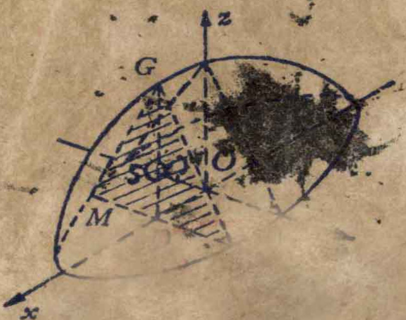
等数学习题集题解

下册



江西师范学院数学系应用数学教研组

第二编　概率论

第三编 概率论

希腊字母

字母		读音	字母		读音
Α	α	Alpha	Ν	ν	Nu
Β	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	Ο	ο	Omicron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
Ε	ε	Epsilon	Ρ	ρ	Rho
Ζ	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
Η	η	Eta	Τ	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Υ	υ	Upsilon
Ι	ι	Iota	Φ	φ	Phi
Κ	κ	Kappa	Χ	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
Μ	μ	Mu	Ω	ω	Omega

第十六章　定积分

定积分概念

16.1. 用积分和式表示抛物线 $y=\frac{x^2}{2}$,直线 $x=3$, $x=6$ 和横轴所围成的曲边梯形的面积的近似值，并取和式的极限求其准确值.

解　将[3,6]n 等分，则 $\Delta x_i=\frac{3}{n}$, 取 $\xi_i=3+i\frac{3}{n}$, $f(\xi_i)=$

$$=\frac{1}{2}\left(3+i\frac{3}{n}\right)^2,$$ 因此面积

$$S\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(3+i\frac{3}{n}\right)^2\cdot\frac{3}{n}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{9}{2}+i\frac{9}{n}+i^2\frac{9}{2n^2}\right)\frac{3}{n}=$$

$$=\frac{27}{2}+\frac{27}{n^2}(1+2+\cdots+n)+\frac{27}{2n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2)=$$

$$=\frac{27}{2}+\frac{27}{n^2}\ \frac{n(n+1)}{2}+\frac{27}{2n^3}\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\therefore\quad S=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{27}{2}+\frac{27}{n^2}\ \frac{n(n+1)}{2}+\frac{27}{2n^3}\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]=$$

$$=\frac{27}{2}+\frac{27}{2}+\frac{27}{6}=31\frac{1}{2}.$$

16.2. 应用定积分定义计算抛物线 $y=x^2+1$,直线 $x=a$, $x=b$, ($b>a$)及横轴所围成的面积.

解　将[a,b]n 等分，则 $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$, 取 $\xi_i=a+i\frac{b-a}{n}$,

$$f(\xi_i)=\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)^2+1,$$ 因此面积

$$S\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)^2+1\right]\frac{b-a}{n}=$$

$$=na^2\frac{b-a}{n}+\frac{2a(b-a)^2}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)+$$

$$+\frac{(b-a)^3}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2)+n\cdot\frac{b-a}{n}=$$

$$=a^2(b-a)+\frac{2a(b-a)^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+$$

$$+\frac{(b-a)^3}{n^3}\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(b-a)$$

$$\therefore\quad S=\lim_{n\to\infty}\left[a^2(b-a)+\frac{2a(b-a)^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(b-a)^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(b-a)\right]=$$

$$=a^2(b-a)+\frac{2a(b-a)^2}{2}+\frac{(b-a)^3}{3}+(b-a)=$$

$$=\frac{1}{3}(b^3-a^3)+b-a.$$

16.3. 自由落体的速度 v 等于 gt，试应用积分定义求前 5 秒钟内所落下的距离.

解　将 $[0,5]$ n 等分，则 $\Delta t_i=\frac{5}{n}$，取 $\xi_i=i\frac{5}{n}$，$v(\xi_i)=g\left(i\frac{5}{n}\right)$，

因此落下的距离

$$S\approx\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i=\sum_{i=1}^{n}g\left(i\frac{5}{n}\right)\frac{5}{n}=\frac{25}{n^2}g(1+2+\cdots+n)=$$

$$=\frac{25}{n^2}g\frac{n(n+1)}{2}.\quad\therefore\quad S=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{25}{2}g\frac{n(n+1)}{n^2}\right]=\frac{25}{2}g.$$

16.4. 把质量为 m 的物体从地球表面升高到高度为 h 的位置，需作功多少？用定积分表示之. 〔地球吸引物体的力按以下的规律来确定：$f=mg\frac{R^2}{r^2}$，其中 m 表物体的质量，R 表地球

的半径，r 表地球中心至物体的距离〕.

