

法習學數學

余介石

余介石
藏

數學學習法

編者 余介石 孫克定

中華書局印行

數學學習法

目 錄

第一章 緒論	1-9
(1) 算學的重要性和有用性	1
(2) 算學沒有假的	3
(3) 學習算學並非苦事 也非難事	4
(4) 所謂“天性不近算學”	6
(5) 初等算學的兩大類——代數和幾何	8
第二章 算術和代數的學習法	9-31
(6) 不要見了數字害怕	9
(7) 演算時首先要認清題目	11
(8) 注意題目的特殊條件	13
(9) 題目的引伸和變化	14
(10) 練習心算和記憶數字	16
(11) 關於單位的運算	19
(12) 六種基本運算法則	21
(13) 數的系統	22
(14) 代數是普遍化的算術	25

(15) 注意各種運算的特殊性 27

(16) 不要忽視了圖解法 30

第三章 幾何和三角的學習法 32—55

(17) 幾何定理是否需要記憶 32

(18) 幾何定理的歸類 33

(19) 幾何的證題通法 39

(20) 幾何定理與形式邏輯 42

(21) 三角的實用性 45

(22) 三角公式記憶圖 46

(23) 怎樣證明三角恆等式 50

(24) 對數的應用 53

第四章 結論 56—70

(25) 算學各部門的相互連繫 56

(26) 算學與藝術 58

(27) 算學遊戲 60

(28) 隨時隨地想出算學問題 63

(29) 學習算學的方法養成推理的習慣 65—68

數學學習法

第一章 緒 論

算學的重要 性和有用性

算學* 是研究數量與空間的科學，世界上一切東西都有數量可稽，都佔據一定的空間，所以算學是無所不在，無所不包的。地球和其他星球的運行軌道，金字塔及其後各種建築物的構造形式，蜂巢，花，葉，及自然界裏面形形色色的佈置，雪花及其他結晶體以及各種物質分子間，原子間，電子間的排列，這一切的空間圖形都是算學的研究對象，宇宙中各天體的體積，質量，溫度等條件，社會中人口的增減，經濟的盛衰，國家的預算，下及家庭或個人日用帳目，以及生物的遺傳，工程的設計製造的各種計量，這一切的数量關係也都是算學的研究對象，沒有了算學，我們非但不能推算日月蝕，建築橋梁，廣播無線電，我們甚至要沒有時日，不知遠近，忘却耕種和紡織，失去一切計劃，演算，估量，推論的能力，這就失去人之所以爲人的要件，所以就整個宇宙及自然而言，算學是普遍地客觀地存在着的，算學的法則存在於一切事物之中；就人類而言，算學

*按算學一名，原包括算術代數幾何等科，現在數部新定名詞，仍復改爲數學，本書出版在前，書中未及一一更正，請讀者注意。

是認識自然控制自然的最重要的手段之一，算學是科學中最基本的一種，理論的科學，如物理，化學，生物等，固然少不了算學，並且各種科學發達的程度，可以算學所佔成分的多少來作為標誌，而應用的科學，更以算學的計算及測定為樞軸。我們試看無論是電機工程，機械工程，化學工程，土木工程等等，那一種是能離得了算學的；醫學，農學等雖然應用算學的成分較為少些，但病情的診測，藥劑的配合，和種子肥料的選擇等等又豈能屏除算學的方法？甚至最抽象的藝術如音樂，在節奏，拍子以及作曲，和聲等也必須有算學的幫助。所以算學非但是“科學界的女王”同時也是人類征服自然，增進福利的利器。

算學既然是這樣地有用而又這樣重要，所以我們每個人都得學習它，應用它，並企圖進一步發展它。這我們就須在中學時代把基礎打好。對於企圖將來以算學研究及算學教育為事業的人，是不用說的了，他們負擔起發展算學，推廣算學的責任，但這一類人只要占全體中一小部份，讓在算學方面有特殊才能及興趣的人去做好了，其餘的大部份人，或者準備從事於自然科學及工程，或者企圖從事於文學，藝術，政治經濟或其他方面，算學雖然不是他們的

本行，但也得把算學學好。因為對於他們所認定的本行，算學或者是基本條件，或是雖非主要而又不可少的因素，他們就是算學的應用者，我們如果要充分發揮個人的能力，如果要多多對社會有貢獻，那末請不要忽視算學這一門最基本的知識罷！

