数学的探测性思想方法

郑格于著

序

探测性思想方法是研究数学的一种重要方法。可以说，数学上的许多发现和发明，都离不开探测性思想方法的巧妙运用。从数学教学上看，探测性方法本质上就是启发式（*Heuristic*）方法，它是能用以激发青年人的智慧和培养学生独立思考能力的一种思想方法。

国外数学教学杂志上有时也讨论启发式方法。特别值得提到的是，已故美籍匈牙利著名数学家乔治·鲍利亚（*G. Polÿa*）曾致力于数学方法论研究数十年。他的三部著作《数学发现》、《数学中的归纳与类比》及《数学中的似真推理》对现代欧美数学教育与教学法有相当的影响。《数学发现》一书的中译本最近已在我们国内出版，这无疑是会受到广大读者欢迎的。

我们国内对探测性思想方法的研究还不多。年前我收到了来自湖北省郧阳师专数学系的一份油印材料，获知郑格于同志等在学校领导的支持下，致力于研究“数学探测性思想方法”，曾结合教学做了不少工作，取得了可喜成果。无疑，这项工作的方向是完全正确的，而对于培养数学师资的院校来说更有较深远的意义。

作者在以“数学中的探测性思想方法”为题的著作中，借助于平面几何，代数以及初等数论中的一些有趣问题的分析（包括着作者自已的一些研究心得），介绍了“模糊性

探索”的方法。这些都不是鲍利亚书中可以找到的题材，且具有自已的特色。因此，我赞成这本书能够印刷出版，以供大、中各级学校数学教师及高年级学生参考学习之用。

吉 林 大 学 数 学 教 授

大连工学院应用数学研究所所长　徐利治

华 中 工 学 院 兼 任 教 授

1982年3月7日

目　录

数学家们常赞成下列观点：

第一、直观是理解数学的因素；

第二、方法是发展数学的关键。

对二者的概括，就是我在本书中所说的数学中的探测性思想方法，在欧洲曾经把它叫做"赫列斯的克（*Heuristic*）的推理法"。数学家阿达玛(*J·Hadamard*)、鲍利亚（*G·Polya*）等对此曾进行过深入研究，而且写有专著，国内也有学者发表文章大力提倡这种方法〔1〕〔2〕。但有关于这方面的文章仍然不多。

根据我们的初步研究，觉得把探索划分成分明性探索与模糊性探索两大类，对进一步阐述清楚数学中的思想方法是有益的。

通常在教科书中叙述的以及在课堂上所讲授的多是些完备的理论，概念清晰，推理明确，一套定义、定理、公式已为人们所公认，也就是说在学校教育中人们对分明性探索已阐述得够多了。

我在本书中只是把重点放在人们易于忽视的模糊性探索方面。

比如一个定理，老师可以证明得井井有条，一步接一步，很准确地达到目的，结果是那样凑巧。学生往往在思索，这个定理是谁发现的？他是怎样想到的？为什么我们想不到那上面去？证明的方法那样巧妙，要是我们遇到这种问题，那就无法下手！等等。

数学家果真是天才吗？他们的脑袋是特殊材料构成的吗？我们自己的脑袋真是不能和他们相比吗？一连串的想法，可能激发初学者的好奇心，继续不断去探索新的知识领

域。但也可能使初学者对困难产生畏难情绪，对数学不感兴趣，甚至放弃它。

其实，成功的方法往往不是一下子就能找到的。在研究的过程中可能要走很多弯路，可能出现很多次失败，其实这是不足为奇的，每个人在研究一些新问题时，总是要经过一些探索过程的。聪明的人的思维方法则比较符合事物的客观规律，从而缩短了探索过程所费的时间。

数学家之所以能对问题的解决采取正确的方法，在于他们对问题有正确的判断，而正确的判断总是来源于周密的分析和必要的探索，以及对于由探索所取得的各种材料的联贯起来的思索。数学家在遇到问题时，总是使用一切可能和必要的观察和分析问题的手段，将对解决问题的各种有关材料加以去粗取精，去伪存真，由此及彼，由表及里的思索，研究其中已知因素和未知因素的相互关系，因而构成判断，定下决心，作出计划，进而形成一整套解决问题的方法。