解　将$[R,R+h]$分成 n 等分，则$\Delta r_i=\frac{h}{n}$. 取 $r_i=R+i\frac{h}{n}$.

$f(r_i)=mg\cdot\frac{R^2}{\left(R+i\frac{h}{n}\right)^2}$，因此，所需功

$$W\approx\sum_{i=1}^{n}f(r_i)\Delta r_i=\sum_{n=1}^{\infty}mg\cdot\frac{R^2}{\left(R+i\frac{h}{n}\right)^2}\cdot\frac{h}{n}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}mg\frac{R^2}{r_i^2}\Delta r_i$$

$$\therefore\quad W=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n}mg\frac{R^2}{r_i^2}\Delta r_i=\int_{R}^{R+h}mg\frac{R^2}{r^2}dr.$$

16.5. 放射性物体的分解速度 v 是时间 t 的函数 $v=v(t)$. 试表示放射性物体由时间 T_0 到 T_1 所分解的质量 m：

(a) 用积分和式表示其近似值；

(b) 用积分表示其准确值.

解　(a) 将区间$[T_0,T]$分成 n 个小区间：$[T,t_1]$，$[t_1,t_2]$，…$[t_{i-1}t_i]$，…$[t_n,T_1]$，用 Δt_i 表示第 i 个小区间$[t_{i-1},t_i]$的长度$(i=1,2,\cdots,n)$. 并在其上任取一点 ξ_i. 则所求质量 m 的近似值为：$m\approx\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i$.

(b) 当小区间的最大长度$\|\Delta t\|\to 0$ 时. 得到所求质量的准确值为：$m=\lim_{\|\Delta t\|\to\infty}\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i=\int_{T_0}^{T_1}v(t)dt.$

16.6. 直接应用定积分定义计算下列积分：

(a) $\int_a^b xdx\quad(a<0)$;　　(b)* $\int_0^1 e^x dx$;

(c)* $\int_1^2\frac{dx}{x}$. 〔提示：(b) 将积分区间分成 n 等分. (c)使

分点的坐标成几何级数1, m, m^2, …, m^n, 其中 $m=2^{\frac{1}{n}}$.]

解 (a) 将区间 $[a,b]$ 分成 n 等分，则 $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$,

取 $\xi_i=a+i\frac{b-a}{n}$，得

$$\int_a^b xdx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[na\cdot\frac{b-a}{n}+\frac{(b-a)^2}{n^2}(1+2+\cdots+n)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]=$$

$$=ab-a^2+\frac{(b-a)^2}{2}=\frac{1}{2}(b^2-a^2).$$

(b) 将区间 $[0,1]$ 分成 n 等分，则 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$，取 $\xi_i=i\frac{1}{n}$，得

$$\int_0^1 e^x dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}e^{\xi_i}\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ \frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{e^{\frac{1}{n}}-1}=$$

$$=(e-1)\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}\ \overline{\overline{\underset{n\to\infty,\quad y\to 0}{y=e^{\frac{1}{n}}-1}}}(e-1)\lim_{n\to\infty}\left[\ln(y+1)\right]\frac{y+1}{y}=$$

$$=(e-1)\lim_{n\to\infty}\left[\ln(y+1)+\frac{\ln(y+1)}{y}\right]=(e-1)\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(y+1)}{y}=$$

$$=e-1.$$

(c) 用一几何级数的点到 $x_0=1, x_1=m, x_2=m^2, \cdots x_i=m^i$, ……, $x_n=m^n=2$. 将区间 $[1,2]$ 分成 n 个小区间，其区间长度为 $\Delta x_i=m^i-m^{i-1}=m^{i-1}(m-1)$.

由 $m^n=2$, 得 $m=2^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{2}>1$. 又 $m>1$.

