

中国人民解放军测绘学院
一九七九年度学术讨论会

大地坐标系中的尤拉角

朱 华 统

一 九 七 九 年 四 月

大地坐标系中的尤拉角

朱 华 统

(一) 概 述

大地坐标系是整个测量分支的一项重要内容。大地坐标系从总的说来，可以分为地心大地坐标系和非地心大地坐标系（又称局部大地坐标系或参考大地坐标系）两类。局部大地坐标系由于和局部地区大地水准面相密合，至今仍是世界各国作为测制各种比例尺地形图的基础。局部大地坐标系的建立，首先要选择一个一定大小的二轴地球椭球，然后通过定位才能完成。在地球椭球的定位时，总是要求椭球的短轴和地球某一历元的地轴平行；起始大地子午面和起始天文子午面平行，以下简称“两个平行”。从而，使天文大地垂线偏差方程和拉伯拉斯方程最为简便。对于地心大地坐标系，则要求椭球的短轴和地球某一历元的地轴一致；起始大地子午面和起始天文子午面一致。从六十年代以来，由于人造地球卫星在大地测量中的应用，使地心大地坐标系的建立成了现实。地心大地坐标系及其地心大地直角坐标系，已成为当今远程武器和航天技术不可缺少的一项重要的测绘保障。所以，世界上一些国家，均先后建立了地心坐标系，并不断地提高其精度指标。这样，在一个国家内，在相当长的一段时期内，将会存在有局部大地坐标系和地心坐标系两类性质的坐标系，分别供给不同目的的需要。因此，各类各种不同大地坐标系间的相互换算是—项必须解决的问题。

~ 2 ~

设地球和地球椭球分别各自建立空间直角坐标系，则上述“两个平行”的条件，即要求两个空间直角坐标系相应坐标轴之间的夹角为零。然而实际的结果显不可能。例如，北美坐标系和地心坐标系相应的 X 、 Y 、 Z 三个轴之间的夹角分别有 $1-2$ 弧秒。有些局部大地坐标系，其夹角竟相差有十几弧秒。

两个空间直角坐标系坐标轴间夹角，通常用大地坐标系中的尤拉角加以表示的。为此，研究尤拉角是解决大地坐标系间换标的一项重要组成部分。

关于大地坐标系中的尤拉角，从其数学模型的建立，产生的原因，以及在坐标换标中要否加此改正算，始终为各国测绘工作者所重视的一个问题。至今，不同学者和文献的阐述并不完全一样，本文将对此问题作一比较详细的综合论述，提出一些看法，以使这一问题研究更趋深入。

(二)、 定 义

设两个空间直角坐标系分别为 $O-XYZ$ 与 $O-X'Y'Z'$ ，由于方便讨论其相应坐标轴间的夹角，暂设其原点相同。 $O-X'Y'Z'$ 的各坐标轴 OX' ， OY' ， OZ' 对 $O-XYZ$ 各坐标轴的方向角分别为 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ； $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ ； $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ 。如图 1：