吃一堑，长一智，失败是成攻之母。这句名言也告诉人们在数学中成功的研究总是起源于探索，探索一次失败了，再进行一次新的探索，直到成功为止。

由于个人水平有限，我在这本书中，不可能介绍给人们一种可以解决一切问题的万能的方法，而只是根据个人的体会谈一下模糊性探索中的一些基本规律，如能灵活地运用这些基本规律，有可能解决一些新问题。

同时，我们也大胆地运用这些方法对一些困难问题作点尝试，比如世界著名数学难题哥德巴赫（*Goldbach*）问题，当然要想彻底解决它是困题的。

读者在阅读了本书的主要部分以后，可能好奇地发问，为

什么不能用探测性思想方法解决哥德巴赫问题呢？

我们的回答是：能！我在本书最后的附录Ⅱ中就以不短的篇幅来进行这种探索，发现的结果是非常有趣的。然而我们必须指出，附录Ⅱ中最终所建立的定理要想成立，还有一个尚待解决的问题，那就是库朗（*Courant*）、罗宾逊(*H·Robbins*)和赫兹（*Hertz*）三位数学家所设想的质数分布密率函数的存在还未证明，要克服这个困难之点，还需我们继续进行探索。

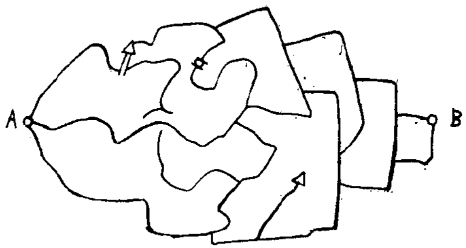
根据我们在教学与科研中的体会，把探索划分成分明性探索与模糊性探索两大类，对于研究数学中的思维方法具有很重要的意义。在一般的数学教学的论文以及介绍证题术的书籍中谈论的大都是属于分明性探索，而对模糊性探索却往往没有给予应有的重视。因此，作者在此书中把精力着重放在阐述模糊性探索方面，这是一个新的偿试，书中若有不妥之处望广大学者批评指正。

§1. 关于分明性探索与模糊性探索

分明性探索是指研究某个问题时，条件、结论比较明确，解决问题所依据的理论方法比较现成，只是人如何运用这些已有的理论方法准确地达到解决问题的目的。如同由甲地到乙地，中间需要走过一些道路，经过一些中转站，而道路和中转站是预先被安置好了的，不过有其一定的灵活性和选择性。灵活性说明经过的线路不一定唯一，选择性说明有一定的难度，不是随便可以通过，还需有一定的机智才能走

对。

如下图，A到B，中间是由一些网络连结的，顺着线路是可走通的，但有时被折回原处，或进入一个无法再前进的迴道。



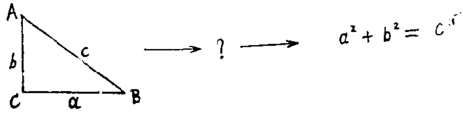
“‖”表示可以逾越的河道，但越过时运用不同的工具。“△”表示不能越过的障碍。有若干条线路能由A到B，但中间有最短路径，有最好走的道路。

总的来说，目标是明确的，道路是现成的，类似这种问题的求解，也要求人有一定的探索，而这种探索是比较容易达到的，就把这种探索叫做分明性探索。

如平面几何上证明勾股定理，问题提得很明确。在$Rt_{\text{、}}\triangle ABC$中，$a$、$b$是两直角边，$c$是斜边，求证

$$a^2+b^2=c^2$$

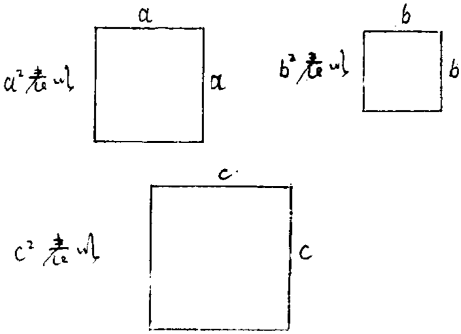
图示如下



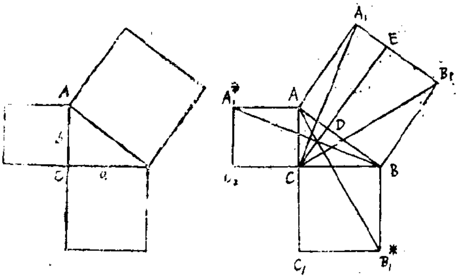
考虑问题的人，很容易按下面几种方式分析：

方法一、顺藤摸瓜

思考：（1）



（2）先把图画起来：（3）观察图形中的性质：



这中间要有一些观察力

$$\triangle A_1'AB \cong \triangle CAA_1, \qquad \triangle ABB_1' \cong \triangle B_1BC$$

