

電 國 方 興

高 等 代 數

譯 者 許 崇 清

校 訂 者 許 崇 清

國 際 二 十 一 號

高等代數學

【全一冊】

版權所有



翻印必究

原著者	H. S. Hall. S. R. Knight.		
譯著者	龍 郁	文	
校訂者	楊 華 吳 小	一 石	
發行處	長沙湖南大學		
代售處	長沙湘芬書局		
印刷者	長沙六合公司		

中華民國二十二年十二月初版

每冊定價大洋貳圓伍角

外埠酌加郵費匯費

序 一

算學一科爲近代文明之利器，其爲物質科學之中堅，固無論矣。即就其論證精審週詳之處言之，裨益于哲學玄學者亦不可限量。代數學一門，爲算學全部之樞紐，集算術之大成，奠微積之基礎。其在我國，已濫觴於宋代，（宋秦九韶大衍求一術，爲代數之祖。）歷時既久，流韻餘風，闕焉滅絕。浸至近代，我國中等以上學校，學者所習，教者所授，莫非盤行蚓曲之文，大有非挾洋書，讀洋文，不足以炫耀儕輩之勢。夷考其實，則精力耗於文字者十常七八，能用之於科學者十僅二三，玩時愒日，事倍功半，無怪乎學者惟日孜孜，無敢豫逸，而其效果，程度反日見低落也。

且也，世界各國，除印度，安南，緬甸，朝鮮等已亡諸國外，其中等學校中諸科學，鮮有採用外國文者。今吾國中學校教科書，尙多沿用西書，崇奉外人之心日盛，致自立精神，喪失殆盡。學術不圖自立，欲望國家之興盛，科學之發達，戛戛乎難矣。此教育當道年來所以力謀禁止中學校採用西文教科書之苦心也。

學術自立之道維何？其第一步宜多繙譯，以次及于編纂著述，務使學科學者，盡脫外國文之束縛，而多得參考之材料。在校學生既可祛文字隔閡之弊，即社會聰明才智之士，亦得自研自習，以發展其天才。夫如是，研究既

多，庶可脫附庸之地位，而羣趨於發明之途。繙譯科學書籍，在科學昌明國力強盛之美，日、德等國，猶提倡甚力；矧在科學落後之吾國乎！

新化龍君郁文專研理數，執教鞭於湘垣中等以上學校者歷有年所，平日毅然以介紹名著，提倡科學為己任。爰本其歷年教學之經驗，取英人霍爾乃特高等代數學繙譯而增訂之。霍爾乃特為英國劍橋大學之名教授，原書久已通行於英美諸國，他國亦多譯本；其選材之精審，例證之週密，命題之切當，久已膾炙人口。惜我國採用者感于文字之扞格，困難叢生。今龍君之譯本，譯筆明暢，說理透徹，吾知莘莘學子，當拜賜多矣。是為序。

民國廿二年十二月 郴縣黃士衡序

中國吾今香文圖報用科言種學採蓋中對學審中其長
立自廷盈日心之入於家崇書西用當途尚書採錄對學
之學採蓋與之案陶望煊立自圖不爾學盡部尖爽，輔請
學中北禁某以湘來平並當育輝共突職平夏夏豈豈
也心苦之書採錄文西用對對
于其本以霸識途宜走一策其同聯重之立自爾學
參辨途而對東之文圖於雖盡皆學採學對錄，並養稟識
開顯會採明，獲之閱爾字文封可通此學對五，林林之注
鴻發爾景賦夫本天其與錄以，晉自爾自採在，士之晉本

