·学术交流资料·

圆锥螺线数学研究

资　料（一）

江苏省武进县革委会科委初审印发

1979年3月18日

资料(一)

关于园锥螺线的轨迹方程和弧长公式的理论与实际问题

§1—1 问题是在什么情况下提出来的？（关于提出本问题的动机、背景与目的）

〔问题〕 某锅炉工厂工人师傅在制作“汽水分离器”上的主件“绞龙体”时，须要在底面半径等于r，斜高（母线长）等于ρ的园锥形芯体上，分匝粘焊绞龙形（即园锥螺旋线形）窄铁页K匝，求问怎样逐匝绘图计算，准确下料？

这个问题提出后，可真的直接间接难住过不少知识分子；同时也充分暴露了有关数学部分的理论与实际没有很好结合的问题。

据了解，原来在相当繁多的高等数学书本中，深奥的n维空间几何理论不涉及这类具体问题，而在普通三维空间几何领域里，却也同样找不着一个确切可用的园锥螺线弧长公式；对于空间曲线的讨论，虽都提出有一个通用性质的空间曲线弧长积分公式：

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

但是，在举例计算时，大都只举出一种原本可以展成直角三角形的斜边求解的“园柱线”为例；虽也有列举几个抽象、无名的三次曲线的，但又难以联系实际，不便绘图验算，也就不能从中窥探奥秘并进而推理到一般。至于对客观世界广泛存在的典型空间曲线“园锥螺线”倒反缺乏实例，无所启发，结果留给读者的难题是什么呢？面对着通用式(A)，就是应用不通，不能解决实际问题。

“知识的问题是一个科学问题，来不得半点的虚伪和骄傲”、“不懂就是不懂，不要装懂”。按理说，对于这种基础性的数学知识，是不容许存在半点含糊的，有必要认真对待，彻底弄通它！

个人对于上述具体问题，也曾为之长期思考，反复试算，在鉴别与利用书本知识的同时，对新方法，新资料的探讨和积累也作了相当的努力，只是由于水平限制，加以缺乏交流请教机会，虽说也勉强取得了点滴成就，但长期积存与不断发现的新旧问题却越来越多了！

本着毛主席关于“人类总得不断地总结经验”的教导，决定先把多年摸索所得结果包括成熟与不成熟部分，一併摘录在下面，希望能抛砖引玉，通过广大数理科技工作者与爱好者的公开扩大研究、群策群力，使得在有关园锥螺线与一般空间曲线或空间几何以至于其他有关

数理学科方面，“有所发现，有所发明，有所创造，有所前进”。这里须特别盼望直接相关的学者专家多加提示，多作贡献！

§ 1—2 在个别书本上可以见到的园锥螺线的参数方程及弧长积分公式，为什么不能应用？

为什么在个别书本上仅见的园锥螺线公式不能应用？

对此又应该怎样评估、看待？——据见闻所及，经过粗浅研究，个人现有的印象是这样的：

在微分几何及初等微积分学包括课本、习题集以及工具书中，曾分别以课文、习题答案和公式汇编的形式，提出有以下几套有关园锥螺线方程及弧长公式，但其中一个概念模糊、有疑问，实际不能应用；另一个则缺乏完整的推理过程，只能作为一种示范性特例看待，也同样不能应用于一般。现把个人浅见简述如下：

（Ⅰ）根据苏联 AП·诺尔金著《微分几何学》第二章习题 28 及第三章习题63，所提出的有关公式（原文照录）：

28.〔证明曲线（园锥螺旋线）

$$r = e^{mt}\{ae(t) + \ell k\} \cdots\cdots (B_1) \qquad 注①$$

位于园锥

$$\ell^2(x^2+y^2)a^2z^2 = 0 \cdots\cdots (B_1—1)$$

上，且与其母线交成定角（参见原书图 7 ）

提示：园锥之母线向量可表为

$$ae(t) + \ell k \cdots\cdots (B_1—2)$$

解答：
$$\cos\alpha = \frac{m^2(a^2+\ell^2)}{\sqrt{m^2(a^2+\ell^2)+a^2}\sqrt{a^2+\ell^2}} \cdots\cdots (B_1—3)〕$$

63.〔求园锥螺旋线 $r = e^{mt}\{ae(t)+\ell k\}$ 弧长的表示，及其当 $t_0 \to -\infty$ 时的极限。

解答：
$$S = e^{mt}\frac{\sqrt{a^2(m^2+1)+\ell^2}}{m} \cdots\cdots (C_1)〕$$

对上述公式的初步分析：

根据一般的或者习惯的概念，所谓园锥螺线，仅仅是指着普通等距园锥螺线或者说是导程为等差级数的园锥螺线而言，该书对此并未附加什么特殊区别或限制性的说明，而且，还在附图 7 中显著地表示了等距螺线的形状，同时附图也没有任何文字注释，这就意味着，作者的意图无非是为了暗示读者：“园锥螺线各匝间距离相等，它（各匝螺线弧）与母线交成

注 ① 原书在“园锥螺线”方程(B_1)中有两个文字 e，前一个 e 应视为“纯量常数”，后一个 e 是用粗体字印出的，应视为“向量常数”。

角α，这个角α的余弦可用式子（B_1—3）表出，因为该式右边的m、a、ℓ都是纯量常数，这就证明了α是个定角”，并且，由于这个附图的辅助作用，很容易使人联想到：“原来，各匝距离相等的螺线弧与母线的交角，就相当于平面几何中的同位角关系似的呀，据此，不也就直观地证明它们是定角了吗？”然而，如果当真这样设想，那你就上当受骗、大错而特错了！这种可能滋生的错觉、实际导源于该书对园锥螺线的特殊化定义（B_1）；而一系列有关公式——那些概念模糊，出发点不明的有关公式的推证，结果又进一步加强了这种错觉！

