，以 $AP = 2$ ， $BQ = 2$ ， $CR = 3$ 定出 $\overline{AB}$ 上的 P ， $\overline{BC}$ 上的点 Q ， $\overline{AC}$ 上的点 R ，如果 $\triangle ABC$ 的面积为 x ，则 $\triangle PQR$ 的面积为 $Kx/35$ 。求 K 的值。 (10)

36. 在数列 6， $x, y, 16$ 中，前三项成算术级数，末三项成几何级数，求所有可能的有序数对 (x, y) 。 $((9, 12), (1, -4))$

37. 方程 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象为抛物线，它经过点 $(-1, -11)$ ， $(1, 1)$ 及 $(2, 4)$ ，求此抛物线的顶点的坐标。 $(3, 5)$

一九七七年竞赛题

1. 三角形中，从一个顶点到对边的三等分点各作线段，过第二顶点的中线被这些线段分成连比， $x : p : z$ ，设 $x \geq y \geq z$ ，求 $x : y : z$ 。 $(5 : 3 : 2)$

2. 从集合 $\{x | 100 < x < 300\}$ 中任取一个数

率。

$$\left(\frac{1}{100}\right)$$

3. 对于一切实数 x 及 y , 函数 f 满足 $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, 并且 $f(1) = 1$ 的数值。

4. 设 $0 \leq x \leq \pi$, 并且 $\sin \frac{1}{2} x = \sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}$, 求 $\lg x$ 的一切可能的

$$(0, -\frac{4}{3})$$

5. 求满足 $x + y + \sqrt{x + y} = 56$ 及 $x - y + \sqrt{x - y} = 30$ 的一切有序实数对 (x, y) 。

$$(37, 12)$$

6. 设二项式 $(x + y)^3$ 中, 中间二项之和等于首末二项之和。如果 $x + y \neq 0$, 求比 $(x - y)^2 : xy$ 的数值。

$$(2)$$

7. 求满足 $x - y = xy = x^2 - y^2$ 的有序正数对 (x, y) $\left[\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) \right]$

8. 设 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \frac{2}{3}$, 求 $\sin 2\theta$ 的一切可能的值。

$$\left(\pm \frac{2}{3}\right)$$

9. 设对于一切 $x > 0$ 及一切 $y > 0$, 函数 f 满足 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 。

设 $f(2) = a$, $f(3) = b$ 。求以 a 及 b 表示 $f(72)$ 的值。

$$(3a + 2b)$$

10. 求满足 $\sqrt{\frac{21}{4}} + 3\sqrt{3} = x + \sqrt{y}$ 的有序有理数对。

$$(3, 12)$$

11. 基为 x 的三位数 $7y3$, 是基为 x 的三位数 $3y7$ 的两倍, 如果 x 是整数, 将和 $x + y$ 表示为基为 10 的数。

$$(21)$$

12. 正六边形的无穷序列, 除第一个以外, 每个六边形由它前面的六边形各边中点连接而成, 如果第一个的周长是 12, 求所有的六边形的周长的和。

$$(48 + 24\sqrt{3})$$

13. 设 Arc 表示主值, 求满足 $\text{Arc} \lg 2x + \text{Arc} \lg 3x = \frac{1}{4} \pi$ 的的一切实数值。

$$(-1, \frac{1}{6})$$

14. 两个不同大小的垂直的竿子杆在地平上, 从每个竿顶到另一个竿根各有一条激光, 其交点离地面 24 米。如果较短的竿顶离地面为 40 米, 较高的顶离地面为 x 米。求 x