復證諸實驗，而其律以成。此在今日之數式物理中乃為
習見之事，而數學之見重於吾人，亦正以此耳。由是可知
數學雖為理想之產物，而為研究自然之利器，其有造於哲學，
者且也。數學不獨為研究宇宙，往古來今，曰宙，宇宙者，即今之
亦復不小。上下四方，曰宇，往古來今，曰宙，宇宙者，即今之
所謂空間與時間也。二事之同時並舉，或先後繼起，與二
時間之相等與否，此在尋常之記述，實莫由究其為三元，抑為
馭以數學之方法，其陳述乃趨於簡單。空問之在此，常有實證之
多元為歐几里得之數理，不能不假手於精深廣闊之數必誠之
知所謂及通之事實，雖其思想之途徑，斯其功於玄學，為不也
矣。宇宙間之掩飾，吾人今日之簡捷之唯一媒介，加減乘除及級數
為不可掩飾之事實，今日之簡捷之唯一媒介，加減乘除及級數
定軌之外，而能得與經驗之起也，則有微積道者，高等代數一科，
為調和理想與經驗之起也，則有微積道者，高等代數一科，
可量矣。代數之學，起也，則有微積道者，高等代數一科，
簡及於高深而為研究斯道者，高等代數一科，
乎入於中堅，而為研究斯道者，高等代數一科，
全部之高級中學，莫不設有高等代數一科，
內之概多觀宜乎學子之視為長途也。龍子郁文昔年曾從
教本不問學於麓山，其業於湘垣，各書有裨焉。蓋此當以呈未初
實余專出都之勤求於此，世之君子以覽觀焉。新識於麓山半學齋。

民國廿二年孟秋月楊卓新識於麓山半學齋

例 言

- 一、是書爲原著者初等代數學之續編。其前數章詳細討論比，比例，變數，及級數等以補初等代數學一書之不足；後之篇幅大都爲學者所未曾學習而極爲重要之材料。
- 一、是書材料豐富，正文及例題均力求敘述澈底，具體而微，精深詳盡，爲他書所不及。
- 一、斂級數及發級數一章，較通常列後，敘述務求簡明，可減少初學者之困難。
- 一、級數之和一章中，注重差法 (Method of Differences) 及其應用。書中 395, 396 兩節公式之證明，別出心裁，因此得以提前討論若干有興趣之級數。
- 一、適遇法一章討論詳盡，示例亦雋永有趣。
- 一、行列式一章，敘述簡潔明顯，便於學者學習錐綫論及立體解析幾何之用。
- 一、方程式一章，原書似嫌緊縮，譯者原擬全部改編，俾更能增進學者之興趣。惟爲時間所限，祇得俟諸來日，但賀勞近似法已補充於附錄中。

- 一. 是書各章,其內容各自完成,故可隨教學之便,變更秩序.但附有星號*者,可留待再次學習時學之.
- 一. 書後附雜題三百,大部分選自英國獎學金考試題目及上議院公報,足以代表英國各主要大學(如倫敦,牛津,劍橋等)及文官考試之試題.
- 一. 是書譯筆務以清晰易懂,不失原意爲主.並有扼要之補充.散見於各章中者以‡號爲記.書末附有附錄一篇,期臻完善.
- 一. 學語譯名,我國極不統一,本書所採用者均係通行已久之名詞.更於每一名詞初見之時,附以英語或二三譯名,俾便學者參閱,且可作逕讀西書之助.
- 一. 是書算式,務求排列整齊,訛字力求校正.惟以趁暑假之暇,匆促翻譯印刷,且譯者能力棉薄,學識譾陋,錯誤欠妥之處,自知不免,敬乞海內賢達,不吝賜教,是爲深幸.
- 一. 是書承楊博士華一,吳教授小石校閱訂正,附此誌謝.

目 錄

第 一 章 比

可通約量及不可通約量

2

優比及劣比

2

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = \left(\frac{pa^n + qc^n + re^n + \dots}{pb^n + qd^n + rf^n + \dots} \right)^{\frac{1}{n}}$$

3

$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n}$ 介於 $\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$ 之最大者與

最小者之間

5

交叉乘法

8

三個一次方程式之消去式

9

習題 I.

11

第 二 章 比 例

定義及命辭

14

代數的定義及幾何的定義之比較

17

不可通約量之例

18

習題 II.

20

第 三 章 變 數 法

若 $A \propto B$, 則 $A = mB$

23

反變法

24

合變法

25

當 C 不變時, 若 $A \propto B$, 及 B 不變時, $A \propto C$,

則 $A = mBC$

25

例證——合變法之例.

26

習題 III.

