

運籌學講義

山東省曲阜師範學院贈

作物布局问题

作物布局就是根据各个人民公社所在地的气候、土壤等条件，进行农作物的合理种植，做到因地制宜，充分发挥土地潜力，促进农作物的增产与增产。

关于作物的田地种植，原将必维奇在“生产领域计划中的数学方法”一书中曾有一个提法，那是在要求各种作物产量保持一定比例的前提下，使总产量取得最大的布局问题。而目前在俄国，上级分配种植任务以及生产大队的播种计划，一般还是就各种作物的播种面积加以规定的，因此，这样的布局问题与原氏的提法稍有不同。根据目前我国农业上以粮为纲的方针，我们对于在公社范围内（或者大队范围内），如何安排粮食作物的合理布局，进行了研究。

如何制定一个作物合理布局方案？这个问题最初很自然地会这样考虑：比如，一个人民公社（或者一个生产队）要安排种植他制定一个总要求（包括越冬小麥）或夏季作物播种计划，这个公社（或大队）有季作物（包括越冬小麥）或夏季作物计划播种 m 种，各种作物计划播种面积为 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 。土地 n 种，面积分别为 $b_1, b_2, \dots, b_n$ ，这 n 种土地中种植第 i 种作物，亩产为 c_{ij} ，问该队第 i 种土地中第 j 种粮食作物的播种亩数 x_{ij} ，则：

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n b_j \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ x_{ij} \geq 0 \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right) \\ S = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \end{array} \right.$$

求使 S 取得最大的 x_{ij}

这是一个原——面问题，可以用表上作业法来求解。

实际上，这是一个单季作物布局，能单独的进行春季作物（包括冬小麥）或夏季作物的布局，并没有考虑到两季作物之间的联系。实际上，夏季布局是在这一季麦茬地上进行的，因而春季布局，直接影响着夏季布局，所以，把春季两个互相关联的布局问题，分开考虑，就不能得到一年的最优布局方案。

经过初步研究，对这个问题改为这样来考虑：假设有两季季（包括冬小麥）或夏季这个公社（或大队）计划播种粮食作物 $m+n$ 种，计划播种公顷分别为 $a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_{m+n}$ ，其中 a_1 为麦田播种公顷， $a_2, \dots, a_m$ 为春田播种公顷， $a_{m+1}, \dots, a_{m+n}$ 为夏田播种公顷；大田 Y 种公顷分别为 $b_1, b_2, \dots, b_Y$ ，在大田 j 种公顷中为 i 种作物的亩产为 C_{ij} ，假使在大田 j 种公顷中为 i 种作物的播种亩数为 x_{ij} ，则：

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=2}^{m+n} a_i = \sum_{j=1}^Y b_j$$

$$\sum_{j=1}^Y x_{ij} = a_i \quad (i=1, 2, \dots, m+n)$$

$$\sum_{i=1}^{m+n} x_{ij} = b_j \quad (j=1, 2, \dots, Y)$$

$$\sum_{i=m+1}^{m+n} a_i = a_1$$

$$\sum_{i=m+1}^{m+n} x_{ij} = x_{1j} \quad (j=1, 2, \dots, Y) \quad (\text{春秋产量})$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m+n, j=1, 2, \dots, Y)$$

$$\text{求 } S = \sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^Y C_{ij} x_{ij} \quad \text{取得最大的 } x_{ij}$$