$$S_{AA_1'C_2C} = 2S_{\triangle A_1'AB}, \qquad S_{BB_1'C_1C} = 2S_{\triangle ABB_1'}$$

$$S_{AA_1ED} = 2S_{\triangle CAA_1}, \qquad S_{BB_1ED} = 2S_{\triangle B_1BC}$$

从而得到证法的步骤

$$a^2+b^2 \overset{(1)}{=\!=} 2S_{\triangle A_1'AB} + 2S_{\triangle ABB_1'} \overset{(2)}{=\!=} 2S_{\triangle CAA_1}$$

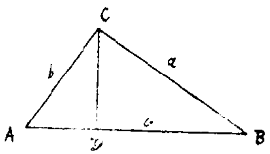
$$+ 2S_{\triangle B_1BC} \overset{(3)}{=\!=} S_{AA_1ED} + S_{BB_1ED} \overset{(4)}{=\!=} c^2$$

其中 4 个搭桥，(1)、(2)、(3)是关键。

在此反映出学生的智力有 4 个等级

甲种：三个关键全部通过；乙种：只通过其中两个关键；丙种：只看出其中一个关键；丁种：没有看出任何关键。

方法二、用形数结合的方法



有些学生由 $a^2+b^2=c^2$ 联想到作 $CD \perp AB$→进一步观察其中线段关系→△的相似关系→线段的比例关系→$a^2=$？$b^2=$？再考虑 $a^2+b^2=$？化简成 c^2。于是开始实现这些步骤。

观察

$$(1)\ \begin{matrix} \triangle CDB \sim \triangle ACB \\ \\ \triangle CDA \sim \triangle BCD \end{matrix} \rightarrow (2)\ \begin{matrix} \dfrac{a}{BD}=\dfrac{c}{a} \\ \\ \dfrac{b}{AD}=\dfrac{c}{b} \end{matrix} \rightarrow (3)\ \begin{matrix} a^2=c\cdot BD \\ \\ b^2=c\cdot AD \end{matrix}$$

$\rightarrow(4)\quad a^2+b^2=c(BD+AD)=c\cdot c=c^2$

4 个步骤，（ 1 ）、（ 2 ）、（ 3 ）是关键，仍得智力的四个等级。

方法三，拼补偿试—手脑并用，构思巧妙

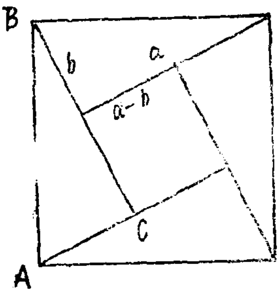
把同样的四个直角$\triangle ABC$拼在边长为c的正方形里，观察：

（1）内部的正方形的边长$=|a-b|$；

(2) $c^2=(a-b)^2+4S\triangle_{ABC}$；

(3) $c^2=(a-b)^2+4\times\frac{1}{2}ab$；

(4) $c^2=a^2+b^2$。



4 个步骤，（ 1 ）、（ 2 ）、（ 3 ）是关键，而（ 4 ）最关键。但（1）的产生也可解释为精密的构思，这要有洞察力。但也可解释为实践出真知，人的聪明智慧常常是从实践得来的，只要有点好奇心，先动手试试看，把四个同样的直角三角形如上图拼起来，他就会有所发现，我国古代的数学家可能就是这样发现了勾股定理，同时也发现了这个定理的证明。

方法一是毕达哥拉斯的原证，方法二是现今教科书常用的证法，方法三是中国古代的证法，各有长处。方法三反映了中国古代劳动人民的智慧有其特色，颇为精巧，也证明了“天才来自于实践”。