由空间直角坐标的转动变换式得：

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} \quad (1)$$

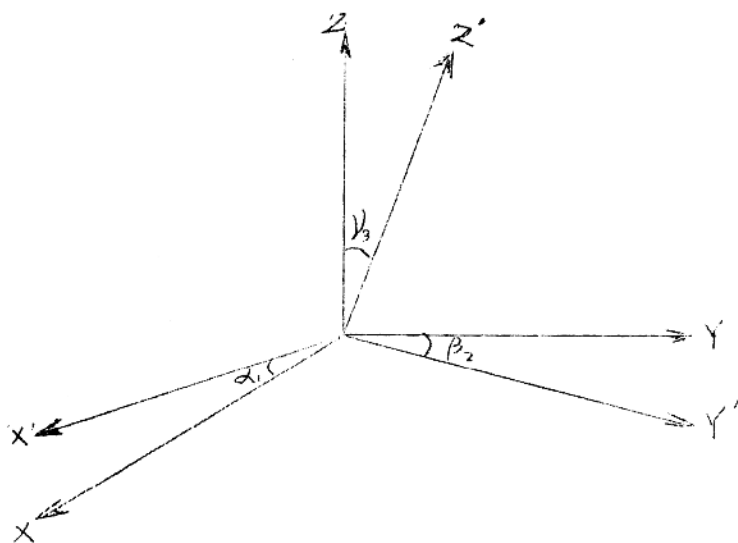


图 1

公式(1)中的九个方向角，並不是各自独立的，它们之间要满足以下六个关系式：

$$\left. \begin{aligned}
 \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \nu_1 &= 1 \\
 \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \nu_2 &= 1 \\
 \cos^2 \alpha_3 + \cos^2 \beta_3 + \cos^2 \nu_3 &= 1 \\
 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \nu_1 \cos \nu_2 &= 0 \\
 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3 + \cos \nu_2 \cos \nu_3 &= 0 \\
 \cos \alpha_3 \cos \alpha_1 + \cos \beta_3 \cos \beta_1 + \cos \nu_3 \cos \nu_1 &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

从理论上说，九个方向角只有三个是独立的；也就是说，我

们可以用其中任意的三个独立的方向角来表示其余六个方向角或者用三个互相独立的参变数来表示全部的方向角。在椭球定位中，我们关心的是相应坐标轴之间的夹角。因此若能选择 α_1 (两个 X 轴间夹角)， β_2 (两个 Y 轴间夹角)， γ_3 (两个 Z 轴间夹角) 三个方向角较为方便。其中特别是 β_2 和 γ_3 是我们最为关心的。若两个空间直角坐标系分别是局部坐标系和地心坐标系，则 γ_3 即表示椭球短轴和地球地轴间的不平行所夹的角， β_2 即表示起始大地子午面和起始天文子午面间的不平行所夹的角。

但是，直接选择 α_1 ， β_2 ， γ_3 作为独立的方向角，公式十分冗长。为此，采用选择另外三个互相独立的参变数来表示所有的方向角。尤拉建议用三个连续转动的角使得两个空间坐标系一致，这三个连续转动的角就是所谓尤拉角。由此可见，尤拉角和两个空间直角坐标系相应轴的夹角的意义是不同的，它们间构成一定的解析关系式。若两个空间直角坐标系分别为某一局部大地坐标系和地球坐标系(或另一局部大地坐标系)，此时的尤拉角则称之为大地坐标系中的尤拉角。

(三)、数 学 模 型

大地坐标系中的尤拉角用于不同系统的坐标换算中的公式是很多的，如有范斯，莫洛琴斯基，毕尔夫和布尔莎等公式。就所用的大地坐标系中的尤拉角来区分，基本上是两类，其区别仅在于相应的坐标轴的选法不一。

利用尤拉角完成坐标系的旋转，通常用旋转矩阵表示，为此有：

~ 5 ~

$$\left. \begin{aligned} R_1(\phi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \\ R_2(\psi) &= \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix} \\ R_3(\vartheta) &= \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

根据矩阵运算规则和正交矩阵性质可得：

$$\left. \begin{aligned} R_1^{-1}(\phi) &= R_1^T(\phi) = R_1(-\phi) \\ R_2^{-1}(\psi) &= R_2^T(\psi) = R_2(-\psi) \\ R_3^{-1}(\vartheta) &= R_3^T(\vartheta) = R_3(-\vartheta) \\ (R_1(\phi) R_2(\psi) R_3(\vartheta))^{-1} &= R_3^{-1}(\vartheta) R_2^{-1}(\psi) R_1^{-1}(\phi) \\ &= R_3(-\vartheta) R_2(-\psi) R_1(-\phi) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

尽管矩阵乘法不可交换，但当旋转角很小时，如大地坐标系中的尤拉角 E_x, E_y, E_z ，此时可有：

$$\begin{aligned} R_1(E_x) R_2(E_y) R_3(E_z) &= R_2(E_y) R_1(E_x) R_3(E_z) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & E_z & E_y \\ -E_z & 1 & E_x \\ E_y & -E_x & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