事实上，普通的不管是什么锥度的等距园锥螺线，绝对不和母线交成定角。（具体的论证将在资料（二）§1—1中提出）如果泛泛地认为凡园锥螺线都和母线交成定角，这个概念的出发点就是不对头的。

那么，究竟客观存在不存在有某种园锥螺线确能和母线交成定角的特殊情形呢？实际倒是确有其事的。但那种特殊的园锥螺线乃是独一无二的，是否就恰好符合书中由（B_1）所绘出由（C_1）所计算的那个真象不明的“园锥螺线”呢？这一点，现在还不能遽下判断，下面，暂先写出个人的初步研究结果：

1．若以园锥螺线的导程（螺线上任意一点至顶点的距离）的表达式当作某种园锥螺线的特征方程，那么，对于普通等距园锥螺线来说，它可以表作：

$$\rho(\theta=2k\pi)=kR \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (B'_2—1)$$

运用这种导程表达式作出的“园锥螺线，是处处都不和母线交成定角的。而螺线与母线的确能交成定角的那一种，则必须表作

$$\rho(\theta=2k\pi)=R^k \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (B'_2—2)$$

由式（B'_2—1）绘出的是导程按等差级数变化、公差等于R的“等距园锥螺线”；其正射影即“阿几米德螺线”。

由式（B'_2—2）绘出的是导程按等比级数变化、公比等于R的“变距园锥螺线”；其正射影即“对数螺线”。

2．如果丢开诺尔金书中由附图7所暗示的等距园锥螺线的具体形象，也不考虑书中一再泛称为“园锥螺旋线”这个笼统名词的通常含义，而仅仅着重注意该书公式（B_1）和（C_1）中都含有对数螺线$r=e^{mt}$的因素以及原文有“交成定角”的具体说明这一事实，据此，再作退一步的分析，即迁就事实，不按通常等距园锥螺线而只按特殊的变距等角园锥螺线来考虑：首先，来看看习题63中用来表达所谓“园锥螺旋线”弧长的函数关系式（C_1）又是否恰恰符合那种客观存在的变距、定角式的园锥螺线的自然规律？这里暂且不采取绘图测算检验步骤，而是准备根据以上提出的螺线导程表达式（B'_2—2）另推公式，先从弧长答案的比较入手。

按个人的推理，关于（B'_2—2）型变矩等角园锥螺线在空间笛卡几直角坐标系中的参数方程可写作

$$\left.\begin{aligned}x&=e^{mt}\cos t\\y&=e^{mt}\sin t\\z&=be^{mt}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (B_2)$$

关于此式的推导原理与过程，可请参看本节后段对普通等距园锥螺线方程推导法则的有

关叙说。

上式中： $b=\frac{z}{r}=\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$，而 φ 表园锥顶夹角。

由（B_2）推得的这种特殊的对数型园锥螺线弧长的积分公式及其已积函数式子是：

$$S=\sqrt{m^2(1+b^2)+1}\int_{t_1}^{t_2}e^{mt}dt=\frac{\sqrt{m^2(1+b^2)+1}}{m}\left[e^{mt}\right]_{t_1}^{t_2}\cdots\cdots\cdots(C_2)$$ 注②

为了便于对(C_2)与(C_1)进行比较，再就两式中不同的常数 a、ℓ 和 b 作一番考查：

首先可判定，书本方程（C_1）中的 a、ℓ 直接来自（B_1），间接来自（B_1—1）。

进一步再考察（B_1—1)中 a、ℓ 同一般园锥面方程中有关常量 a、ℓ、c 之间的对照关系：

在标准园锥面方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\ell^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{Ⅰ})$$

中，当园锥（一般是指椭园锥，而园锥是椭园锥的一个特例）底面短半轴 ℓ 与长半轴 a 相等，并把竖标 z 轴上的截距（具体锥高）c 改写成 ℓ 时（按这种文字符号变换，无非由于用 a、ℓ 符合字母排列顺序，而 a、c 不连接，不自然，并没有其他特殊用意），则(Ⅰ)式可变为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{\ell^2}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{Ⅱ})$$

由(Ⅰ)到(Ⅱ)的这种常量符号变换，是不影响(Ⅰ)的基本性质的，是完全许可的，由此，便得到诺尔金书中给定的园锥面方程

$$\ell^2(x^2+y^2)-a^2z^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B_1—1)$$

这就看出：（B_1—1）中的 a，直接等于(Ⅰ)中的 a；而这个 a 表示着园锥底面可变半径 r 在某一时刻的特定常量。

(B_1—1)中的 ℓ，则相当于(Ⅰ)中的 c；而这个 c，表示着园锥的可变高度 z 的某个特定常量。

它们之间的关系式就是 $\frac{r}{z}=\frac{a}{c}$ 即 $\frac{r}{z}=\frac{a}{\ell}$

再观察（C_2）中的 b，它导源于（B_2），按照以上的规定作同等的变换，从而也有

$$b=\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}=\frac{z}{r}=\frac{c}{a}=\frac{\ell}{a},$$

把 $b=\frac{\ell}{a}$代入（B_2）和（C_2），于是得到方程

$$\left.\begin{aligned}x&=e^{mt}\cos t\\y&=e^{mt}\sin t\\z&=\frac{\ell}{a}e^{mt}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B'_2)$$

和弧长

$$S=\frac{\sqrt{a^2(m^2+1)+\ell^2m^2}}{am}\Big[e^{mt}\Big]_{t_1}^{t_2}\cdots\cdots\cdots\cdots(C'_2)\qquad \text{注③}$$