$$(60)$$

15. 设 f 与 g 分别为由 $f(x) = 9x + 1$ 。及 $g(x) = x^2$ 所定义的函数。求满足 $f(g(x))$

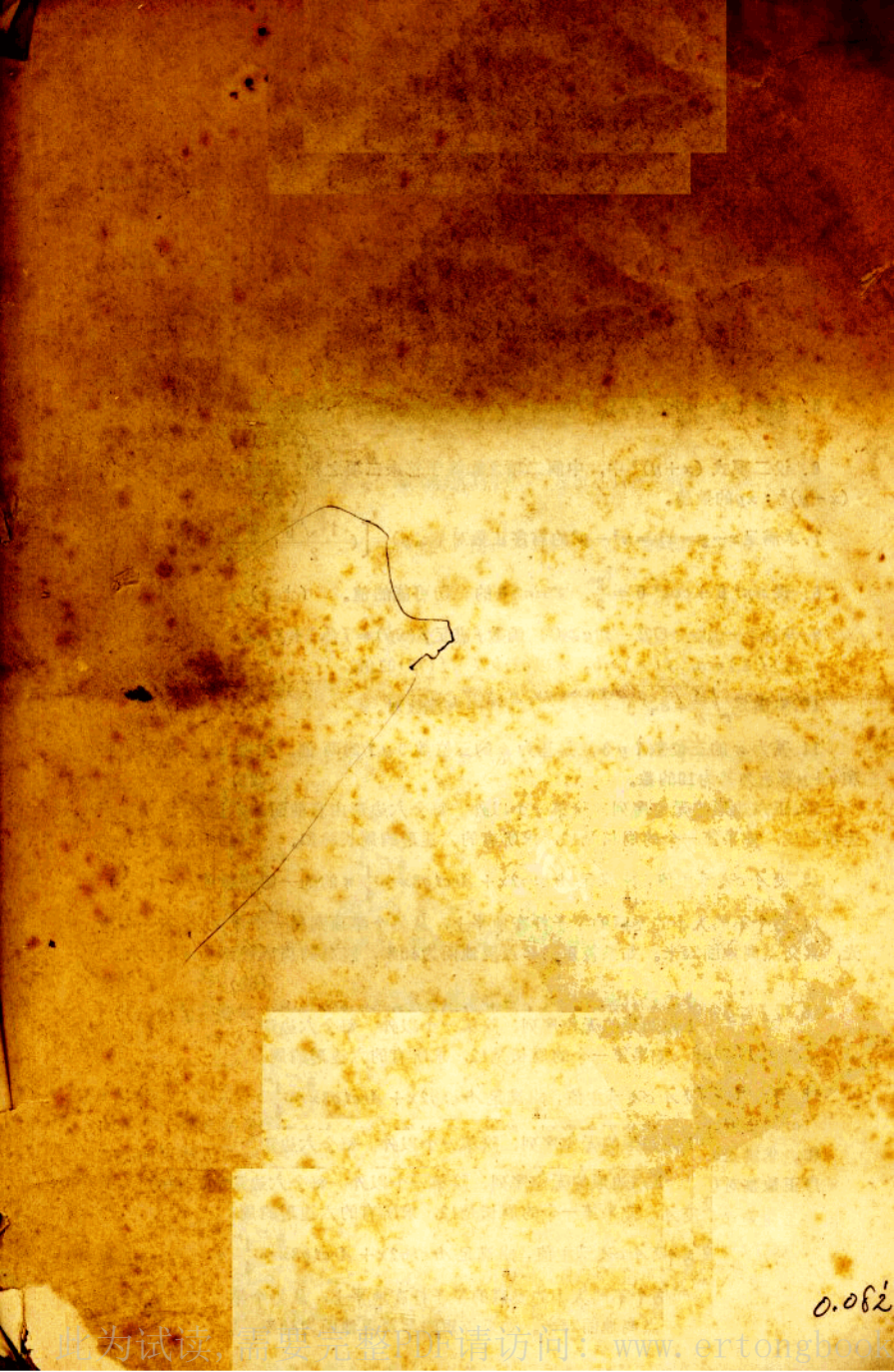
$= g(f(x))$ 的所有的值。

$$(0, -\frac{1}{4})$$

16. 每一具形式:

$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2$ 的式子可以用至少两种不同的方式表示为两个平方的和。求满足 $x^2 + y^2 = 44^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 33^2 + 33^2 \cdot 5^2 + 5^2 \cdot 44^2$ 的 $x > y$ 的三种可能的有序正数整对 (x, y) 中的任何一对。

$$((605, 110) \text{ 或 } (550, 275))$$



0.062