对于这个问题，我们发现了解决规划更为简便的一个定理（见附录），可把它化为原——面问题，用表上作业法来求解。

在二年的布局问题解决的基礎上，我們又發現，用这个方法連年地制定作物布局方案还是不可行的，因为这一年作物与下一年作物之間有連貫关系，所以这一年的布局直接影响到下一年。为此必須考虑作物的輪作。根据当地情况，一般两年为一个輪作周期，我們把每一块土地作为一个輪作区，在輪作区内根据作物方案制定若干个輪作组，每个輪作组由面积相等的两个地块組成。每个輪作组，采取一种輪作方式，比如，甲乙两个地块作为一个輪作组，甲地块今年种小麦，麥收后种夏地瓜，乙地块种春地瓜，則第二年甲地块种春地瓜，乙地块种小麦，夏地瓜。这样对每个地块都进行了二年三作，并且保证了春、夏、秋一年两作的情形也是如此。比如丙丁两个地块作为一个輪作组，丙地块今年种小麦，麥收后种大豆，丁地块也种小麦，麥收后种玉米，第二年丙地块种小麦玉米，丁地块种小麦大豆。这样，对丙丁每个地块，都进行了二年两作，并且保证了夏、秋作物的轮作。根据该地公放的情况，夏地瓜地都种春地瓜，大豆地有一部分为春地，有一部分种小麦，第二年麥收后种晚谷，夏玉米。这样，便有：夏地瓜种植面积 + 大豆种植面积 = 春地面积 + 晚谷种植面积 + 晚玉米种植面积。假設明年春播作物（包括冬小麦）和夏播作物計劃播种 $m+4$ 种，計劃播种面积分别为 a_1 (冬小麦) $\dots a_m$ a_{m+1} $\dots a_{m+4}$ ($a_2, \dots, a_m$ 分别为春播作物面积 a_{m+1} 为夏地瓜种植面积， a_{m+2} 为大豆种植面积， a_{m+3} 为晚玉米种植面积， a_{m+4} 为晚谷种植面积) 地块 Y 种面积分别为 $b_1, b_2, \dots, b_Y$ ，在若干种土地中第 i 种作物的亩产为 C_{ij} ，假設在若干种土地中第 i 种作物的播种亩数为 x_{ij} ，則：

$$\begin{cases}
 \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=2}^{m+4} a_i = \sum_{j=1}^Y b_j \\
 \sum_{i=m+1}^{m+4} a_i = a_i \\
 \sum_{j=1}^Y x_{ij} = a_i \quad (i=1, 2, \dots, m+4)
 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=2}^{m+g} x_{ij} = b_j \quad (j=1, 2, \dots, Y)$$

$$\sum_{j=m+1}^{m+g} x_{ij} = x_{i1} \quad (i=1, 2, \dots, Y) \quad (\text{春收才收})$$

$$x_{m+1,j} + x_{m+2,j} = \sum_{i=2}^{m+g} x_{ij} + x_{m+1,j} + x_{m+2,j} \quad (\text{秋作才收})$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m+g; j=1, 2, \dots, Y)$$

$$\text{求 } S = \sum_{i=1}^{m+g} \sum_{j=1}^Y C_{ij} x_{ij} \text{ 取得最大的 } x_{ij}$$

引入秋作才收以后，又发现了秋收规划与春收的一个定理（见附录），可以把这个问题，化为两个秋收的问题——面问题，进而用秋作才收的“最大元素法”来求解。

这样以来，我们虽然在布局中考虑到秋作，但是并不能根据每个人民公社（或每个大队）的具体情况，选择最适宜的秋作方式。随着实践知识的丰富，并积极地向广大公社干部和社员们紧密结合，经过进一步的研究，我们发现，可以根据每个公社（或大队）的具体情况，从选择最适宜的秋作方式着手，来安排作物的合理布局，这样可以使我们的方案更加接近于实际情况。因此，才使作物的合理布局问题得到较好的解决。下面我们将给出这个方法的介绍：

一、问题提出：

一个人民公社（或一个大队）计划播种春收作物（包括冬小麦）和夏收作物 m 种，这 m 种作物的计划播种面积分别记为 $a_1, a_2, \dots, a_m$ ；有 Y 种秋作，其面积分别记为 $b_1, b_2, \dots, b_Y$ 。采取同样的措施下，总得种植，才能使作物的总产量每年达到最大。