~ 6 ~

1、第一类大地坐标系中的尤拉角表示式

设 $O-X', Y', Z'$ 为某一局部大地坐标系，其中 Z' 轴指向短轴， X' 轴指向起始大地子午面， Y' 轴和 Z' 、 X' 轴构成右手坐标系。 $O-X, Y, Z$ 为地心坐标系。不顾及中心位移元素，两坐标系和尤拉角如图 2 所示：

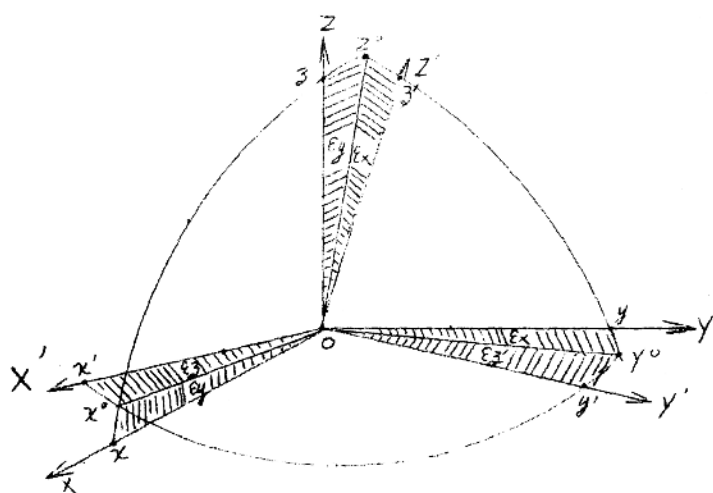


图 2

为此有：

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R_2(\epsilon_3) R_1(\epsilon_2) R_3(\epsilon_1) \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} \quad (6)$$

顾及 (5) 式得：

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon_3 & -\epsilon_2 \\ -\epsilon_3 & 1 & \epsilon_1 \\ -\epsilon_2 & -\epsilon_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} \quad (7)$$

当存在有中心位移元素 $\Delta X_0, \Delta Y_0, \Delta Z_0$ ，并考虑到两坐标系的尺度比的影响 ΔL ，由图 3 可得：

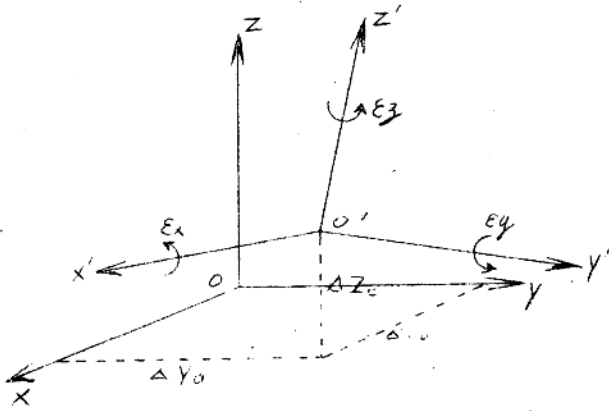


图 3

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} + \Delta L \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} \quad (B)$$

(B) 式即为华尔夫和布尔莎换标公式。

若旋转是在某一基准原点 P 完成，如图 4 所示，为此可得：

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X'_0 \\ Y'_0 \\ Z'_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{pmatrix} X$$

$$X \begin{pmatrix} X' - X'_0 \\ Y' - Y'_0 \\ Z' - Z'_0 \end{pmatrix} + \Delta L \begin{pmatrix} X' - X'_0 \\ Y' - Y'_0 \\ Z' - Z'_0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