（诺尔金“微分几何学”书中的“图 7”，见 P36）

看来，（C'_2）同（C_1）相比较，外形并不相同，实质究竟如何，还有待进一步检验。但原则上应该指出，作为反映同一种变距、等角（注意到等角必变距；而且必须满足条件 $\rho(\theta=2k\pi)=R^k$ 时等角的实现方有可能）园锥螺线规律的轨迹方程与弧长公式，其终极的结果，必须是殊途而同归，即（C'_2）与（C_1）原则上必须等价。假如现在就能判定（C'_2）与（C_1）并不等价的话，那么，又应该怎样鉴别两套公式的真伪？对这问题，这里不能再作深入探讨，一则由于个人的认识水平与现实条件限制（例如对便于进行实测的螺线导程按等比级数急速增大的大型展开图例不易作好），再则本资料中对公式推导问题的研究其重点是放在普通等距园锥螺线方面的，为此，希望研究者能就以上未完成的理论分析自作最后判断，并给以公开指教！

（Ⅱ）据苏联Б.П.吉米多维奇编著的《数学分析习题集》习题 4239、以及北京矿业学院编著的《数学手册》，还有苏联C.П.芬尼可夫《微分几何教程》P.59 中同样提出了园锥螺线的参数方程是

$$\left.\begin{aligned}x&=t\cos t\\y&=-t\sin t\\z&=at\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

另外还见过一本旧编的微积分讲义，除指出园锥螺线的参数方程也和上式（B）一样之外，还进一步提出了它（园锥螺线）的弧长公式为：

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1+a^2+t^2}\,dt\cdots\cdots\cdots\cdots(C)$$

个人为了求解 §1—1 中提到的实际问题，首先对方程(B) 求导数并平方后相加，再代入一般化的空间曲线弧长积分公式 (A)，结果恰好得出上列公式 (C)。故个人的判断，关于书本中公式(C) 的推导方法与过程是没有错误的，但是凭这个公式究竟能不能解决具体计算问题呢？事实却使人遗憾，因为直接应用公式 (C)，并进行了反复验算，结果全都是错误的，而且不是细小误差，乃是大不相称的问题。现把试算检验情况记录如下：

〔例题1〕已知园锥体顶夹角为 $\varphi=38°56'33''$ 盘绕在锥面上的等距螺旋线匝间距离（以锥面上的距离为准，这里不考虑在中心轴上的射影距离）为 $R=100cm$，求由顶点起第一、二、三匝螺线总长若干？

〔解〕 试用公式(C)求解本题

1）应有的推理

注 ②、③ 在1975年 3 月 8 日的油印稿本中，(C_2)（和C'_2）两式都错漏了一个常量因子 $\frac{1}{m}$，先后承北京铁二中张振军同学和南京大学数学系数学专业给予指出，特此致谢。这里已加订正。

先确定本例题中与公式对当的变量 t 和常数 a：

假设以 t 表变角，具体说，就是假设动点 m 在园锥导面上按照等距螺线的规律（这个规律是当 $t=2k\pi$ 时，点 m 至锥体顶点的距离为 $\rho=kR$）由顶点向底边作单一的斜航盘绕运动而连续射影于底面所形成的回转角为 t，又规定把这个角 t 的弧度数值作为这个变角的可变矢径。

这样，当动点 m 在锥面运动一匝，即射影于底面所构成的回转角 $t_1=2\pi$、射影于中心轴的高度 $z_1=t_1a$ 时，就应该有坐标

$$x_1=2\pi\times\cos 2\pi$$
$$y_1=-2\pi\times\sin 2\pi$$
$$z_1=2\pi\times a$$

依此类推，当 $t_2=4\pi$ 时，应有

$$x_2=4\pi\times\cos 4\pi$$
$$y_2=-4\pi\times\sin 4\pi$$
$$z_2=4\pi\times a$$

当 $t_3=6\pi$ 时，应有………………

但是，稍加注意，就马上会发现事情是根本矛盾的。

先不必忙着去计算坐标函数 x、y、z 在各个不同时刻、不同角度 t 的具体数值，即不必去计算 $2\pi\times\cos 2\pi$、$-2\pi\times\sin 2\pi$…… 等等积的大小，但看：由上列各坐标函数组中所显示的正比于变角 t 的可变矢经 $t=2\pi$、4π……这种情况究竟能不能满足例题中的要求？能不能体现预定的螺距？显然不可能：因为这里的矢经 t（相当于 r）和变角 t（相当于 θ）是永恒地保持着 $t:t=1:1$（即 $r:\theta=1:1$）的正比函数关系，它所能描绘的射影螺线将一律都是螺距为 $R'=2\pi$，注④ 而方程为 $r=\theta$ 的形式，若设

$$\frac{R'}{R}=\frac{r}{\rho}=q$$

那么，从此可能得到的园锥螺线的螺距将一律都是

$$R=\frac{R'}{q}=\frac{2\pi}{q}$$

由此可以断定：前述的书本上的园锥螺线参数方程（B）当然是永远也描绘不出各种不同锥度、不同螺距的园锥螺线来的—— 除 $R'=2\pi$，同时 $R=\frac{2\pi}{q}$ 这一特例而外。

注 ④ 设所论园锥螺线的射影曲线（阿几米德螺线）其回转角为 θ，可变矢径为 r，并规定以 $\theta=2\pi$ 时的矢径 r 的长度作为一个度量单位，命这个单位长度为 R'，则在

$$t:t=r:\theta=1$$

的错误假想下，就应该有：

$$\frac{t}{t}=\frac{r}{\theta}=\frac{R'}{2\pi}=\frac{2R'}{2\times2\pi}=\frac{3R'}{3\times2\pi}=\cdots\cdots=\frac{kR'}{2k\pi}=1$$

从而有 $kR'=2k\pi$，　　$\therefore\quad R'=2\pi$.

