

148
宁波市业余广播函授

数 学

(第二册)



宁波市教育局编

说 明

为了满足城乡知识青年迫切学习文化知识的需要，我们将陆续编印业余广播函授数学教材。本册教材的内容是关于平面几何的复习，着重介绍怎样证明几何问题。书中所用的证题术是以平面几何知识为主的方法，应用三角知识解几何题，将在平面三角中单独编为一节。

参加编写教材的有宁波市十六中、二中、九中和宁波动力机厂七·二一工大、宁波拖拉机厂七·二一工大等校有关教师。他们利用业余时间，辛勤工作、认真编写，在此表示衷心感谢。由于，我们政治业务水平低，时间匆促，故存在许多缺点和错误，希读者批评指正。

编 者

一九七八年五月

目 录

一 平面图形

1.1 直线、射线和线段	(1)
1.2 角	(2)
1.3 多边形	(5)
1.4 三角形	(7)
1.5 平行四边形	(9)
1.6 其它几种典型的四边形	(10)
1.7 正多边形	(11)
1.8 圆弧图形	(12)

二 平面图形之间的相互关系

2.1 直线与直线的关系	(15)
2.2 三角形与三角形的关系	(16)
2.3 直线与圆的关系	(19)
2.4 圆和圆的关系	(22)
2.5 平面图形之间的对称关系	(24)

三 关于平面图形的的主要定理

3.1 定义、公理、定理	(25)
3.2 四种命题和它们之间的关系	(27)
3.3 关于比例线段及有关定理	(31)
3.4 关于直线相互位置关系的定理	(33)
3.5 关于三角形的定理	(34)
3.6 关于多边形的定理	(40)
3.7 关于多边形的面积的定理	(41)
3.8 关于圆和正多边形的定理	(43)

四 点的轨迹

(47)

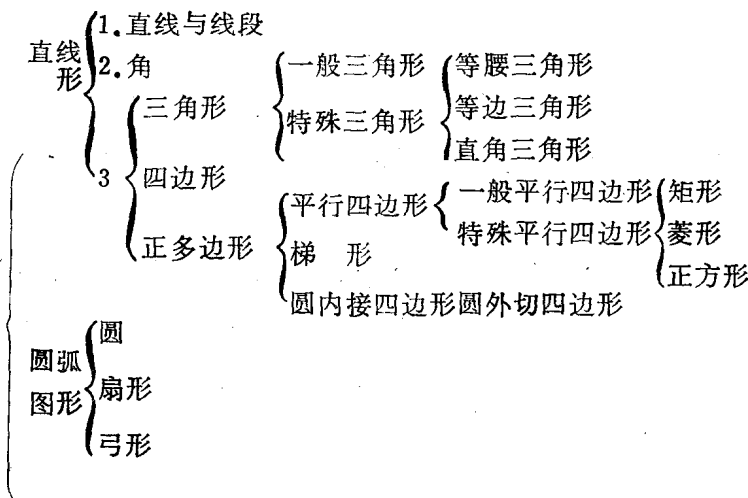
五 证题通法和析题举例

5.1 证题通法	(53)
5.2 综合法和分析法	(59)
5.3 关于证相等	(63)
5.4 关于和差倍分和代数证法	(76)
5.5 关于证不等	(85)
5.6 关于证位置	(89)
5.7 关于作图	(105)

平面几何

一 平面图形的

在初中平面几何中主要平面图形可归纳如下：



1.1 直线、射线和线段

直线：几何中所说的直线，都是向两方无限伸长着的，它没有端点。

直线用表示它上面任何两点的两个大写字母来表示，如

“直线A B”（图1）；也可以用一个小写字母来表示，如“直线l”（图2）。



图1



图2

射线：在直线上某一点一旁的部分叫做射线。射线是向一方无限伸长着的，它有一个端点。

射线用表示它的端点和射线上另外任何一个点的大写字母来表示，表示端点的字母写在前面，如“射线O C”（图3）。



图3

线段：直线上任意两点间的部分叫做线段。线段有两个端点。

线段用表示它的两个端点的大写字母来表示，如“线段A B”（图4），也可以用一个小写字母来表示，如“线段a”（图5）。



图4

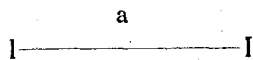


图5

连结两点的线段的长，叫做这两点间的距离。

1.2 角

从一点引出的两条射线所组成的图形叫做角，这两条射线

的公共端点叫做角的顶点，这两条射线叫做角的边（图6）。

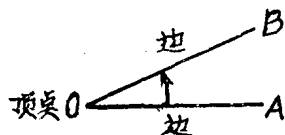


图6

我们也可以把角看成是由下列方法形成的。把一条射线 OA ，绕着它的端点 O ，从原来的位置 OA 旋转到另一个位置 OB ，这时 OA 和 OB 就形成了一个角。