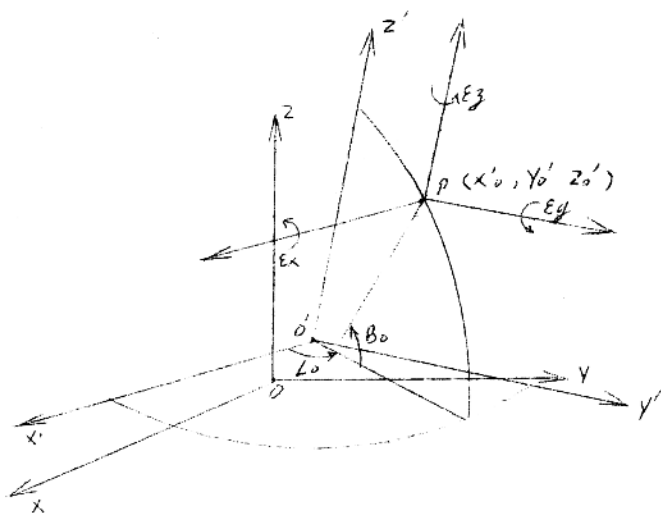


图 4

(9) 式还可进一步化简为：

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_z & -\epsilon_y \\ -\epsilon_z & 0 & \epsilon_x \\ \epsilon_y & -\epsilon_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' - X'_0 \\ Y' - Y'_0 \\ Z' - Z'_0 \end{pmatrix} + \Delta L \begin{pmatrix} X' - X'_0 \\ Y' - Y'_0 \\ Z' - Z'_0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

(9) 式和 (10) 式即为莫洛斯基变换公式。

(2) 第二类大地坐标系中的九拉角表示式

此类公式有范斯公式。该公式保持基准原点仍为 P，但坐标系指向不同：其中 X'E 轴和子午线相切，正方向指向南；Y'E

轴和子午面正交，正方向指向东； Z_E' 轴沿着大地法线，正方向指向上， $P-X_E'Y_E'Z_E'$ 构成右手坐标系，如图 5 所示。

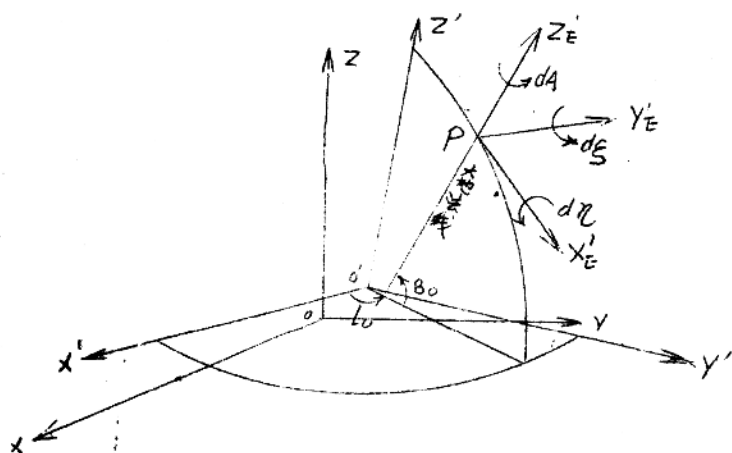


圖 5

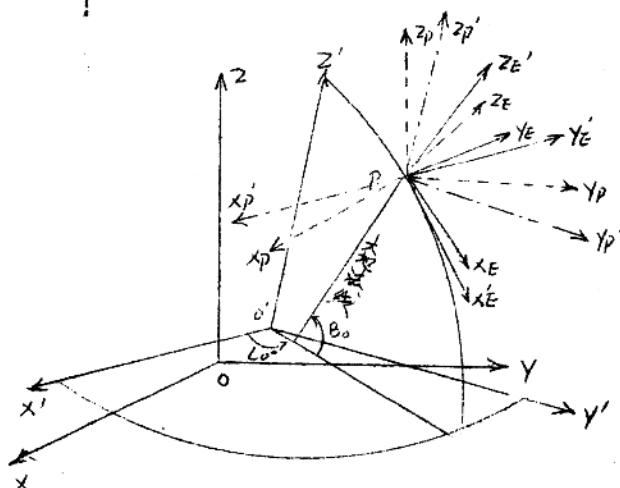


图 6

~10~

道理，用 $d\eta$, $d\epsilon$, dA 表示大地坐标系中的龙拉角。为了便于得出公式，在 P 点建立 $P-X_p Y_p Z_p$ 坐标系和 $P-X_p Y_p Z_p$ 坐标系，分别和 $P-X' Y' Z'$ 和 $P-X Y Z$ 相平行，如图 6 所示。