28

第四章 等差級數

等差級數之 n 項之和	31
基本公式	32
插入等差中項	34
習題 IV. a.	35
$dn^3 + (2a-d)n - 2s = 0$ 之根之討論	37
習題 IV. b.	39

第五章 等比級數

插入等比中項	42
等比級數之 n 項之和	43
無窮項等比級數之和	44
習題 V. a.	45
化循環小數規則之證明	47
等差的等比級數之 n 項之和	48
習題 V. b.	50

第六章 調和級數 與前諸級數有關之定理

$H.P.$ 中諸量之倒數成 $A.P.$	52
調和中項	52
聯屬 $A.M., G.M., H.M.$ 之公式	53
自然數之平方和	55
自然數之立方和	56
Σ 記法	57
習題 VI. a.	58
平方底角錐之積彈數	59

三角底角錐之積彈數	$0 = \omega + \omega + 1$	冊式立	59
不完全角錐		乘	60
習題 VI. b.		冊	61

第 七 章 記 數 法

各種記數法之說明		冊	63
習題 VII. a.		冊	65
在所擬進法中表示整數之式			66
在所擬進法中表示記底分數之式			69
一數與其數字和之差可以 $r-1$ 除盡之			70
“去九法”之證明			71
可以 $(r+1)$ 除盡之試驗			71
習題 VII. b.			73

第 八 章 根 數 及 虛 量

$\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}$ 之分母之有理化			76
$\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$ 之有理化因式			77
$a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}$ 之平方根			78
$a + \sqrt{b}$ 之立方根			79
習題 VIII. a.			81
虛量			83
$\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$			84
若 $a + ib = 0$, 則 $a = 0, b = 0$.			85
若 $a + ib = c + id$, 則 $a = c, b = d$.			85
積之根率(亦曰複虛數之模)為根率之積			85
$a + ib$ 之平方根			86
i 之乘冪			88

1 之立方根: $1 + \omega + \omega^2 = 0$.	89
ω 之乘幂	89
習題 VIII. b.	91

第九章 二次方程式論

二次方程式不能有多於兩個之根	93
實根, 等根, 虛根之條件	94
兩根之和 $= -\frac{b}{a}$, 兩根之積 $= \frac{c}{a}$	95
已知其根, 造方程式.	96
二次式之根(1)大小相等符號相反(2)互為倒數之條件	98
習題 IX. a.	99
x 為實值時, $ax^2 + bx + c$ 式通常與 a 同符號; 及例外	101
習題 IX. b.	103
函數, 變量, 有理整函數之定義	105
$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$ 可分為兩個一次因式之條件	106
$ax^2 + bx + c = 0$ 及 $a'x^2 + b'x + c' = 0$ 可有一公共根之條件	107
習題 IX. c.	107

第十章 雜方程式

含一未知量之方程式	109
倒數方程式	112
習題 X. a.	113
含兩未知量之方程式	116
等次方程式(齊次方程式)	118

	頁
習題 X. b.	119
含多個未知量之方程式	121
習題 X. c.	124
不定方程式;淺易之數字例題	125
習題 X. d.	128

第十一章 排列及組合

初步之命辭	130
n 物每次取 r 件之排列	131
n 物每次取 r 件之組合	134
n 物每次取 r 件之組合之數,等於 n 物每次取 $n-r$ 件之組合之數.	135
分 $m+n+p+\dots$ 物為各含 m, n, p, \dots 件等組之方法之數	136
習題 XI. a.	138
“相同”與“不相同”之意義	141
n 物中 p 件為一類, q 件為第二類……每次全取之排列之數	142
n 物每次取 r 件,每件可重複時之排列數	143
n 物之組合總數	144
‡ 環形排列	145
求 r 為何值時 ${}^n C_r$ 為最大	146
n 物每次取 r 件之公式之自內證明	147
$p+q+r+\dots$ 物之組合總數,此中 p 為一類, q 為第二類,等等	148
習題 XI. b.	149