把一条射线，绕着它的端点顺着—个方向继续旋转，当这条射线转到和原来的位置成一条直线时（图7），所成的角叫做平角，再旋转下去，转到和原来的位置重合时（图8），所成的角叫做周角。

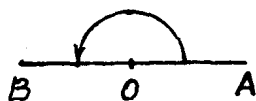


图7



图8

角的表示法，如图9中的角记作 $\angle ABC$ 或者 $\angle CBA$ ，如果以一点为顶点的角只有一个时，这个角也可以用表示顶点的那个字母来表示，如 $\angle B$ （图9）。有时还可以在角的里面

靠近顶点写一个数字或者一个小写希腊字母来表示角，如 $\angle 1$ ， $\angle 2$ ， $\angle \alpha$ ， $\angle \beta$ 等（图10）。

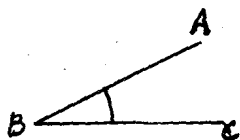


图9

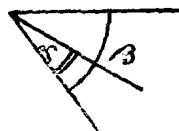
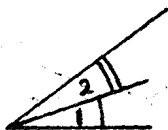


图10

直角，锐角和钝角：

平角的一半叫做直角。

小于直角的角叫做锐角；大于直角而小于平角的角叫做钝角。

角的度量：量角的大小，用“度”做单位。把一个周角分成360等份，每一份叫做一度的角。

$$1 \text{ 周角} = 360^\circ,$$

$$1 \text{ 平角} = 180^\circ,$$

$$1 \text{ 直角} = 90^\circ.$$

如果两个角的和等于 90° ，那么这两个角叫做互为余角。（如图11的 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ ）。如果两个角的和等于 180° ，那么这两个角叫做互为补角（如图12的 $\angle \alpha$ 和 $\angle \beta$ ）。



图11



图12

二等分一个角的射线，叫做这个角的平分线（图13中的射线OC）。

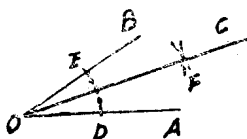


图13

1.3 多 边 形

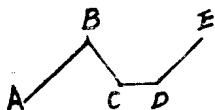


图14

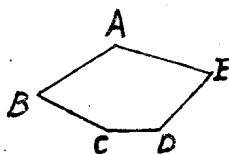


图15

由不在同一条直线上的几条线段顺次首尾相接组成的线叫做折线。图14，图15都是折线。

如果一条折线的两个端点重合，这条折线叫做封闭折线。封闭折线又叫做多边形。如，图15为封闭折线，即多边形。

组成一个多边形的各条线段叫做多边形的边。多边形各边长度的和叫做多边形的周长。

把多边形的每一条边向两方延长，如果多边形的其它各边都在延长所得直线的同旁，这样的多边形就叫做凸多边形。

例如，图16的多边形为凸多边形，图17的多边形不是凸多边形。

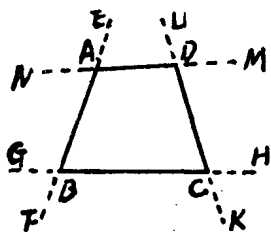


图16

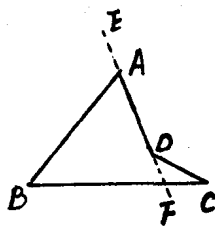


图17

多边形的相邻两边所组成的角叫做多边形的内角、简称多边形的角。多边形角的一边与另一边的反向延长线所组成的角叫做多边形的外角。例如，图16中 $\angle DAB$ ， $\angle ABC$ ， $\angle BCD$ ， $\angle CDA$ 是多边形的内角， $\angle ABG$ ， $\angle BCK$ 等是多边形的外角。

多边形的角的顶点，叫做多边形的顶点。

连结多边形的不相邻的两个顶点的线段叫做多边形的对角线。如图18中的 AC ， BD ， CE ， EB ， DA 。

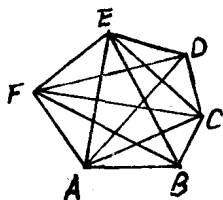


图18

一个多边形至少要有三条边，只有三条边的多边形叫做三角形。三边以上的多边形，按照边数，分别叫做四边形、五边形等等。

1.4 三 角 形

三角形用符号“ $\triangle$ ”来表示，如图19的三角形ABC记做 $\triangle ABC$ 。

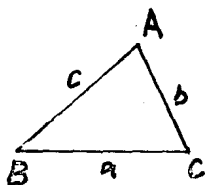


图19

一个三角形有三条边和三个角，三角形的边和角都叫做三角形的元素。为了便于说明，通常用小写字母 a , b , c 来分别表示 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的对边的长（如图19）。