∴ 最后一个小区间的长度最大，而

$$x_n - x_{n-1} = m^{n-1}(m-1) = m^n \cdot \frac{m-1}{m} = 2 \cdot \frac{m-1}{m} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2}} \qquad \because \text{ 当 } n\to\infty \text{ 时，} \sqrt[n]{2}\to 1.$$

$\therefore$ 最大小区间的长度趋于 0．取 $\xi_i = \frac{1}{m^i} = \frac{1}{2^{\frac{i}{n}}}$

$$\therefore \int_1^2 \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m^i}\cdot m^i\left(1-\frac{1}{m}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{m}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{1}{m}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}\right) = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2}-1)\cdot\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2}-1)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}} = \ln 2.$$ （利用 11.107*，并令 $a=2$）.

定积分的性质

16.7．说明（不计算它们的值）下列积分哪一个较大：

(a) $\int_0^1 x^2 dx$ 还是 $\int_0^1 x^3 dx$？ (b) $\int_1^2 x^2 dx$ 还是 $\int_1^2 x^3 dx$？

(c) $\int_1^2 \ln x\, dx$ 还是 $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$？

(d) $\int_3^4 \ln x\, dx$ 还是 $\int_3^4 (\ln x)^2 dx$？

解 (a) $\because$ 在[0,1]上，$x^2 \geqslant x^3$， $\therefore$ $\int_0^1 x^2 dx \geqslant \int_0^1 x^3 dx$；

(b) $\therefore$ 在[1,2]上，$x^3 \geqslant x^2$， $\therefore$ $\int_1^2 x^3 dx \geqslant \int_1^2 x^2 dx$；

(c) $\because$ 在[1,2]上，$\ln x \geqslant (\ln x)^2$，

$\therefore$ $\int_1^2 \ln x dx \geqslant \int_1^2 (\ln x)^2 dx$；

(d) $\because$ 在[3,4]上，$(\ln x)^2 \geqslant \ln x$，

$$\therefore\ \int_3^4 (\ln x)^2 dx > \int_3^4 \ln x dx.$$

16.8. 估计下列各积分的值：

(a) $\int_1^4 (x^2+1)dx$;　　(b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1+\sin^2 x)dx$;

(c) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx$;　　(d) $\int_0^2 e^{x^2-x}dx$.

解 (a) $\because$ 在[1, 4]上，被积函数 $f(x)=x^2+1$ 严格单调增加，$\therefore$ 最小值 $m=f(1)=2$，最大值 $M=f(4)==17$，于是得到

$$2(4-1)\leqslant\int_1^4 (x^2+1)dx\leqslant 17(4-1),$$

$$\therefore\ 6\leqslant\int_1^4 (x^2+1)dx\leqslant 51$$

(b) $\because$ 在$\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\right]$上，$0\leqslant\sin^2 x\leqslant 1$，$1\leqslant 1+\sin^2 x\leqslant 2$.

$$\therefore\ \pi\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1+\sin^2 x)dx\leqslant 2\pi.$$

(c) $\because$ 在$\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sqrt{3}\right]$上，$f'(x)=\mathrm{arctg}x+\frac{x}{1+x^2}>0$,

$\therefore$ 被积函数 $f(x)=x\mathrm{arctg}x$ 严格单调增加，因此最小值 $m=f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$,

最大值 $M=f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$.

即 $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\leqslant x\,\mathrm{arc\,tg}\,x\leqslant\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$,

$$\therefore\ \frac{\pi}{9}\leqslant\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}x dx\leqslant\frac{2\pi}{3}.$$

(d) 设 $f(x)=e^{x^2-x}$, $f'(x)=e^{x^2-x}(2x-1)$, 令 $f'(x)=0$,

得 $x=\frac{1}{2}$, $\therefore\ f\left(\frac{1}{2}\right)=e^{-\frac{1}{4}}$, 而 $f(0)=1$, $f(2)=e^2$,

因此, $e^{-\frac{1}{4}}\leqslant e^{x^2-x}\leqslant e^2$, $\therefore\ 2e^{-\frac{1}{4}}\leqslant\int_0^2 e^{x^2-x}dx\leqslant 2e^2$.

16.9. 试计算函数 $y=2x^2+3x+3$ 在区间 [1,4] 上的平均值.

解 平均值 $\overline{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{3}\int_1^4(2x^2+3x+3)dx$,

将区间[1,4]分成 n 等分, 则 $\Delta x_i=\frac{3}{n}$. 取 $\xi_i=1+i\frac{3}{n}$.