第十二章 算學歸納法

證法之例 153

 n 個形式為 $x+a$ 之二項因式之積 154

習題 XII. 156

第十三章 二項式定理 指數為正整數者

 n 為正整數時, $(x+a)^n$ 之展開式 158

展開式之公項 161

展開式可使歸於初項為 1 之情形 162

二項式定理之又一證明 164

習題 XIII. a. 164

與首尾等遠之項之係數相等 166

決定最大項 166

係數之和 168

奇項係數之和等於偶項係數之和 168

多項式之展開 169

習題 XIII. b. 170

第十四章 二項式定理 指數為任何數者

二項式定理適用於任何指數之歐拉證明 173

 $(1+x)^n$ 之展開式之公項 176

習題 XIV. a. 178

 $(1+x)^n$ 之展開式僅當 $x < 1$ 時可為算術的說明 179 $(x+y)^n$ 之式恆可依二項式定理展開 180 $(1-x)^{-n}$ 之展開式之公項 180 $(1-x)^{-n}$ 之展開式之特例 181

由二項式定理所得之近似值	182
習題 XIV. b.	185
$(1+x)^n$ 之展開式中數字的最大項	186
由 n 個文字中所成之 r 次齊次積之數	188
多項式之展開式中之項數	189
n 物中每次取 r 件, 准予重複之組合之數	190
習題 XIV. c.	191

第十五章 多項式定理

當 p 為正整數時, $(a+bx+cx^2+dx^3+\dots)^p$ 之展開式中之公項	195
當 n 為有理數時, $(a+bx+cx^2+dx^3+\dots)^n$ 之展開式中之公項	197
習題 XV.	199

第十六章 對數

定義 $N = a^{\log_a N}$	201
初等命辭	202
習題 XVI. a.	204
常用對數	205
視察定指標(位標)	206
10 底對數之便利	207
假數(數標)為正之便利	208
已知一切數以 a 為底之對數, 求 b 底之對數	209
$\log_a b \times \log_b a = 1$	210
習題 XVI. b.	212

第十七章 指數級數及對數級數	
a^x 之展開式, e 之級數	214
e 爲 $(1 + \frac{1}{n})^n$ 當 n 爲無限大時之極限	215
$\log_e(1+x)$ 之展開式	218
對數表之構造	219
$\log_e(n+1) - \log_e n$ 之迅斂級數	221
e 爲不可通約量	222
習題 XVII.	223
第十八章 利息及年金	
已知金額, 按單利計算, 求利息及本利和	226
已知金額, 按單利計算, 求現值及貼現	226
已知金額, 按複利計算, 求利息及本利和	228
名義上的年利率及真實的年利率	228
瞬息計息之複利息之例	228
已知金額, 按複利計算, 求現值及貼現	229
習題 XVIII. a.	230
年金, 定義	231
停付年金之本利和, 單利	231
停付年金之本利和, 複利	232
年金之現值, 複利	232
購買年限	233
延期支付年金之現值, 複利	233
續約金	234
習題 XVIII. b.	235

第十九章 不 等 式

	頁
初等命辭	237
兩正量之等差中項大於其等比中項	238
兩量之和為一定，則兩量相等時其積為最大：其積一 定時，則兩量相等，其和為最小	239
一羣正量之等差中項大於其等比中項	240
已知 a, b, c, \dots 之和；求 $a^m b^n c^p, \dots$ 之最大項	241
極大及極小之淺易例	241
習題 XIX. a.	242
一羣正量之 m 乘方之等差中項大於其等差中項之 m 乘方，但 m 介於 0 及 1 時除外	244
若 a 及 b 為正整數，且 $a > b$ ，則 $\left(1 + \frac{x}{a}\right)^a > \left(1 + \frac{x}{b}\right)^b$	246
若 $1 > x > y > 0$ ，則 $\sqrt[x]{\frac{1+x}{1-x}} > \sqrt[y]{\frac{1+y}{1-y}}$	246
$a^a b^b > \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}$	247
習題 XIX. b.	248

第二十章 極 限 值 及 消 失 分 數 (零 分 數)

極限之定義	250
當 x 為零時 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$ 之極限為 a_0	251
令 x 為充分之小時，可使級數 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ 之任一項與其後隨一切項之和之比為任意之大；而 令 x 為充分之大時，可使任一項與其前置之一切項 之和之比為任意之大。	252
決定消失分數之極限之法	254
聯立方程式之解答中幾個特徵之討論。	256
二次方程式之解答之特徵	257
習題 XX.	258