这事情很明显：在本例题中，假设园锥母线为 ρ，底面半径为 r，则

$$q=\frac{r}{\rho}=\sin\frac{\varphi}{2}=\sin 19^\circ 28' 16.5''=\frac{1}{3}$$

已知 $\rho=3R=300$（$R=100$ 是题给的） $\therefore\ r=\frac{1}{3}\rho=100$，

$$\because\ \frac{R'}{R}=\frac{r}{\rho}=\frac{1}{3},\qquad \therefore\ R'=\frac{R}{3}=\frac{100}{3}.$$

由此可知，当动点m按照导程为 $\rho_{(\theta=2k\pi)}=kR$、螺距为 $R=100$ 的特定规律而盘绕在半锥度为 $q=\frac{1}{3}$ 注⑤ 的园锥导面上作螺旋线运动时，其运动轨迹连续射影于园锥底面，所得的射影曲线（即阿几米德螺线）的矢径 r 的变化实况应该如下表：

当盘绕完第一匝时，射影螺线上的矢径长度（导程）为

$$r_1=R'=\frac{R}{3}=\frac{100}{3}\neq t_1=2\pi\quad(\text{或}\neq 6.2832),$$

当盘绕完第二匝时，射影螺线上的矢径长度（导程）为

$$r_2=2R'=\frac{2R}{3}=\frac{200}{3}\neq t_2=4\pi\quad(\text{或}\neq 12.5664),$$

当盘绕完第三匝时，射影螺线上的矢径长度（导程）为

$$r_3=3R'=R=100\neq t_3=6\pi\quad(\text{或}\neq 18.8496).$$

这显著的事实表明，以上所引用的书本上的园锥螺线参数方程(B)乃是根本不对头的，是错误的。

对于以上的论断，也可能使人感到考虑还不够全面，缘因是还有某些特殊情况未经阐明，容易引起错觉，比方说，能够满足上述特殊的由不正确的假想所引出的射影螺线方程 $r=\theta$，即射影螺线螺距为 $R'=2\pi$ 的例子是可能无限多的，例如，对于锥角 $\varphi=38^\circ 56' 33''$的园锥螺线，当令其螺距为 $R=6\pi$ 时，即可得射影螺距为 $R'=2\pi$；依此类推，一般地，若园锥体母线为 ρ_0，底面半径为 r_0，并且$\frac{r_0}{\rho_0}=q$，则当其螺线的匝距 $R=\frac{2\pi}{q}$时，便有射影螺距 $R'=2\pi$（设$q=\frac{1}{2}$，则 $\varphi=60^\circ$，$R=4\pi$ 即可）

但是，能不能根据那些特例的成立而勉强说方程(B)还可以作为特例来应用，还有其一定限度的正确性或实用意义呢？我想，这种逻辑是要不得的！世无“削足适履”之理，离开了“普遍性”就不存在“特殊性”，这里所说的特例，实际只不过是在用以纪录锥度与螺距可能有无穷多变化的、某种“无穷数列(R'_n)”中抽出的一个数项($R'=2\pi$)，犹如在自然数列“1，2，3……n”中总可以找到某一个满足需要的数N的意义是一样的，这根本就谈不到什么适应特殊解、具有有限正确性的问题。总之，必须从根本上去认识到把方程(B)当作一

注 ⑤ 请参看§3之2)及4)中有关 q 的作用意义

般性等距锥螺方程应用的错误意义才对头，〔可请参看§2之4)〕。

2）试算的结果

也许认为对书本公式〔由(B)推出的(C)〕未经试算，单纯用理论分析指出其错误，说服力还不够，那么，再试看实践结果又怎样？

1．按正常的解法 ——

据〔例题1〕的要求，首先考虑如何确定对应于公式(C)中的 a 值：

这里，令 $a=\mathrm{ctg}\dfrac{\varphi}{2}=\mathrm{ctg}19°28'16.5''=2.82842\cdots\cdots$，看来是合理的。

因为，试就倒立园锥体来观察，在锥面等距螺线轨迹上任意一点，对应着两个变量的确定值：一个是中心轴高$|z|$，另一个是水平矢径 r，若把 z 轴比拟于能作升高运动的钟表的中央转轴，而 r 就相当于套在轴上端的可作旋转而且伸长运动的特制时针，从倒立园锥的顶点$z=0$、$r=0$ 处开始沿 z 轴往上看，随着时针旋转角（回转角）t 的增大，表轴正比地升高，时针也同时正比地伸长，而升高与伸长的比率就是

$$a=\frac{z_1}{r_1}=\frac{z_2}{r_2}=\cdots\cdots=\frac{z_n}{r_n}=\frac{z}{r}=\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

既然在方程(B)中规定：当变角 $t=|t|$ 个弧度时，螺线的水平矢径 r（即当时动点所在位置至中心轴的水平距离）它就等于 t 个弧度数的矢量单位长，那么，据以推理，就应有：

变角 $t=|t|$ 个弧度时，竖轴 $z=|z|$ 个长度单位的高

因为$\dfrac{z}{r}=a$ 和 $r=t$，故有$z=ar=at=t\,\mathrm{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$，

这样推理，是符合方程(B)的原意的。

为了避免利用余切函数计算 a 值引起小数运算麻烦与误差，另用勾股定理推算 a 值也很方便。

设园锥斜高（母线长）为 ρ，当 $t=t_1=2\pi$ 时，有

$$\rho=\rho_1=R=100,\qquad r=r_1=q\rho_1=\frac{100}{3},$$

$$z=z_1=\sqrt{\rho_1{}^2-r_1{}^2}=\frac{200}{3}\sqrt{2},$$

从而，

$$a=\frac{z_1}{r_1}=\frac{\dfrac{200}{3}\sqrt{2}}{\dfrac{100}{3}}=2\sqrt{2}$$

按题意，把

$$t_1=0,\ t_2=6\pi\quad \text{以及}\quad a=\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}=2\sqrt{2}$$