得 $\int_1^4(2x^2+3x+3)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(2\xi_i^2+3\xi_i+3)\cdot\Delta x_i=$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[2\left(1+i\cdot\frac{3}{n}\right)^2+3\left(1+i\cdot\frac{3}{n}\right)+3\right]\cdot\frac{3}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{18}{n^2}i^2+\frac{21}{n}i+8\right)\cdot\frac{3}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{54n(n+1)(2n+1)}{6n^3}+\frac{63n(n+1)}{2n^2}+24\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[9\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+\frac{63}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+24\right]=$$

$$=18+\frac{63}{2}+24=\frac{147}{2},$$

$\therefore$ 平均值 $\overline{y}=\frac{1}{3}\cdot\int_1^4(2x^2+3x+3)dx=\frac{1}{3}\ \frac{147}{2}=24.5$,

16.10. 试计算函数 $y=\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$ 在区间[1,8]上的平均值,

解 平均值 $\overline{y}=\frac{1}{7}\int_1^8\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$,

仿照 16.6(c), 用一几何级数点列 $x_0=1, x_1=m, x_2=m^2$, ……, $x_i=m^i$, … $x_n=m^n=8$, 将区间[1,8]分成 n 个小区间,

因此 $m=\sqrt[n]{8}$，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=2^{\frac{3i}{n}}-2^{\frac{3(i-1)}{n}}$.

取 $\xi_i=2^{\frac{3i}{n}}$. 则 $\int_1^8\frac{2dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2}{\sqrt[3]{\xi_i^{\ 2}}}\Delta x_i=$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}2\left(2^{-\frac{2i}{n}}\right)\left(2^{\frac{3i}{n}}-2^{\frac{3(i-1)}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}2\left(2^{\frac{i}{n}}-2^{\frac{i-3}{n}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\left(-2^{-\frac{2}{n}}-2^{-\frac{1}{n}}-1+2^{\frac{n-2}{n}}+2^{\frac{n-1}{n}}+2\right)=$$

$$=2(-1-1-1+2+2+2)=6.$$

$\therefore$ 平均值 $\overline{y}=\frac{1}{7}\int_1^8\frac{2dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{7}\cdot 6=\frac{6}{7}$.

上限（或下限）为变量的定积分

16.11. 试求函数 $y=\int_0^x\sin x\,dx$，当 $x=0$，$x=\frac{\pi}{4}$ 及 $x=\frac{\pi}{2}$ 时的导数.

解 $\because$ $y'=\left(\int_0^x\sin x dx\right)'=\sin x$,

$\therefore$ $y'\Big|_{x=0}=\sin 0=0$; $y'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

16.12. 试求函数 $y=\int_0^{z^2}\frac{dx}{(1+x^3)}$ 对 z 的二阶导数当 $z=1$ 时的值.

解 $y'=\left(\int_0^{z^2}\frac{dx}{(1+x^3)}\right)'=\frac{2z}{1+z^6}$;

$$y''=\left(\frac{2z}{1+z^6}\right)'=\frac{2(1+z^6)-12z^6}{(1+z^6)^2}=\frac{2-10z^6}{(1+z^6)^2}$$

$\therefore\quad y''\Big|_{x=1}=\dfrac{2-10}{4}=2.$

16.13. 下限为变量上限为常量的定积分，对其下限的导函数为何？求函数 $y=\int_x^5\sqrt{1+x^2}dx$ 对 x 的导数.

解 $\because\quad \int_x^a f(t)dt=-\int_a^x f(t)dt,$

$$\therefore\quad \frac{d}{dx}\left(\int_x^a f(t)dt\right)=\frac{d}{dx}\left(-\int_a^x f(t)dt\right)=$$

$$=-\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right)=-f(x),$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\int_x^5\sqrt{1+x^2}dx\right)=-\sqrt{1+x^2}.$$

16.14. 求由参数表示式 $x=\int_0^t \sin t\,dt, y=\int_0^t \cos t\,dt$ 所给定的函数 y 对 x 的导函数.