三角形一个角的平分线和对边相交，角的顶点和交点间的线段叫做三角形的角平分线。如图20中AD平分 $\angle BAC$ ，AD就是 $\triangle ABC$ 的一条角平分线。

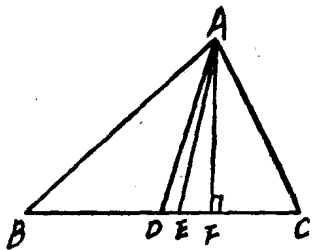


图20

连结三角形一个顶点和它的对边的中点的线段叫做三角形的中线。如图20中的BC的中点是E，AE就是 $\triangle ABC$ 的一条中线。

从三角形一个顶点到它的对边或者对边的延长线引垂线，顶点到垂线足间的线段叫三角形的高。三角形的高可能在三角形内，如图20的AF；可能在三角形外，如图21中的AF；也可能和三角形的一边重合，如图22中的AC。

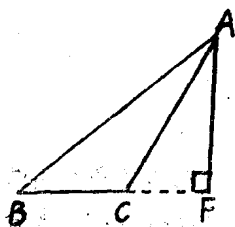


图21

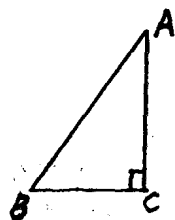


图22

三角形可以按照边的长短关系分为：三边两两不相等的不等边三角形（图23甲）；三边中有两边相等的等腰三角形（图23乙）；三边都相等的等边三角形（图23丙）。



甲



乙



丙

在等腰三角形中，相等的两边各叫做腰，其它一边叫做底边，两腰夹角叫做顶角，腰和底边的夹角叫做底角。

三角形也可以按照角的大小关系分为：三个角都是锐角的锐角三角形（图24甲）；三个角中有一个是直角的直角三角形（图24乙）；三个角中有一个是钝角的钝角三角形（图24丙）。