代入弧长公式(C)进行积分，结果可得

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1+a^2+t^2}\,dt=\frac{1}{2}\left[t\sqrt{1+a^2+t^2}+(1+a^2)ln(t+\sqrt{1+a^2+t^2})\right]_{t_1=0}^{t_2=6\pi}$$

$$=3\pi\times3\times\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{9}{2}[\,ln(6\pi+3\times\sqrt{1+4\pi^2}\,)-ln3]$$

$$=179.88880859+\frac{9}{2}(3.63590926-1.09861291)=191.3$$

但根据其他算法及实测展开图面弧长，所得的结果是

$$1014<S_{T(1-3)}<1015$$

事实表明：上面应用弧长公式(C)计算所得结果是同实际不相关的，这不是什么误差问题。

2．再采取另一个不正常的尝试性解法——

如果不顾原理，迁就错误公式，或者说是当你根本没怀疑到(B)、(C)的正确性问题的情形下，再试令

$$z_1=at_1=2\pi a$$

从而得出

$$a=\frac{z_1}{2\pi}=\frac{\frac{200}{3}\sqrt{2}}{2}\times0.31831=15.0052348,$$

并有 $a^2=225.1570734$

代入公式(C)，将会得到

$$S=3\pi\times\sqrt{1+225.1570734+36\pi^2}+\frac{1}{2}\times226.1570734$$

$$\times[ln(6\pi+\sqrt{1+225.1570734+36\pi^2}\,)-ln\sqrt{226.1570734}\,]$$

$$=1075.29919384+552.94448933-306.48632450=1321.7573587.$$

这个答数表明，盲目的应用公式(C)，并没有带来“巧合”的结果。

3．又一次考虑更换积分变量的试探解法——

曾有人指出，国内外公认，久经检验的书本公式，不会错的，你可能算法不对，或取错积分变量了吧？

我想，“实践出真知”，不经过反复的实践，毕竟错误不显，真理不明，为此，再次试取园锥体表面周角（即展开图中的扇面角）ϕ作为积分变量：

在〔例题1〕中，前已算出 $\frac{r}{\rho}=\frac{1}{3}$，

$\because$ $\frac{r}{\rho}=\frac{\phi}{\theta}$，（其中$\theta$表园锥体的底面园心角）

$\therefore$ $\phi=\frac{1}{3}\theta=120°$，而$arc120°=\frac{2}{3}\pi$，

为了适应公式(B)、(C)，先算出满足$z=at$时的a值；注意到，在同一时间，从底面

看，当 $t=t_1=\theta=2\pi$ 时，从锥面看，应有 $t=\phi_1=q\theta_1=\frac{2}{3}\pi$，

这时候，从中心轴看，应有

$$z=z_1=\rho_1\cos\frac{\varphi}{2}=R\cdot\cos 19°28'16.5''=100\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{200}{3}\sqrt{2}$$

从而有

$$a=\frac{z_1}{t_1}=\frac{\frac{200}{3}\sqrt{2}}{\frac{2\pi}{3}}=45.0157,$$

并有 $\qquad a^2=2026.4132465$

代入公式 (C)，得

$$S=\frac{1}{2}\Big[t\sqrt{1+a^2+t^2}+(1+a^2)ln(t+\sqrt{1+a^2+t^2})\Big]_{t_1=0}^{t_2=3\times\frac{2}{3}\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\{2\pi\times\sqrt{2066.8916641}+2027.4132415$$

$$\times[ln(2\pi+\sqrt{2066.8916641})-ln\sqrt{2027.4132465}]\}$$

$$=142.8269+1013.707\times(3.946355-3.807246)=283.8426.$$

结果还是一个不相干！

3）对以上解题结果的综合分析

以上所有的试算结果，都是极不相称的，同实际根本不相干的，总的说来，主要问题无非就是在1)条中推理的那样：

当你取水平回转角作为积分变量时，结果是

$$t_1=2\pi\ （或6.2832）\neq r_1=\frac{100}{3},$$

当你取锥面角作为积分变量时，结果是

$$t_1=\frac{2}{3}\pi（或2.0944）\neq\rho_1=100.$$

实践同理论都同样证明了：书本上的园锥螺线参数方程(B)和弧长积分公式(C)，根本不能适应任意指定螺距的“普遍性”要求，也不能认为它具有“特殊适应性”或“有限正确性”，应该从根本上认识到：从特殊到一般，这里还存在着一个由低级到高级的思维升华过程或认识飞跃过程。当还没有出现一般性的公式之前迳即运用那种特例方程来广泛地定义普通“园锥螺旋线”，乃是错误的！

§ 2. 合理的园锥螺线轨迹方程及弧长积分公式究竟应该是什么样子的？其应有的推导原理与要点如何？

1）按个人考虑，在空间笛卡儿坐标系中，园锥螺线的合理的参数式轨迹方程应该是

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda t\cos t \\ y &= \lambda t\sin t \\ z &= b\lambda t \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B_3)$$

而弧长的积分公式则可据此推得为

$$S=\lambda\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1+b^2+t^2}\,dt\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(C_3)$$

式中： t—螺线射影在底面（Oxy 平面）上的回转角，这里取作积分变量。

λ—螺线射影在底面上的矢径与极角的比例系数，即$\lambda=\frac{r}{t}$。

b—螺线的中心轴高与水平面矢径长度的比值，即$b=\frac{z}{r}=\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$，$\varphi$ 表锥角。