由 $P-X_p Y_p Z_p$ 通过旋转矩阵 $R_2(90-B_0) R_3(L_0)$ 使其和 $P-X'_E Y'_E Z'_E$ 重合；同理 $P-X_p Y_p Z_p$ 通过旋转矩阵 $R_2(90-B_0) R_3(L_0)$ 使其和 $P-X_E Y_E Z_E$ 重合。而 $P-X'_E Y'_E Z'_E$ 和 $P-X_E Y_E Z_E$ 通过旋转矩阵 $R_1(d\eta) R_2(d\epsilon) R_3(dA)$ 建立其关系。由此可得：

$$R_2(90-B_0) R_3(L_0) \begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{pmatrix} = R_1(d\eta) R_2(d\epsilon) R_3(dA) R_2(90-B_0) X \quad (11)$$

$$X R_3(L_0) \begin{pmatrix} X_p' \\ Y_p' \\ Z_p' \end{pmatrix} \quad (11)$$

由 (4) 式，经过运行可得：

$$\begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{pmatrix} = R_3^{-1}(L_0) R_2^{-1}(90-B_0) R_1(d\eta) R_2(d\epsilon) R_3(dA) R_2(90-B_0) R_3(L_0) \begin{pmatrix} X_p' \\ Y_p' \\ Z_p' \end{pmatrix} \quad (12)$$

考虑到中心位移元素和尺度比改正，对于图 5，则可写得：

~ 11 ~

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + R_3^{-1}(L_0) R_2^{-1}(\varphi_0 - B_0) R_1(d\eta) \\
 R_2(d\xi) R_3(dA) R_2(\varphi_0 - B_0) R_3(L_0) \begin{pmatrix} x' - x_0' \\ y' - y_0' \\ z' - z_0' \end{pmatrix} + \\
 + \Delta L \begin{pmatrix} x' - x_0' \\ y' - y_0' \\ z' - z_0' \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\text{令 } M = R_3^{-1}(L_0) R_2^{-1}(\varphi_0 - B_0) R_1(d\eta) R_2(d\xi) R_3(dA) R_2(\varphi_0 - B_0) R_3(L_0) \quad (14)$$

将 (3)、(4)、(5) 式代入得：

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -\cos B_0 d\eta + \sin B_0 dA & & \\ \cos B_0 d\eta - \sin B_0 dA & 1 & & \\ \sin B_0 \sin L_0 d\eta + \cos L_0 d\xi + \cos B_0 \sin L_0 dA & -\sin B_0 \cos L_0 d\eta & & \\ & + \sin L_0 d\xi - \cos B_0 & & \\ & -\sin B_0 \sin L_0 d\eta - \cos L_0 d\xi - \cos B_0 \sin L_0 dA & & \\ & + \sin B_0 \cos L_0 d\eta - \sin L_0 d\xi + \cos B_0 \cos L_0 dA & & \end{pmatrix} \quad (15)$$