算 學 沒
有 假 的

別的東西常常有假，算學却不能有假的。別的東西有時可以馬虎，算學却不能絲毫苟且。作文可以有修辭工整，言

之無物的文章，音樂可以有油腔滑調，社會科學可以有似是而非的理論，就在自然科學中也常有不怎樣可靠的假定，這些都可濫竽充數，暫時矇混過去。可是在算學的領域裏面，這是絕對不行的。算學是最有系統，最為嚴密，最屬完整的學問。在這裏面絕對沒有矛盾不符，絕對沒有漏洞。即使因為我們自己的錯誤帶進了矛盾，那也可立即發覺出來，真偽顯然，取舍立斷。算學就像一座大建築物，壁壘森嚴，每一部份都是必要的，算學又像有組織的軍隊，異己份子是不容參雜不進的。所以我們學習算學，這給予我們一種精神上的訓練。我們的思維及行動必須有系統，精密，嚴正而完整。無論什麼都得有根據，合邏輯。這種習慣是

最最重要最最有用的，而這些都可從學習算學得來。

算學又是最抽象的，最客觀的學問，我們只有用冷靜的理智去對付它。學習算學不是像學習語言文字那樣以記憶為主，也不像學習藝術、文學等那樣以感覺及情緒為主。算學是純粹的推理，全靠思考與悟性，感覺和記憶對於算學只有間接的幫助，情緒在算學裏面全用不着。我們學習算學，必須首尾貫注，一絲不苟，把全部了解才行。許多人見了算學害怕，或者總是學不好，主要就是沒有把握住算學的特性，因此用了錯誤的研究方法的緣故。

學習算學
並非苦事
也非難事

我們常聽到有人這樣說：“我見到算學就頭痛”或者說；“算學是最難的一門功課”果真算學是這樣可怕，這樣難學嗎？實際上並不是這樣。如果說學習算學很苦，很難，那末學習別的課程又何嘗不苦，何嘗不難？學英文要記生字和文法，國文要作文，史地要記人名，地名，年代等等，甚至於音樂，圖畫都得弄五線譜，練聲，學寫生；嚴格說來，任何一門學問或藝術，在學習過程中，總得經過一番刻苦的訓練，而各種課程的學習，也各有其特殊困難之點。不過這些困難都不是不可超越的絕對的困難，這些

只是相對的困難，是在發展過程中難以避免的困難。大家想都有這種經驗，經過了艱難困苦，到後來自然會感到無上的樂趣。在學習算學或其他課程的時候，每經過一層難關，就有一層進步，對於已經學過的東西就覺得容易得多。並且這種從苦難中所得的樂趣，足以把學習時的努力與辛苦抵償而有餘。譬如是把一個難題找出解答，或者是把一條較為深奧的定理了解清楚，那時就感到有說不出的愉快，又如我們打破從算術到代數的難關，回過頭來弄算術，就覺到較以前容易得多。所以苦樂是相生的，難易是相成的，而苦後之樂，難中之易，却要超過原來的苦與難，這無論是在讀書，做事，都是如此，不獨在學習算學才這樣。

總結起來說：學習算學，不是一件絕對困難的事，當然也不是絕對容易的事。算學正和我們所學的別的科目相仿，也並不比別的科目特別困難，只是各科各有各的特殊困難點就是了。再舉一個比喻，學習算學就像爬山一樣。我們向山上爬去，自然是很費力的，但越爬得高，越能看到前所未見的美景。我們自會覺得心曠神怡；先前的努力，就是這時的代價。但如果我們只是站着不動而空想向上飛騰，這當然絕對不可能的。勞而後獲這條規律，無論在那裏都

適用，無論在那裏都是不能違反的。

所謂“天性
不近算學”

又有人說，“我很知道算學並不是絕對地難學，因為別的人能夠學得很好，可是這在我却又是一回事，我的天性不近算學啊”！固然各人都有特長和所短，智力的發展在一切方面並不一致，這我們是承認的。可是某個人的天性對於某件事到底近不近却不是一下子就可決定的。一般說起來，對於算學有很好的天資的人固然很少，但反過來說，對於算學的學習能力極低的人也佔很少數。大多數的人，對於算學無所謂近不近，學得好就算近，學不好就不近，所以這主要是後天的問題，先天的問題只對於極少數一部份人才值得注意。許多自以為對算學天性不近的人，實際上十有七八是被自己欺騙了，他們有的是因為在開始就得到壞的印象，從此失去興趣，不努力去學；有的是因為學習的方法不適當，如學幾何只是拚命背定理，學代數只是化公式或硬記書上的方法，雖努力而難有效果；有的是因為在學習的過渡階段中沒有轉換得好，或跳過必要的階段。如從算術到代數，從代數到幾何的轉換過程中沒有弄清新的部門的特性及特殊方法；或者學三角而跳過幾何，這樣就難