2）关于上列公式(B_3)、(C_3)的推导原理与过程

1．推导前的准备工作——

① 关系条件的分析与确定：对于普通等距园锥螺线来说，只要确知下列两条件，则其空间轨迹就可以描绘，其具体弧长就可以计算了，这两个条件是：

a． 已知园锥夹角或锥度；

b． 已知螺距与匝数或者导程与回转角。

② 根据有关条件给定几个有关的变量及常量：

设：园锥体顶夹角（锥角）为 φ，底面半径为 r，斜高（母线）为 ρ，中心轴高为 z，锥面周角（展开后的扇面角）为 ϕ，底面园心角（平面极角）为 θ。

并设，半锥度为q，螺线匝数为K，射影螺线的匝数也同为K，螺距为 R，射影螺距为 R'。

③ 明确各个变量及常量相互间的基本运算关系，其中主要有

$$\frac{\phi}{\theta}=\frac{r}{\rho}=\sin\frac{\varphi}{2}=q,$$

$$\frac{r}{\rho}=\frac{R'}{R}=q.$$

2．推导原理与过程——

设动点 m 在园锥导面上按指定的变化速率（决定于螺线“导程”——$\rho_{(\theta=2k\pi)}=kR$）与航向（决定于“螺距”和“最近路线法则”——即恒过经纬 n 等分锥面极角所得的 n^2 个曲边梯形的对角与中心点的自然法则，这里所说的 n 等分是指的经 n 与纬 kn 的情形）由顶点

向底边作螺旋形盘绕运动，在其运动轨道上任意一点$m_i(x,y,z)$处，必有投影线垂直于底面或Oxy坐标平面，那条投影线的垂足落在Oxy平面上，就是射影点$m_i(x,y)$，这个射影点对其所在平面的坐标横轴构成的回转角为θ，回转半径——可变矢径为r，则此点的纵横两坐标矢量函数可表为

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta.$$

与此同时，点m_i对中心轴（竖坐标轴）上还有一个平行于底面的水平方向的射影点$m_i(z)$,这个射影点的竖坐标可表作

$$z = r\text{ctg}\frac{\varphi}{2}$$

再注意到$\text{ctg}\frac{\varphi}{2}$是个常量，设此常量为$b$，则有 $z = br$

但为了简化运算，避免在微积分运算中出现两个变量，须要在r与θ两个变量中消去其一个，办法就是利用另外一个参变量例如t来代换θ，同时，令$r=\lambda t$。当t放在θ的位置时，t就等于θ，表为弧度；当t放到r的位置，即令$t=\frac{r}{\lambda}$时，t就和r一样，表作可变矢径，其绝对值就是该处具体弧度的数字值。附带说明，这里λ是“比例常数”而不是“任意常数”，其比值为$\lambda=\frac{r}{t}=\frac{R'}{2\pi}$。式中$R'$为$r$的度量单位(且$R'=qR$)，并具体规定为$t=2\pi$时$r$的长度等于$R'$

根据上述的代换法，就得到了前面所提出的新的（不同于书本的）参数方程

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda t\cos t \\ y &= \lambda t\sin t \\ z &= b\lambda t \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B_3)$$

再对方程（B_3）逐项求导数并平方，整理后得到

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \lambda^2(1 + b^2 + t^2)$$

代入通用的空间曲线弧长积分公式

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

结果就得到了前已提出的园锥螺线弧长的新的积分公式

$$S = \lambda\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1 + b^2 + t^2}\,dt\cdots\cdots\cdots\cdots(C_3)$$

最后对(C_3)积分得到的已积函数——园锥螺线的弧长表达式是

$$S = \frac{\lambda}{2}\left[t\sqrt{1 + b^2 + t^2} + (1 + b^2)ln(t + \sqrt{1 + b^2 + t^2})\right]_{t_1}^{t_2}\cdots\cdots(D_3)$$

3）关于上列园锥螺线弧长积分公式(C_3)的检验试算——重解前面提出的〔例题1〕

在〔例题1〕中， 已知锥角$\varphi = 38°56'33''$，螺距$R = 100$

求由顶点起第1～3匝园锥螺线弧长

〔解〕 先算出公式中的常数 λ 和 b 的数值：

由园锥螺线参数方程(B_3)及φ值，得知

$$b=\frac{z}{\lambda t}=\frac{z}{r}=\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}=\mathrm{ctg}\,19^{\circ}28'16.5''=2\sqrt{2}.$$

并知：$b^2=8$。

在锥面螺线导程 $\rho_1=R=100$处，

对应着底面上 $r_1=qR$ 和 $t_1=2\pi$，

这里 $$q=\frac{r_1}{\rho_1}=\frac{r_2}{\rho_2}=\cdots\cdots=\sin\frac{\varphi}{2}=\sin 19^{\circ}28'16.5''=\frac{1}{3},$$

故有 $$r_1=\frac{1}{3}\rho_1=\frac{1}{3}R=\frac{100}{3},$$

据方程(B_3)

$$\lambda t_1=r_1=\frac{100}{3},\quad\therefore\quad \lambda=\frac{100}{3t_1}=\frac{100}{6\pi}=5.30516476973,$$

以 λ、b 的数值及积分变量 $t_1=0$，$t_2=6\pi$ 代入公式(D_3)，得到所求螺线前三匝弧长为

$$S_{T(1-3)}=\frac{\lambda}{2}\Big[t\sqrt{1+b^2+t^2}+(1+b^2)ln(t+\sqrt{1+b^2+t^2})\Big]_{t_1=0}^{t_2=6\pi}$$

$$=\frac{\lambda}{2}\Big\{6\pi\sqrt{9+36\pi^2}-0+9\left[ln(6\pi+\sqrt{9+36\pi^2})-ln\sqrt{9}\right]\Big\}$$

$$=\frac{\lambda}{2}\Big\{6\pi\times3\times\sqrt{40.4784176043576}+9\left[ln(6\pi+3\times\sqrt{40.4784176043576})\ ln3\right]\Big\}$$