二、问题解法：

根据问题提出中给出的具体情况，和公社（或大队）的情况，可以选出 n 种最适宜的秋作方式。假若每种秋作方式的种植面积记为 x_i （ $i=1, 2, \dots, n$ ），第 j 种秋作方式在第 i 种土壤中的种植面积记为

x_{ij} 在 j 种土壤采取第 i 种轮作方式一个周期内每季可收获粮食为 C_{ij} 则：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^Y b_j \\ \sum_{j=1}^Y x_{ij} = h_i & (i=1, 2, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j & (j=1, 2, \dots, Y) \\ x_{ij} \geq 0 & (i=1, 2, \dots, n \quad j=1, 2, \dots, Y) \\ \text{求使 } S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^Y C_{ij} x_{ij} \text{ 取得最大的 } x_{ij} \end{cases}$$

这是一个原——由问题，可以用表上作业法求最大元素法求解，求出 x_{ij} 以后，再根据轮作方式，便可得出一个轮作周期内各种粮食作物的种植面积了，下面我们就这个模型给出一个例子：

休戚公社西白石岭大队各种作物种植面积各种作物在不同土壤中的亩产量及不同土壤面积。（见表1）

因为土壤地有60亩种经济作物，黄土地在黄土地里有14亩也种经济作物，多穗高粱33亩，只能种在黄土地内，故应在黄土地上扣除66亩。（因黄多穗高粱轮作的方式是：小麥——夏地瓜——多穗高粱——小麥——夏地瓜，故须有14次地各为33亩来轮作这一轮作，才能保证每年多穗高粱的种植）在红沙地中有213亩根据当地条件每年只能种一次春地瓜，其余70亩红沙地最适宜实行小麥——夏地瓜——小麥——夏地瓜一年两作的轮作方式，将以上特殊情况，依据轮作方式，把各种土壤亩收获作物种植面积相加，经过整理得表

表1

作物 \ 土壤	壤地	黄 壤	白 泥	黄 土	灰 泥	种植面积
小 麦	250 ¹²⁰	160 ¹²⁰	130 ¹⁰⁰	270 ²¹⁰	100	1527
春地瓜	600	550	650	850	450	490
春 谷	300	200	220	350		50
高 粱	200	150	150	210		50
冬播高粱				500		33
其 他						60
夏玉米	430			300		300
夏 谷	250			300		150
夏地瓜	500	500	500	650	400	780
大 豆	200	140		240		150
其 他						147
大 计 亩 数	800	530	150	447	283	

说明：小麦亩产可在上表的数字代表小麦按夏地瓜茬的产量。

“其他”栏指经济作物，因为不在统计规划之列，故亩产量没有填写。

表中空白格表示某种作物系某种土壤中无种植。

表2

作物 \ 土壤	壤地	黄 壤	白 泥	黄 土	种植面积
小 麦					1272
春地瓜					277
春 谷					50
高 粱					50
夏玉米					300
夏 谷					150
夏地瓜					677
大 豆					150
大 计 亩 数	800	470	150	234	

根据较大情况，我们选择了以下几种轮作方式（见表3）：

表3

小		麦 (22)					春地	高粱	春谷
夏地瓜 (32)		晚谷	夏玉米	夏地瓜	夏地瓜	大豆	22	50	50
		150	300	150	150	150			
冬			小						
春地瓜 (22)	高粱 50	春谷 50	晚谷	夏玉米	夏地瓜	大豆	夏地瓜	夏地 (32)	瓜
			150	300	150	150	150	22	50

第一种轮作方式

第二种轮作方式

第三种轮作方式

第四种轮作方式

第五种轮作方式

第六种轮作方式

第七种轮作方式

第八种轮作方式

第九种轮作方式

第十种轮作方式

第十一种轮作方式

依据表2、表3，按轮作方式把每亩在这一轮作周期内的亩产量之和作为亩产量，同时将表中拥有相同号的轮作亩数之和作为该号轮作方式的亩数，编制产量表及平衡表如下：

表4

亩产量 / 轮作方式	夏地	上陵	白沙	黄土	轮作亩数
1	1350	1210	1280	1770	554
2	950	810	780	1130	100
3	1050	860	850	1220	100
4	1000			1140	150
5	1360			1640	300
6	1360	1260	1200	1700	150
7	1200	960		1430	300
土壤亩数	800	470	150	274	1654