於繼續學習下去。因為這些原因以及其他的原由就感得失望和灰心，但又不明瞭原因所在，或者知道了原因而又不能克服，於是只得一半自慰一半自嘲地說，“我的天性不近算學，”其實這種態度也就是自暴自棄的態度，即是天性真的不近，對於算學學習能力很低的人，對於算學也絕對不應該完全放棄。讓我們舉個譬喻，是否有人天性不近於說話，是否有人天性不近於寫文章，有的，有些口才拙，文思差的人就是。可是沒有口才的人雖不能成為演說家，欠缺文思的人雖不能成為文人，他們無論如何總得會日常會話，以及寫信寫便條。他們雖然天性不近，但必須努力學習起來，達到社會所需最低限度的水準以上。同樣對於天性不近算學的人也這樣。我們並不是要大家都成為算學家，正如並不要大家都成為演說家或文人一樣，這讓一部份特殊適宜的人去做好了。但我們每個人必需具備最低限度的算學知識及技能。隨便說幾樣，我們必須會計數，會加減乘除，會求比例及簡單方程式，會計算簡易的面積體積，會了解並應用簡易的表格及圖解，及其他等等。這是現代社會所要求於每個常人的（特別是每個受過教育的人）知識條件中一部份。不論他對於這些性情近不近，如果

他不去努力獲得，是會受到事實上的懲罰的。

初等算學的
兩大類——
代數和幾何

要替算學下一個精密而完善的定義，這是十分困難的。好在我們現在還不用管到這些，我們只要知道算學的大概意義就行。

簡單說來，算學是研究數量和空間圖形的科學。數量是代表實際東西的分量的，譬如三斗米，二尺半布，我們可用 3 斗，2.5 尺來表示各個的分量或者除掉單位化成不名數用 3, 2.5 來表示，或者拿更抽象的文字 a, b 來表示。圖形是代表實際東西的形狀的，譬如直的光線，圓的車輪，拱形的橋洞，我們可用直線，圓，擺線（曲線的一種）來表示。又如磚塊，皮球，雨傘等物的形狀，我們可用立方體，球體，圓錐形來表示。

這樣看來，算學所研究的有兩種東西，數量和圖形。因此初等算學在本質上可以分成兩類，研究數量的稱為代數，研究圖形的稱為幾何。代數包括着算術和代數，幾何包含着幾何與三角。通常的辦法，是把算術，代數，幾何，三角這四門並列，這是為了學習上與教課上的便利，但我們從算學的基礎看來，可以看出算學和代數是非常接近的，幾何與三角是非常接近的，這在下面我們就要詳細講到。

第二章 算術和代數的學習法

不要見了
數字害怕

不要見了數字害怕，這是我們對每個人的勸告。世界越進步，科學越發展，數字的應用也就越加普遍。野蠻人是很缺乏數的概念的，他們往往不會數三以上或十以上的數目。遊牧民族需要計數牲畜的個數，才開始有了較大的進步；以後到了農業社會，需要計量土地面積，收穫量，節候時等等，又到了商業社會，需要計算貿易額，價格，利息等等，一直到了現代的工業社會，數字的應用更為突飛猛進，除了包括上舉的各項外，更在機器生產，工程建築，科學研究這幾方面達到了精深嚴密的地步。不但如此，就是在日常生活方面，數字的需要也更多起來。過去不能以數量來表示的，現在也有辦法，譬如人的肥瘦，可用體重來表示，人的智慧，可用智力商數來表示。凡是能用數字來表示的，總是較為精密確實。現在的世界，是一個非常複雜的世界，如果我們不從數量與關係來把握，簡直是沒有辦法的。我們既然生為現代的人，即不能重返古代，歸真返璞，也不能閉關自守，與世無爭，因此對於現

代的一個要素——數量，是不能不加以理會的。對於數字覺得憎厭或害怕，不僅對於自己不利，而且是不應該的。

實在說來，我們在實際生活中間不能沒有數字，我們的年齡是數字，所住的地址的門牌號數是數字，經濟的收入和支出也是數字。這些數字是每個人都得知道，都得記住的，不管他喜歡不喜歡。更進一步，如果他是從事於商業的，他必須熟習貿易及會計上的數字；如果從事於法律，他必須熟習於法律條款的數字，即使從事於音樂，也必須熟習於音階拍子的數字。數字存在於各方面，一切領域，我們不能逃避它。