$$=2.652582384865\times\{359.77761715554+9\times2.53729949713\}$$

$$=2.652582384865\times38261331262971=1014.913$$

〔验证〕 仍用公式(D_3)分求三匝螺线弧长，再相加作比较，其结果是

$$S_{T(1)}=151.49752012398$$

$$S_{T(2)}=330.2298146861$$

$$S_{T(3)}=533.1859488316$$

$$S_{T(1)}+S_{(2)}+S_{T(3)}=1014.913$$

另再采用其他算法（参看§3）并实测展开图上三匝弧长，结果是

$1014<S_{T(1-3)}<1015$ （备有大型展开图，须根据需要另发）

4）关于自推方程(B_3)与书本方程(B)的比较观——从差异问题的分析，再总结出一般空间曲线参数方程的简便的推导法则（空间包孕射影的法则）

1. 明确两点差异，并排除对差异问题的一些有害看法——

如果把上列自推方程（B_3）同书本方程（B）对比一下，显然存在着两点差异：一点是(B_3)中增添了一个比例常数 λ；另一个是(B)中对纵标函数 y 取的负号，而(B_3)中则取了正号。

对于上述差异问题，曾有人提出这样的看法："关于两种方程中正负号不同，是小问题，书本中按第四卦限确定坐标函数符号，当然可以；若改取一卦限，也不算错，反正结果一样，不必研究它。至于书本公式仅只因为缺少一个比例系数而得不出正确的计算结果，这应该理解到：它基本是对路的，实际问题也不大，只要临应用时按需要给添上一个合适的系数就行了"。

甚至还有人闭着眼睛，硬说"书本公式根本没错，只是你理解不对头，应用不得法的问题"。可惜坚持这种印象性看法的人自己却不肯动手去检验试算，却根本提不出所谓"肯定正确"的正面论证材料来，正象毛主席指出的关于教条主义者的情形一样。

个人认为，对于上述那些主观保守看法，有必要严肃对待，认真分析，因为，那实质上是不负责任的，不是实事求是的，也就是反科学的；在对待"数学史上关于空间曲线的理论研究应如何依靠与贯彻唯物辩证法，争取及早从现有的'薄弱环节'中解脱出来，进而重整体系，快速进展"这个问题上，坚持以上那种主观保守看法的人，显然是在当促退派而决不是在当促进派。

2．再就上述两点差异说明自己的看法——

① 为什么在自推方程(B_3)中须要增添一个比例系数λ？是不是出于尝试、凑合？或者还别有客观理论根据？

我说，作为反映自然规律的某种曲线方程，没有客观理论根据是不可能正确推导出来的。

那么，对于方程(B_3)的建立，其客观根据又是什么？是不是看到书本中既以t代θ，又同时以t代r，结果形成$r:\theta=t:t=1:1$，或者$r=\theta$的这种混乱情形，不对头，或者说是人为地安排这种情形的"假想"（设计）不符合实际，所以须要改作$r=a\theta$，并置换为$r=\lambda t$才合理？这是否就算作推导法则中的客观理论根据？或者说这就是有关方程推导法则中的"关键"或"要诀"所在？

我说，这样理解法并没有错误，但不够深刻，还没有触及到问题的根本性质。

按个人的体会，话是否可以这样说：

一切空间曲线，都有其一个正射影曲线，在空间直角坐标系中，位于正射影平面—Oxy平面上的横标x与纵标y，就是能够并且必须协同一致地担当起这个射影曲线全部描绘任务的一对主角，因此，在坐标函数x与y的参数表达式中，就必须恰恰包孕着（或函着）这个正射影曲线方程的因素在内；同时，为了要逐点实现射影曲线空间化的目的，对于另一个要角竖标z的函数关系式，也必须注意满足"统一变量"与"协调参数方程"的要求，即必须使它（竖标z）同样函有正射影曲线方程的因素才行！

还应该指出：用统一参变数t表达的坐标函数x、y既能在Oxy平面描绘出正射影曲线(阿基米德螺线)；同样的原理，在Oyz平面上，用坐标函数y、z描绘出来的侧立射影就应该是衰减振荡曲线(它的函数式子是$y=\frac{z}{b}\sin\frac{z}{\lambda b}$，这是个人的推理，还有待实践验证）。

如果说对于怎样推导某种空间曲线参数方程的问题确有什么关键或要诀可供掌握的话，那么，实际也就算已经给出这种关键或要诀了。就以"园锥螺线族"为例，设已知所求园锥螺线的正射影螺线方程为$r=r(t)$，根据上述的"空间曲线方程必须包孕其正射影曲线方

程”的原理，可立即简便而确切地写出所求的园锥螺线参数方程，就是

$$\left.\begin{aligned} x&=r(t)\cos t\\ y&=r(t)\sin t\\ z&=br(t)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B_0)$$

式中：　$b=\dfrac{z}{r(t)}=\dfrac{z}{r}=\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$，$\varphi$表锥角

$r(t)$表示射影曲线的平面极坐标方程，也就是以t为变角的函数r的表达式的缩写。

这个方程(B_0)是适用于一般园锥螺线的，只要已知其具体射影方程$r(t)$，来一个直接代入就行了。

例如，若已知$r=\lambda t$或$r(t)=\lambda t$，代入(B_0)就立即得出正比等距外旋园锥螺线，如(B_3)就是；已知$r=\dfrac{\lambda}{t}$或$r(t)=\dfrac{\lambda}{t}$，代入就得出反比变距内旋园锥螺线；已知$r=e^{mt}$或$r(t)=e^{mt}$，代入就得出对数型变距等角外旋园锥螺线，如§1.中的(B_2)就是…………

有关方程(B_0)的进一步的论证，还将陆续在资料（二）、（三）各有关部分结合进行。

根据上述的原理与法则，可以清楚地看出：你要衡量空间直角坐标系中某一种园锥螺线参数方程是否正确、是否真能体现预期的目的要求，但看那个方程含不含有其正确的射影方程$r=r(t)$这个因素，并符不符合(B_0)那样的方程形式就够了。简单点说，就是：有它〔射影元素$r(t)$〕、是它，那就对；没有它、不是它，那就不对。任何差不多或近似正确的中间状态是绝对排除的，（当然，原本就是作为近似公式提出的不在此限列）。