根据表 5 求最大元素法，求得按作物方式进行布局的最优方案如下：

表 5

面积/公顷 作物方式	荒地	丘陵	平川	黄土	按作物面积
1		170	150	234	554
2		100			1100
3	50	50			100
4	150				150
5	300				300
6		150			150
7	300				300
公顷面积	800	470	150	234	1654

根据表 5 按作物方式以及表 1 便可得出由右至左以大粮食作物布局的最优方案（见表 6）。

表 6

面积/公顷 作物	荒地	丘陵	平川	黄土	按作物	种植面积
小麦	775	310	75	293	70	1527
春地瓜		85	75	117	213	490
春谷子		50				50
高粱	25	25				50
冬小麦				33		33
其他		60				60
夏玉米	300					300
夏谷子	150					150
夏地瓜	125	310	75	150	70	780
大豆	150					150
其他				147		147
公顷面积	800	530	150	447	283	

从秋收为生产服务的需要出发，在5月24日的晋城县规划现场会上，我们把这个方法进行了介绍。随后，又派同等利济寺、高平、沁源、晋城等专区进行这一方法的介绍和帮助培训干部。据统计，目前已有2000多名干部和群众听取了这一方法的介绍。同时，我们还写了两本便于普及的小册子，以帮助广大群众更好地掌握这一方法。

在怀远公社，我们帮助公社制定的布局方案，经过核算，每年预计可增产粮食21.6万斤。为了配合夏种任务，我们帮助公社的21个大队做了方案，经公社党委核算，预计今年秋收可增产13.0万斤粮食。穿脑西白石桥大队，新的方案比他原来的种植计划每年预计可增产粮食2万斤，今年秋收预计可增产粮食9万斤。我们帮助大队制定的每一个方案，都为大队所完全采纳，新方案受到群众的普遍欢迎。当地的群众说：“这样做，比给我们几斤粮食都好。”有的干部也说：“过去也想因地制宜，可就是土地多了搭配不过来，有了这个方案，心里有了底，领导起来生产也亮堂了。”又有的群众说：“这样做，才真正实行了因地制宜，保管国家、干部、社员三满意。”

随着形势的进一步发展，方田化以后，将要实行作物种植区域化。这样，根据方田区划，大垅，根据每种作物的种植亩数，运用上述方法，便能很快好的解决作物种植区域化以后的大区划合理布局问题。

用数学规划的方法，进行作物的合理布局，是能够实现因地制宜提高粮食产量的。但就提高土地利用率来看，似以双轮双铧农具的二年三作和一年二作还是相当不够的，必须把作物的套作，间作与合理布局有机地结合起来。这样，便能为国家增产更多的粮食。目前我们有一部份师训正在曲阳县陵城人民公社郭家村生产大队就这个专题进行工作，现在已经作云了一些成绩。

例 1:

定理 1: 下面两个线性规划互为对偶

$$(A) \begin{cases} \sum_{j=1}^Y x_{ij} = a_i & (i=1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j & (j=1, 2, \dots, Y) \\ x_{ij} = \sum_{s=m+1}^{m+n} x_{is} & (j=1, 2, \dots, Y) \text{ (守恒方程)} \\ \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^Y b_j \\ x_{ij} \geq 0 & (i=1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n, j=1, 2, \dots, Y) \\ S_A = \sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^Y C_{ij} x_{ij} \text{ 求使 } S_A \text{ 取最大值.} \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} \sum_{j=1}^Y x_{ij} = a_i & (i=1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n) \\ \sum_{i=2}^{m+n} x_{ij} = b_j & (j=1, 2, \dots, Y) \\ \sum_{i=2}^{m+n} a_i = \sum_{j=1}^Y b_j \\ x_{ij} \geq 0 & (i=1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n, j=1, \dots, Y) \\ S_B = \sum_{i=2}^{m+n} \sum_{j=1}^Y C_{ij} x_{ij} + \sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{j=1}^Y (C_{ij} + C_{ij}) x_{ij} \\ \text{求使 } S_B \text{ 取最大值} \end{cases}$$