解 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(\int_0^t \sin t\,dt\right)=\sin t;\quad \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(\int_0^t \cos t\,dt\right)=\cos t,$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\cos t}{\sin t}=ctgt.$$

16.15. 试求由 $\int_0^y e^t dt+\int_0^x \cos t\,dt=0$ 所决定的隐函数对于 x 的导数 y'.

解 等式两边对 x 求导得：$e^y y'+\cos x=0$

$\therefore\quad y'=-\dfrac{\cos x}{e^y}$, 又 $\because\quad \int_0^y e^t dt=-\int_0^x \cos t dt$

$\therefore\quad e^t\Big|_0^y=-\sin t\Big|_0^x,\qquad$ 得 $\quad e^y-1=-\sin x,$

因此，$e^y=1-\sin x,\qquad \therefore\quad y'=\dfrac{-\cos x}{1-\sin x}.$

16.16. 当 x 为何值时函数 $I(x)=\int_0^x xe^{-x^2}dx$ 有极值？

解　$I'(x)=xe^{-x^2}$，令　$I'(x)=0$，即　$xe^{-x^2}=0$，得 $x=0$.

又∵　$I''(x)=e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}=e^{-x^2}(1-2x^2)$，

∴　$I''(0)=1>0$.

∴　当 $x=0$ 时，函数 $I(x)$ 有极小值.

16.17. 物体运动的速度与时间的平方成正比. 设从时间 $t=0$ 开始 3 秒钟后，物体经过 18 厘米. 试求距离 s 和时间 t 的函数关系.

解　依题意，$v=kt^2$.（k为待定的常数），即　$\frac{ds}{dt}kt^2$，

∴　$S=\int_0^t vdt=\int_0^t kt^2dt=\frac{1}{3}kt^3$，

又∵　当 $t=3$ 时. $S=18$.　∴　$18=\frac{1}{3}\cdot k\cdot 3^3=9k$，

得　$k=2$.　∴　$S(t)=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot t^3=\frac{2}{3}t^3$.

16.18. 一质点作直线运动，已知其速度 $v=2t+4$（厘米/秒）. 试求在前 10 秒钟内质点所经过的路程.

解　∵　$\frac{dS}{dt}=v=2t+4$，

∴　$S=\int_0^{10}(2t+4)dt=(t^2+4t)\Big|_0^{10}=140$ 厘米.

16.19. 一曲边梯形是由抛物线 $y=x^2$，横轴和变动着的但始终平行于纵轴的直线所围成的. 试求曲边梯形面积的增量 Δs 及微分 ds 当 $x=10$ 且 $\Delta x=0.1$ 时的值. 并求用微分代替增量所发生的绝对误差与相对误差.

解　∵　面积 S 是上限 x 的函数，∴　$S(x)=\int_0^x x^2dx$.

$$\Delta S=\int_x^{x+\Delta x}x^2dx=\int_{10}^{10.1}x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_{10}^{10.1}=$$

$$=\frac{1}{3}(10.1^3-10^3)=10.100\dot{3}.$$

$$\frac{ds}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\int_0^x x^2dx\right)=x^2,$$

得 $ds=s'(x)\Delta x=x^2\Delta x=10^2\times 0.1=10.$

∴ 绝对误差 $|\Delta s-ds|=|10.100\dot{3}-10|=0.100\dot{3}.$

相对误差 $\frac{|\Delta s-ds|}{ds}=\frac{0.100\dot{3}}{10}=0.0100\dot{3}.$

计算定积分（应用牛顿-莱布尼兹公式）

在题16.20—16.38中，计算各定积分：

16.20. $\int_1^3 x^3dx=\frac{1}{4}x^4\Big|_1^3=\frac{1}{4}(3^4-1^4)=\frac{80}{4}=20.$

16.21. $\int_0^a(3x^2-x+1)dx=\left(x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right)\Big|_0^a=$

$=a^3-\frac{1}{2}a^2+a=a\left(a^2-\frac{1}{2}a+1\right).$

16.22. $\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^{-3}\right)\Big|_1^2=$

$=\frac{1}{3}\left(8-\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{3}(1-1)=2\frac{5}{8}.$

16.23. $\int_1^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2dx=\int_1^2\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)dx=$

$=\left(\frac{1}{3}x^2+2x-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\left(\frac{8}{3}+4-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-2+1\right)=$