现再结合书本方程(B)的讨论来说，(B)虽也大体上符合了(B_0)的形式，但却并不含有正确的射影螺线方程那个因素——因为普通园锥螺线的射影方程是$r=\lambda t$，而方程(B)所含有的却是$r=t$，这就表明，它根本没有从射影观念出发，不是基于正确反映自然规律所必不可少的自然辩证法的逻辑推理得来的，因此，绝没有理由认为它还有什么正确性或者所谓基本的有限的正确性可言！

以上的推理或辨别，总的在说明：关于普通园锥螺线参数方程(B_3)以及由(B_3)推广到一般化的方程(B_0)的推导原理与具体法则，首先应该肯定，它既不是偶然的凑合，也不是孤立的特例，可以指出：这个法则——建立空间曲线方程所必不可少的“射影元素包孕法则”，不但能够适用于一切类型的园锥螺线参数方程的正确而又简易的推导程序上，并且还应该看到，它事实上已经为开始打开整个空间曲线理论体系的神秘之门提供了一把万能钥匙（这把钥匙的基本材料就是自然辩证法），同时也将为那针对一切不明身份的琳琅满目的平面曲线图例而必须开始为之进行一番具有一定科学意义的“户口普查”工作创造出有利条件。

② 书本上究竟为什么须要在方程(B)中对横标x和竖标z同取正号、而对纵标y独取负号呢？这种做法的根据是什么？是否绝对必要？

据个人的看法，认为这并无必要，甚至是不恰当的；为了扫除研究本课题所碰到的概念障碍，有必要加以明辨。

首先考虑数学运算的实际需要：是不是原书著作者企图在不影响运算结果的前提下，设法消去某些不需要的中间项可能达到简化运算的目的，而作为一种运算手段，故意人为地单独对 y 贯上这么一个负号的呢？这不然，因为实际运算中根本不存在这个问题。

那么，是为了理论上、形式上非这么做就算错了？这也不见得，试看：在空间笛卡儿坐标系中，三个平面正交，割空间成八个卦限，假设螺线是由复合运动形成的，即假设园锥体作等角速度旋转，而动点落在某一卦限，并切锥面作定角直线运动，点的轨迹就描出了螺线。在这个假设的前提下，若使动点落在第一卦限，则 x、y、z 全为正号；只有当动点落在第四卦限时，才有 $x>0$、$y<0$、$z>0$ 而符合书本规定符号的情形出现。那么，为什么不取一卦限而偏要放在四卦限来讨论呢？这是不是意味着仅仅为了绘制倒立园锥图形，观察分析方便起见？具体点说，是不是为了画出倒立园锥，使其中心轴与坐标竖轴 z 相重合，把锥尖对准极点，使动点落在第四卦限，并使园锥按顺时针方向作负角旋转，得出右旋螺线，这样观察方便？而这实际是不是也就相当于作正立园锥、动点落第一卦限，使园锥按逆时针方向旋转，得出左旋螺线，两种结果完全一样的关系？

然而，如果确是出于如上那种考虑的话，那就是完全不必要的了！根本理由是：无论使动点落在八个卦限中任何一个卦限，无论取八组坐标中任何一组坐标，或者，当你轮番地对不同符号的八个组的坐标函数 x、y、z 取导数再平方后相加时，结果显然全都一样，都是得到同样正的代数和，试问这个事实说明了什么？是偶然的吗？不！这首先应该从坐标函数所表达的螺线本性来考虑，因为，在螺线轨迹上任意一点对于其中心轴的水平距离，就是它的射影螺线的可变矢径 r，考虑到 r 恒为正，故可知作为 r 的函数的螺线弧长，也类似于园弧长或椭园曲线弧长，应恒取正值（按：其显著的理由是 r 恒为正，且 π 值恒为正，故园弧周长 $C=2\pi r$ 也恒为正值）；为此，作为表达这个螺线轨迹的坐标函数，当然也类似于园函数或椭园函数，应该恒取正值了！反过来说，如果对于不同符号的八组坐标函数，并不能全都同样地用来直接反映螺线弧长恒为正值这个基本性质的话，如果仅仅由于选取其中某一个组而该组正负号可能不适合，从而就会引起螺线弧正负性质的不可捉摸的根本变化的话，那么，你倘若再要采用这八组坐标函数中任何一组，例如指定第一或第四组来反映所论螺线弧时，也就将成为根本不可能的事情了！（按：若考虑空间极径 ρ，它同平面射影极径 r 的性质是一样的，即 ρ 也恒为正，可讨论的情况基本一致的）。

由此可以最后反证：既然事实上对八组坐标任取其一结果都一样，那还有什么必要多此一举，非限取四卦限而在纵标 y 值上贯以负号不可呢？若只作为一种论证的过程，那就应该穷举八组坐标符号一一论证，最后结论指出"任取一组都一样"才行。

我认为这不是什么反正不会引起实质性变化的一个小小符号问题，一个可注意也可不注意的细节问题，须要考虑到这是容易启人疑窦、引起逻辑混乱，甚至百思不得一解（我对此是深有体验的），妨碍数学思维从低级向高级发展的一个不恰当的思维法则问题或认识问题，它的逻辑错误就在于"只看见树木，不看见森林"，用局部代替全体（即用一组抽样代替八组综合），以低级取代高级，只看到矛盾的特殊性，没看到矛盾的同一性，为此，大有必要从根本上作出辨别，扬弃这个不恰当的任取某一卦限的定号法则，而需要的是代之以综合性的按结果定号的法则，和园函数及椭园函数一样，取正不取负才对！