方法一、方法二很能说明分明性探索只不过是把前人已

经证过了的定理出在黑板上要我们去证，那么我们可以比较有把握地按照分析综合法找到证题的方法。

什么是模糊性探索呢？我们就以上面这个问题来说吧，古代的人是怎样发现这个定理的呢？

我们说模糊性探索就是指人们在观察某一事物时，还不知由条件可以推得什么结论。比如说人们在设想一个直角三角形随着两直角边长的确定，斜边也跟着被确定了。按现今人的说法，c应当是a、b的函数，也就是说

$$c=f(a、b) \qquad \text{或者说} \quad \phi(a、b、c)=0$$

ϕ是些什么运算呢？这里就发生了三个想法

（1）提出存在$\phi(a、b、c)=0$的关系；

（2）确定ϕ是些什么运算；

（3）寻求证明。

模糊性探索就是指当（1）、（2）、（3）都不清楚，或容易断定（1）但（2）、（3）不清楚，在模糊程度比较大的情况下研究问题寻求规律，我们把这种探索叫做模糊性探索。

若（1）、（2）是清楚的只须解决（3），那就是分明性探索、古往今来学校教育常常只注意给出了定理要学生去证明，而忽略了难度大的模糊性探索。

因此，有些学生在学校考分高，但在工作上并无创造，原因就在于此。有模糊性探索的才智的人，虽然智力较高，但在考分上反映不出来，甚至越出了常规，遭到师生的嫉视也是有的，伽罗华、牛顿、爱因斯坦在青年时代的历史就是如此。

又如世界著名难题哥德巴赫问题：证明任意大于4的偶

数都是两个奇质数之和。解决这个证明是否属于分明性探索呢？

我们来剖析一下这个问题

（1）任意大于4的偶数n与奇质数集中的某个p、q是否恒有关系$\phi(p、q、n)=0$存在呢？这个尚不能确定。

（2）是否有p、q，使$p+q=n$，这里也未肯定。

（3）寻求恒有 $p+q=n$ 的证明。

所以解决哥德巴赫问题是属于模糊性探索的问题之一。

再如实变函数论上已经能够证明存在有测度为0的非*Borel*集，但具体构造这样一个集又是非常困集的。解决这类问题仍然属于模糊性探索，它的模糊性表现在对构造有这种特性的集的基本理论还掌握得太少了。

划分分明性探索与模糊性探索的界线也不是绝对的，应由问题的复杂性及解决问题的人所掌握的理论与方法的水平来决定。

比如说要求一个没有学过平面几何的小学生去证明一道勾股定理题，则对于小学生来说就是模糊性探索，因为小学生没有掌握起码的几何知识，所以就无从下手，也就是不知从哪里思考起，因而就显得非常模糊。

§2. 关于模糊性探索的基本方法

一、观察

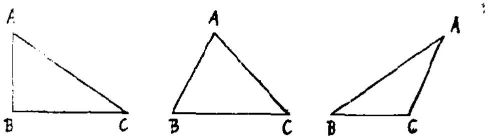
在千变万化的事物中常可找出其中部分事物的共同特征，而这些共同特征不是一眼就能觉察到的，常常需要

（1）人的思想对这些特征的注意力；

（2）耐心细致地观察和实验；

（3）善于撇开一些障碍着事物的共同特征表露出来的次要因素，抓住决定事物的共同特征的主要因素。

比如说，学生在初学平面几何时，教师最好从激发学生的注意力入手来培养学生对发现真理的兴趣，如讲三角形的性质时，不要教条式地提出来“这一堂课我们证明三内角之和等于180°”、“这一堂课我们证明三角形的外角等于和它不相邻的两内角之和”，而是先让同学们实践一下，“你们去量一量下面这些三角形每一个三角形的三内角之和是多少？进一步归纳“每一个三角形的三内角之和的特征”，而在观察时可以采取数字和形象法。

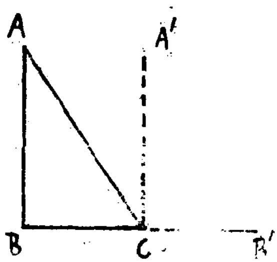


［数字法］$\triangle_1$：$A+B+C=30°+90°+60°=180°$

$\triangle_2$：$A+B+C=59°+61°+60.5°=180.5°$

$\triangle_3$：$A+B+C=24°+36°+119°=179°$

［形象法］　把每个三角形的三个角拼到一起，并要求怎样拼时作图简单些（这样一方面较快地把三个角拼成一个角，另一方面也从实践中体会到了证明特征的方法（如找什么样的补助线对证明问题有利）。很显然