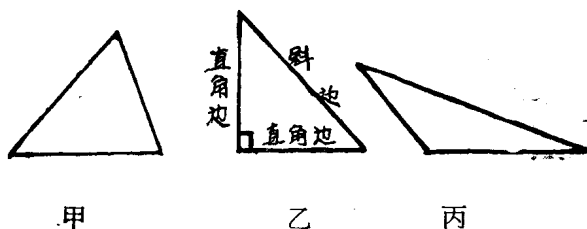


图24

在直角三角形中，夹直角的两条边叫做直角边，直角的对边叫做斜边。

两条直角边相等的直角三角形叫做等腰直角三角形。

1.5 平行四边形

两组对边分别平行的四边形，叫做平行四边形（图25）。

平行四边形用符号“ $\square$ ”来表示，例如，平行四边形ABCD记作 $\square ABCD$ 。

几种特殊的平行四边形：

(1) 矩形：有一个角是直角的平行四边形，叫做矩形。（图26）。

(2) 菱形：一组邻边相等的平行四边形，叫做菱形（图27）。

(3) 正方形：有一个角是直角，并且有一组邻边相等的平行四边形叫做正方形（图28）。

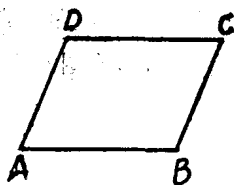


图25



图26

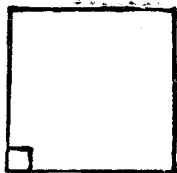


图27

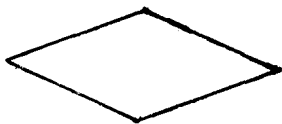


图28

1.6 其它几种典型的四边形

一组对边平行而另一组对边不平行的四边形叫做梯形（图29）。

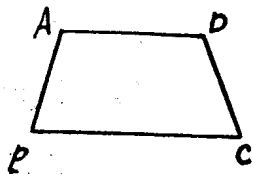


图29

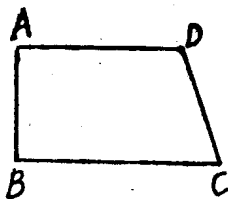


图30

平行的两边 (AD 和 BC) 叫做梯形的底, 不平行的两边 (AB 和 CD) 叫做梯形的腰。

有一腰垂直于底的梯形叫做直角梯形 (图30), 两腰相等的梯形叫做等腰梯形 (图31)。

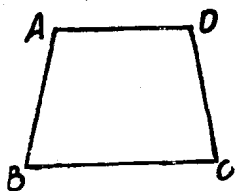


图31

四个顶点都在一个圆上的四边形叫做圆内接四边形 (图32)。

四条边都切于同一个圆的四边形叫做圆外切四边形 (图33)。

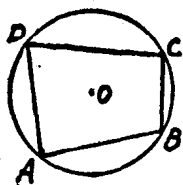


图32

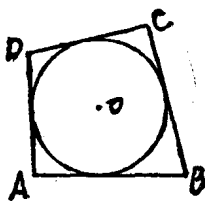


图33

1.7 正多边形

各边都相等, 各角也都相等的多边形叫做正多边形。通常应用较多的有正三角形, 正方形, 正五边形、正六边形、正八边形, 正十边形等 (图34)。

正多边形和圆有密切联系。把圆周分成 n 等分, 顺次连结各分点, 可以证明, 所得到的多边形是一个正多边形 (图35)。这时, 正多边形的各顶点都在圆上, 这个圆叫做正多边形的外接圆。这个正多边形叫做圆的内接正多边形。正多边形的外接

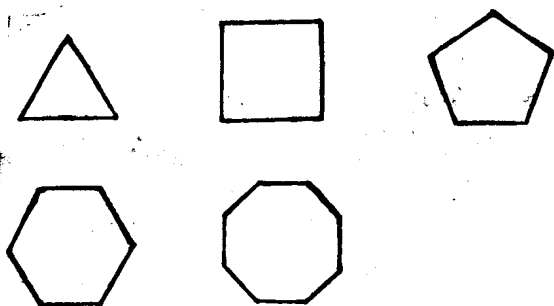
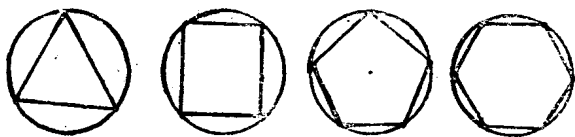


图34

圆的圆心叫做正多边形的中心，外接圆的半径也叫做正多边形的半径，而圆心到正多边形每一边的距离叫做正多边形的边心距。（图35中的 OD ）。正多边形的每一边所对的外接圆的圆心角叫做正多边形的中心角。



正三角形

正方形

正五边形

正六边形图

图35

1.8 圆 弧 图 形

(1) 圆：将线段的一个端点固定，另一个端点绕着它在平面上旋转一周所形成的图形叫做圆（图33）。固定的一个端点就叫做这个圆的圆心。圆用符号“ $\odot$ ”来表示。以 O 为圆心的

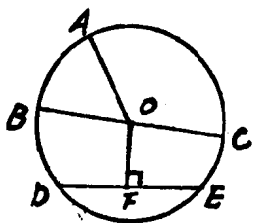


图36

圆心记作“ $\odot O$ ”读作“圆O”。连接圆心和圆上任意一点的线段（图36的OA）叫做圆的半径。圆的基本性质：同圆的半径相等。

连接圆上任意两点的线段（图36中的DE）叫做圆的弦。通过圆心的弦（图33中的BC）叫做直径。在同一个圆中，直径等于半径的两倍。圆心到弦的距离叫做弦心距（图36中的OF）。

圆上任意两点间的部分叫做弧。这两点叫做弧的端点。弧用符号“ $\frown$ ”来表示。以A和B为端点的弧记作“ $\widehat{AB}$ ”，读作“弧AB”。连接弧的两端的线段叫做弧所对的弦，这条弧就叫做弦所对的弧。如图36中，DE是 $\widehat{DE}$ 所对的弦， $\widehat{DE}$ 是弦DE所对的弧。圆的任意一条直径的两个端点把圆分成两条相等的弧，每一条这样的弧叫做半圆。

顶点在圆心的角叫做圆心角（图37的 $\angle AOB$ ）。为圆心角两边所截得的，并在圆心角内的一段弧叫做圆心角所对的弧，如图34中， $\widehat{AB}$ 就是圆心角 $\angle AOB$ 所对的弧。

顶点在圆周上，并且两边都和圆相交的角叫做圆周角（图38中的 $\angle ACB$ ）。为圆周角两边所截得的，并在圆周角内的一段弧叫圆周角所对的弧。如图38， $\widehat{AB}$ 就是圆周角 $\angle ACB$ 所对弧。

顶点在圆上，并且一边和圆相交，一边和圆相切的角叫做弦切角（图39的 $\angle ABC$ ， $\angle ABD$ ）。为弦切角的弦所截得的，