$=4\frac{5}{6}.$

16.24. $\int_1^4\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|=\frac{2}{3}(8-1)=4\frac{2}{3}.$

16.25. $\int_4^9\sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx=\int_4^9(\sqrt{x}+x)dx=$

$=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_4^9=\frac{2}{3}(27-8)+\frac{1}{2}(81-16)=$

$$=45\frac{1}{6}.$$

16.26. $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=arc\operatorname{tg}x\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}.$

16.27. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=arc\sin x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3}.$

16.28. $\int_a^{a\sqrt{3}}\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arc\operatorname{tg}\frac{x}{a}\Big|_a^{a\sqrt{3}}=\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=$

$$=\frac{\pi}{12a}.$$

16.29. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=arc\sin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}.$

16.30. $\int_a^b(x-a)(x-b)dx=\int_a^b\left[x^2-(a+b)x+ab\right]dx=$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+b)x^2+abx\right)\Big|_a^b=$$

$$=\frac{1}{3}(b^3-a)-\frac{1}{2}(a+b)(b^2-a^2)+ab(b-a)=$$

$$=\frac{1}{6}(a-b)^3.$$

16.31. $\int_{-1}^0\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx=\int_{-1}^0\left(\frac{3x^2(x^2+1)}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

$$=3\int_{-1}^0x^2dx+\int_{-1}^0\frac{dx}{x^2+1}=x^3\Big|_{-1}^0+arc\operatorname{tg}x\Big|_{-1}^0=$$

$$=1+\frac{\pi}{4}.$$

16.32. $\int_0^a\left(\frac{bc}{2a^2}x^2-\frac{bc}{a}x+\frac{bc}{2}\right)dx=$

$$=\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{bc}{2a^2}x^3-\frac{1}{2}\,\frac{bc}{a}x^2+\frac{bc}{2}x\right)\Big|_0^a=$$

$$=\frac{abc}{6}-\frac{abc}{2}+\frac{abc}{2}=\frac{abc}{6}.$$

16.33. $\int_0^2 (4-2x)(4-x^2)dx=\int_0^2 (16-8x-4x^2+2x^3)dx=$

$=\left(16x-4x^2-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{2}x^4\right)\Big|_0^2=$

$=32-16-\frac{24}{3}+8=13\frac{1}{3}.$

16.34. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2\theta-1)d\theta=(\mathrm{tg}\theta-\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=$

$=1-\frac{\pi}{4}.$

16.35. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^3\theta\, d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}d\theta=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^3\theta}d\cos\theta=$

$=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}+\ln|\cos\theta|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{1}{2}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=$

$=\frac{1}{2}(1-\ln 2).$

16.36. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos^3\varphi d\cos\varphi=$

$=-\frac{1}{4}\cos^4\varphi\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}.$

16.37. $\int_0^{\pi} (1-\sin^3\theta)d\theta=\int_0^{\pi} d\theta-\int_0^{\pi} \sin^3 d\theta=$

$=\theta\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)d\cos\theta=$

$=\pi+\left(\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\Big|_0^{\pi}=\pi-2+\frac{2}{3}=\pi-\frac{4}{3}.$

16.38. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2u)du=$

$=\frac{1}{2}\left[u\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right]=$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

16.39. 设 k 为正整数，证明 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx=0$ 与 $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx=0$。

证 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,d(kx)=\frac{1}{k}(\sin kx)\Big|_{-\pi}^{\pi}=$

$=\frac{1}{k}(0-0)=0.$

同样可证：$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx=0$. （$k$ 为正整数）.

16.40. 设 k，l 为正整数，且 $k\neq l$，证明

(a) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lx\,dx=0$； (b) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lx\,dx=0$；

(c) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lx\,dx=0$.

证 (a) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lx\,dx=$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sin(k+l)x-\sin(k-l)x\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(k+l)x}{k+l}+\frac{\cos(k-l)x}{k-l}\right]_{-\pi}^{\pi}=0.\quad(k\neq l)$$

(b) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lx\,dx=$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(k+l)x+\cos(k-l)x\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(k+l)x}{k+l}+\frac{\sin(k-l)x}{k-l}\right]_{-\pi}^{\pi}=0.\quad(k\neq l).$$

(c) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lx\,dx=$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(k-l)x-\cos(k+l)x\right]dx=$$