是把一个角固定，如在$\angle ACB$的外边作一条直线$CA' \parallel BA$，则$\angle ACA' = \angle BAC$，再于$\angle BCA'$的外边作$\angle A'CB' = \angle ABC$。学生很容易发现后面这一步不需要作了，只把$BC$延长至$B'$就行了。

类似地去验证其它两个三角形，这种教学法比较好。只要教学方法使用得恰当，就会引导学生实践出真知：

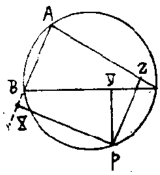
（1）从作图的过程中学生自动发现三角形三内角之和为一平角；

（2）从作图过程中学生自动发现了证明这一结论的关键是过C作$CA' \parallel BA$。这种教学方法生动有趣，培养了学生探求真理、动手动脑的好习惯。

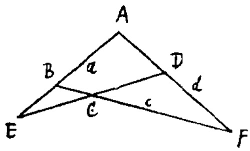
过去有些教科书不是采取后面的这种方法，而是要学生按前者量角度的数字再相加，缺点是（1）不及后者富有兴趣；（2）因量度的误差障碍着得出共同特征的结论；（3）对证题没提供任何启发性的东西。

上例说明观察事物的规律有时用形象法比较好，如讲著名的西摩松（*Simson*）线、密国尔（*Miquel*）点等定理都可以通过课外活动引导学生观察下面几个图形的特征而由学生自觉地去发现它：

（i）过三角形ABC的外接圆上任一点P到$\triangle ABC$



图(i)



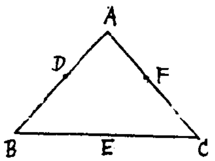
(图(ii)

的三边作垂线：

$PX\perp AB$，$PY\perp BC$，$PZ\perp AC$，观察X、Y、Z的特征。

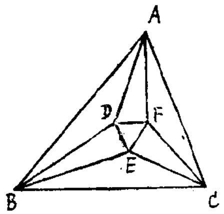
（ii）直线a、b、c、d相交成四个三角形：$\triangle ABF$，$\triangle AED$，$\triangle BCE$，$\triangle CDF$。依次作出这四个三角形的外接圆，再观察这四个圆的特征。

平常还可以引导学生观察下面各种图形的性质，从而发现在平面几何中真是百花灿烂，奥妙无穷。



在$\triangle ABC$的三边上依次取D、E、F三点，观察$\triangle ADF$，$\triangle BDE$，$\triangle CEF$的外接圆有些什么特征（*Miquel*定理）。

在$\triangle ABC$中AD、AF是$\angle A$的三分角线，BD、BE是$\angle B$的三分角线，CE、CF是$\angle C$的三分角线，AD交BD于D，BE交CE于E，CF交AF于F，观察D、E、F有什么特征（*Morley*定理）。（如下图）



当然有时通过数字法去观察事物的规律也是发现真理的一个途径，如在小学生时代要求学生观察被2整除的数的特征，进而观察被5整除的数的特征，观察被2及5整除的数的特征，被3整除的数的特征，被9整除的数的特征，等等。

观察求

$$1+2+3+4+5+\cdots\cdots+98+99+100$$

时，怎样才能算得快等。

在中学生时代要求学生去观察下列各等式：

$1 = ?$	$1 = ?$
$1+3 = ?$	$1+1 = ?$
$1+3+5 = ?$	$1+2+1 = ?$
$1+3+5+7 = ?$	$1+3+3+1 = ?$
	$1+4+6+4+1 = ?$

可以发现一些什么？

又在右边的表中把每行带圈的数相加得到什么？不带圈的数相加呢？

①

① 1

① 2 ①

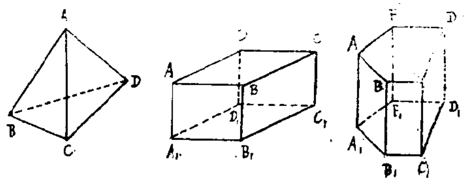
① 3 ③ 1

① 4 ⑥ 4 ①

① 5 ⑩ 10 ⑤ 1

① 6 ⑮ 20 ⑮ 6 ①

观察下面各图：



四面体	平行六面体	七面体
面　数＝4	面　数＝6	面　数＝?
顶点数＝4	顶点数＝8	顶点数＝?
棱　数＝6	棱　数＝12	棱　数＝?