证: (A) $\Rightarrow$ (B)

$$\{x_{ij} \mid i=1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n, j=1, 2, \dots, Y\}$$

为 (A) 的一组最优解。也即对任意满足 (A) 的约束条件的数组

$\{x_{ij} \mid i=1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n, j=1, 2, \dots, r\}$ 都有

$$\sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^r C_{ij} x_{ij} \leq \sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^r C_{ij} \bar{x}_{ij}$$

根据条件 (a) 得:

$$\sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^r C_{ij} x_{ij} + \sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{j=1}^r (C_{ij} + C_{ij}) x_{ij} \leq$$

$$\sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^r C_{ij} \bar{x}_{ij} + \sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{j=1}^r (C_{ij} + C_{ij}) \bar{x}_{ij} \quad (1)$$

设 $\{x_{ij} \mid i=2, 3, \dots, m+n, j=1, 2, \dots, r\}$ 为满足 (B) 的条件的一组数

$$\text{令 } x_{1j} = \sum_{i=m+1}^{m+n} x_{ij} \quad (j=1, 2, \dots, r)$$

则 $\{x_{ij} \mid i=1, 2, \dots, m+n, j=1, 2, \dots, r\}$ 即为满足 (A) 的条件的一组数。不等式 (1) 说明

$\{\bar{x}_{ij} \mid i=2, 3, \dots, m+n, j=1, 2, \dots, r\}$ 为 (B) 的一组最优解。

(B) $\Rightarrow$ (A)

设 $\{\bar{x}_{ij} \mid i=2, 3, \dots, m, m+1, \dots, m+n, j=1, 2, \dots, r\}$

为 (B) 的一组最优解。也即使任意满足 (B) 的约束条件的数组

$\{x_{ij} \mid i=2, 3, \dots, m, m+1, \dots, m+n, j=1, 2, \dots, r\}$ 都有

$$\sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^r C_{ij} x_{ij} + \sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{j=1}^r (C_{ij} + C_{ij}) x_{ij} \leq$$

$$\sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^r C_{ij} \bar{x}_{ij} + \sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{j=1}^r (C_{ij} + C_{ij}) \bar{x}_{ij}$$

$$\bar{x}_{ij} = \sum_{i=m+1}^{m+n} \bar{x}_{ij} \quad (j=1, 2, \dots, Y) \text{ 显然}$$

$\{\bar{x}_{ij} | i=1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n \quad j=1, 2, \dots, Y\}$ 满足 (A) 的约束条件, 且对任一满足 (A) 的约束条件的故题

$\{x_{ij} | i=1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n \quad j=1, 2, \dots, Y\}$ 都有

$$\sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^Y C_{ij} x_{ij} = \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^Y C_{ij} x_{ij} +$$

$$\sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{j=1}^Y (C_{ij} + \bar{C}_{ij}) x_{ij} \leq \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^Y C_{ij} \bar{x}_{ij} +$$

$$\sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{j=1}^Y (C_{ij} + \bar{C}_{ij}) \bar{x}_{ij} = \sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^Y C_{ij} \bar{x}_{ij} \text{ 故}$$

$$\{\bar{x}_{ij} | i=1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n \quad j=1, 2, \dots, Y\}$$