由图6，在建立 $P-x_p' y_p' z_p'$ 和 $P-x_p y_p z_p$ 关系时，

~12~

我们还可以写成如下形式，即：

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = R_3^{-1}(L_0) R_2^{-1}(\varphi_0 - B_0) R_1(d\eta) R_2(\varphi_0 - B_0) R_3(L_0) \times \\ \times R_3^{-1}(L_0) R_2^{-1}(\varphi_0 - B_0) R_2(d\xi) R_2(\varphi_0 - B_0) R_3(L_0) \times \\ \times R_3^{-1}(L_0) R_2^{-1}(\varphi_0 - B_0) R_3(dA) R_2(\varphi_0 - B_0) R_3(L_0) \begin{pmatrix} x_p' \\ y_p' \\ z_p' \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\Delta \quad Q(\eta) = R_3^{-1}(L_0) R_2^{-1}(\varphi_0 - B_0) R_1(d\eta) R_2(\varphi_0 - B_0) R_3(L_0) \\ = \begin{pmatrix} 1 & -\cos B_0 d\eta & -\sin B_0 \sin L_0 d\eta \\ \cos B_0 d\eta & 1 & \sin B_0 \cos L_0 d\eta \\ \sin B_0 \sin L_0 d\eta & -\sin B_0 \cos L_0 d\eta & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$Q(\xi) = R_3^{-1}(L_0) R_2^{-1}(\varphi_0 - B_0) R_2(d\xi) R_2(\varphi_0 - B_0) R_3(L_0) \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\cos L_0 d\xi \\ 0 & 1 & -\sin L_0 d\xi \\ \cos L_0 d\xi & \sin L_0 d\xi & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$Q(A) = R_3^{-1}(L_0) R_2^{-1}(\varphi_0 - B_0) R_3(dA) R_2(\varphi_0 - B_0) R_3(L_0) \\ = \begin{pmatrix} 1 & \sin B_0 dA & -\cos B_0 \sin L_0 dA \\ -\sin B_0 dA & 1 & \cos B_0 \cos L_0 dA \\ \cos B_0 \sin L_0 dA & -\cos B_0 \cos L_0 dA & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

比较 (12) 式和 (16) 式, 由 (14) 式和 (17), (18), (19) 式可得:

$$M = O(\eta) O(E) O(A) \quad (20)$$

(13) 即为范斯坎行公式。

比较 (10) 式和 (13), (14), (15) 式, 可得两类大地坐标系中的尤拉角间相互关系, 即:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \sin B_0 \cos L_0 d\eta - \sin L_0 dE + \cos B_0 \cos L_0 dA \\ E_y &= \sin B_0 \sin L_0 d\eta + \cos L_0 dE + \cos B_0 \sin L_0 dA \\ E_z &= -\cos B_0 d\eta + \sin B_0 dA \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

反演 (21) 式得:

$$\left. \begin{aligned} d\eta &= [(E_x \cos L_0 + E_y \sin L_0) \tan B_0 - E_z] \cos B_0 \\ dE &= E_y \cos L_0 - E_x \sin L_0 \\ dA &= (E_x \cos L_0 + E_y \sin L_0) \sec B_0 - [(E_x \cos L_0 + E_y \sin L_0) \tan B_0 - E_z] \sin B_0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

用 E_x, E_y, E_z 作为大地坐标系中的尤拉角, 可以更简单地表示短轴和地轴, 起始大地子午面和起始天文子午面间平行所引起的夹角。对于 (6) 式, 我们可以严格地写成如下形式:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos E_y \cos E_z - \sin E_x \sin y \sin z & \cos E_y \sin E_z + \sin E_x \sin y \cos z \\ -\cos E_x \sin E_z & \cos E_x \cos E_z \\ \sin E_y \cos E_z + \sin E_x \cos y \sin z & \sin E_y \sin E_z - \sin E_x \cos y \cos z \end{pmatrix}$$

~1.4~

$$\begin{pmatrix} -\cos E_x \sin E_y \\ \sin E_x \\ \cos E_x \cos E_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (23)$$

比较 (1) 式和 (23) 式可得：

两 Y 轴间的夹角——即起始大地子午面和起始天文子午面间的夹角：

$$\cos \beta_2 = \cos E_x \cos E_z \quad (24)$$

两 Z 轴间的夹角——即短轴和地轴间的夹角：

$$\cos \nu_3 = \cos E_x \cos E_y \quad (25)$$

两 X 轴间的夹角：

$$\cos \alpha_1 = \cos E_y \cos E_z - \sin E_x \sin E_y \sin E_z \quad (26)$$

上述三个等式的结果，我们还可以从图 2 通过另一推导方法得到验证。其中以 OY^0 或 OZ^0 为棱的两面角均为 90° ，以 OX^0 为棱的两面角则为 $90^\circ + E_x$ 。若把尤拉角 E_y, E_z 和相应轴间夹角 α_1, β_2, ν_3 均投影至任一半径的球面上，则由斜球面三角形 $X^0 X' X'$ 和直角球面三角形 $Y^0 Y' Y'$ ， $Z^0 Z' Z'$ 即可得出。