那麼為什麼有些人害怕數字呢？這主要因他們對這不習慣，並對這沒有興趣。他們對於數字抱着錯誤的觀念，認為數字是乾枯的，死板的，抽象的東西。他們不知道數字和文字一樣，可以是死的，呆的，但也可以是活的，有意義的。一篇文章裏面如果主要只有人“生於世”“今天天下”“由此觀之”等一類套語，自然這使誰見了都要頭痛；做算術習題如果只做 $3+5=8$ ， $\sqrt{16}=4$ 也使人久則生厭。可是我們如果提到“中國不識字的人佔全人口中 80%”，這個 80% 就不是空洞的數字而是極有意義，足以使

人警惕的一種概念，我們學習算學的目，不是玩弄抽象的數量，在數字裏面翻筋斗，而是使我們熟習於數量的關係及運算，能夠把這應用於實際方面。雖然我們在算學裏常遇着抽象的數字，但這些只是供演習之用，等我們演習得相當熟練，就應該把數字和實際的事物連繫起來，同時這也就是把算術與生活打成一片。這樣，我們不但不害怕數字，反而要喜愛數字，把數字放到應得的地位上去。

演算時首先要認清題目

我們遇着一個算術題目，在下手之前，首先要將題目的意義認清，得着透徹的了解，然後再開始去做。做的時候也要經常顧到題目，當心不要違犯題目所規定的條件。做好之後，要把求得的答數和題目對一對，如果答數應該有單位，千萬不要忘記把單位加上，這樣才成為完全的答案。又答案的數字，在求出來之後還得加以一番考察，看它是否合理，譬如求人數或不可分的物件的個數會得出小數或分數來，這顯然是不通的，一定是演算中間有錯誤，必須重做一遍，求出正確的答案；又譬如答數過分大或是過分小，按題目看來似乎可疑的，也應該覆算一下。覆算的最好方法是還原。所謂還原就是把求得答案代入題目裏

面去，看它是否能符合題目所規定的條件。還原如果對，那麼雖是可疑的答數也一定正確。又有時答數雖然看來沒有什麼不合理，也沒有什麼可疑，但說不定仍然會有錯誤，所以最妥當的方法是：每個題目在求出答數後都加以還原。

就一般的情形看來，算術演習的錯誤，由於認題不清及演算疏忽這兩個原因的佔大部份，而實在做不出的只佔一小部份。遇着一個題目，無論我們怎樣思索還是做不出，這或者是由於題目太難，或者是由於我們自己的能力不足，但這兩種情形在通常是比較少的，許多人把題目做錯，並不是因為真的不會做，而是因為他在做的時候沒有用心，有的把題目的意思錯弄了，有的把題目所給的條件或數字看錯，有的在演算的中間不小心以致算錯，有的雖然一切都對但在得出答數後忘記加上單位還會留下一點小錯。尤其是在性急要趕快的人，更容易發生錯誤。

我們並不反對做算題做得快，我們只反對快而做錯的潦草從事；與其快而錯，不如慢而少錯些，當然，能夠快而不錯是最好，但總之，算題的解決最要緊的是正確不錯，其次才是演算的快捷和形式的整潔，而正當的快捷，也必

須把認清題目及遵循必要步驟這兩件事作為前題。

注意題目的
特殊條件

我們在上面曾說做題時要首先認清題目，現在再來補充說一下：有許多題目，往往具有特殊條件，如果疏忽了這

些特殊條件而把普通的法則隨便拿來應用，一定會得着錯誤的結果，譬如我們有這個題目：

一百丈長的路，每間隔一丈。種樹一棵，如果路的兩端都種樹，問有幾棵樹？（又如路的兩端不種，問有幾棵樹？）

假使我們對這問題直接就回答有一百棵樹，這樣就錯了。這題目的特殊點，就在於“兩端”，和“間隔”，我們知道，在能排成一排的東西，兩件東西中間有一個間隔，三件中間有兩個間隔，四件中間有三個間隔，如此類推，十件東西有九個間隔，所以一百件東西有九十九個間隔。在這個題目裏面，樹是代表每丈的間隔的，所以如果兩端不算，就應該有九十九個棵樹，如果兩端也算，那麼要添上兩棵，就有一百〇一棵樹。如果不留心這題目的特殊點，是一定要錯的。