对于 (24)，(25)，(26) 式，略去三次以上小数值，可化简为起始大地子午面和起始天文子午面间的夹角：

$$\beta_2 = \sqrt{E_x^2 + E_z^2} \quad (27)$$

短轴和地轴间的夹角：

$$\gamma_3 = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \quad (28)$$

两X轴间的夹角：

$$\alpha_1 = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} \quad (29)$$

由于大地坐标系中的尤拉角，以及中心位移元素的存在，对于大地直角坐标系间的换行式，即有以上的(8)式，(10)式和(13)式。对于大地坐标系间的换行式，还须考虑两个坐标系椭球元素的不同，现直接写出包含尤拉角 E_x, E_y, E_z 的换行式如下：

$$\begin{aligned} dB = & \frac{1}{M} [(e^2 \Delta \alpha + a \Delta e^2) \sin B \cos B + a e^2 \sin^3 B \cos B \Delta e^2] - \\ & - \frac{1}{M} [\sin B \cos L \Delta X_0 + \sin B \sin L \Delta Y_0 - \cos B \Delta Z_0] - \\ & - \sin(E_x + \cos L E_y - \frac{N}{M} e^2 \sin B \cos B \Delta L \end{aligned} \quad (30)$$

$$dL = \frac{1}{N \cos B} [-\sin L \Delta X_0 + \cos L \Delta Y_0] + \frac{1}{N} B \sin L E_y - E_z \quad (31)$$

$$dH = \cos B \cos L \Delta X_0 + \cos B \sin L \Delta Y_0 + \sin B \Delta Z_0 - [1 - \frac{e^2 \sin^2 B}{2}] X$$

$$X \Delta \alpha + \frac{1}{2} a \sin^2 B (1 + \frac{e^2 \sin^2 B}{2}) \Delta e^2 - N e^2 \sin B \cos B \sin L X$$

$$X E_x + N e^2 \sin B \cos B \cos L E_y + N (1 - e^2 \sin^2 B) \Delta L \quad (32)$$

(四) 原 因

产生尤拉角的原因，国内外诸文献中至今说法不一，这个问题还有待进一步的深入和研究。

我们可以从尤拉角的存在，引起对天文坐标的变化导出公式最后反演其关系，可知在椭球定位中大地原点的天文测量误差是产生尤拉角的原因之一。又在建立各大地坐标系时，由于地极原点的历元选取不同，则相应的Z轴指向也就不同，这是产生尤拉角的又一原因。还有一个原因，是各坐标系的起始子午面不一。我们知道，起始大地子午面和起始天文子午面密切相关，因此，

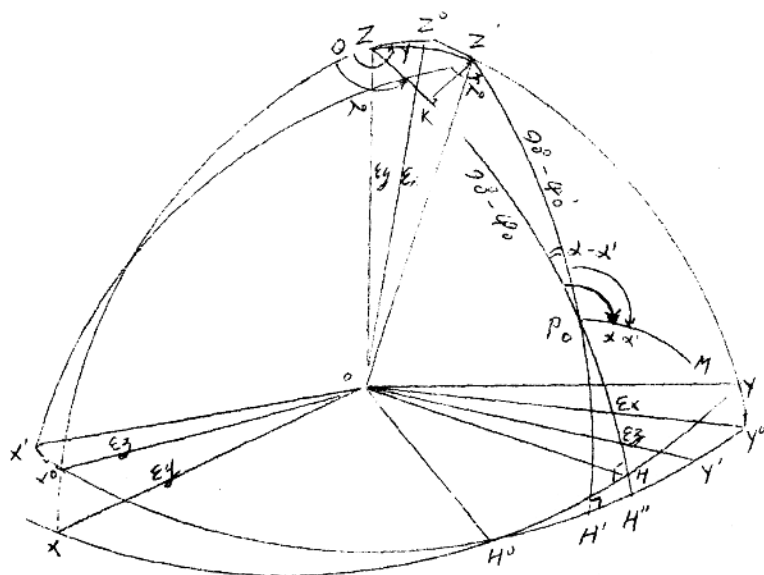


图 7