为 (A) 的一组最优解。定理证毕。

定理 2: 下各两个线性规划互为等价

$$(A) \begin{cases} \sum_{j=1}^Y x_{ij} = a_i \quad (i=1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n) \\ \sum_{i=1}^{m+n} x_{ij} = b_j \quad (j=1, 2, \dots, Y) \\ \sum_{i=1}^{m+n} a_i = \sum_{j=1}^Y b_j \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=m+1}^{m+n} x_{ij} \quad (j=1, 2, \dots, Y) \text{ 称作平衡——(B)} \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n \quad j=1, 2, \dots, Y) \\ S_A = \sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^Y C_{ij} x_{ij} \text{ 求使 } S_A \text{ 取最大值。} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (B_1) \left\{ \begin{aligned}
 &\sum_{j=1}^Y x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\
 &\sum_{i=1}^m x_{ij} = \frac{1}{2} b_j \quad (j = 1, 2, \dots, Y) \\
 &\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^Y \frac{1}{2} b_j \\
 &x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, Y) \\
 &S_{B_1} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^Y C_{ij} x_{ij} \quad \text{求使 } S_{B_1} \text{ 取最大值}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$(B) \left\{ \begin{aligned}
 &\sum_{j=1}^Y x_{ij} = a_i \quad (i = m+1, \dots, m+n) \\
 &\sum_{i=m+1}^{m+n} x_{ij} = \frac{1}{2} b_j \quad (j = 1, 2, \dots, Y) \\
 &\sum_{i=m+1}^{m+n} a_i = \sum_{j=1}^Y \frac{1}{2} b_j \\
 &x_{ij} \geq 0 \quad (i = m+1, \dots, m+n, \quad j = 1, 2, \dots, Y) \\
 &S_{B_2} = \sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{j=1}^Y C_{ij} x_{ij} \quad \text{求使 } S_{B_2} \text{ 取最大值}
 \end{aligned} \right.$$

故: $(A) \Rightarrow (B)$

设 $\{\bar{x}_{ij} \mid i = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n, \quad j = 1, 2, \dots, Y\}$ 为 (A) 的一组最优解, 即对任意满足 (A) 的约束条件的改组

$\{x_{ij} \mid i = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n, \quad j = 1, 2, \dots, Y\}$ 都有

$$\sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^Y C_{ij} x_{ij} \leq \sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^Y C_{ij} \bar{x}_{ij}$$

$$\text{即 } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^Y C_{ij} x_{ij} + \sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{j=1}^Y C_{ij} x_{ij} \leq$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^Y C_{ij} \bar{x}_{ij} + \sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{j=1}^Y C_{ij} \bar{x}_{ij}$$

$$\text{可能 } \left\{ \bar{x}_{ij} \mid i=1, 2, \dots, m \quad j=1, 2, \dots, Y \right\}$$

$$\left\{ \bar{x}_{ij} \mid i=m+1, \dots, m+n \quad j=1, 2, \dots, Y \right\}$$

分别满足 (B_1) (B_2) 的约束条件。

又对任意分别满足 (B_1) (B_2) 的约束条件的收组

$$\left\{ x_{ij} \mid i=1, 2, \dots, m \quad j=1, 2, \dots, Y \right\}$$

$$\left\{ x_{ij} \mid i=m+1, \dots, m+n \quad j=1, 2, \dots, Y \right\}$$

$$\text{都有 } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^Y C_{ij} x_{ij} \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^Y C_{ij} \bar{x}_{ij}$$

$$\sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{j=1}^Y C_{ij} x_{ij} \leq \sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{j=1}^Y C_{ij} \bar{x}_{ij}$$

否则，若存在分别满足 (B_1) (B_2) 的约束条件的收组

$$\left\{ \bar{x}_{ij} \mid i=1, 2, \dots, m \quad j=1, 2, \dots, Y \right\}$$

$$\left\{ \bar{x}_{ij} \mid i=m+1, \dots, m+n \quad j=1, 2, \dots, Y \right\}$$

$$\text{有 } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^Y C_{ij} \bar{x}_{ij} > \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^Y C_{ij} x_{ij}$$

$$\left(\text{或 } \sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{j=1}^Y C_{ij} \bar{x}_{ij} > \sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{j=1}^Y C_{ij} x_{ij} \right) \text{ 则得}$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^Y C_{ij} \bar{x}_{ij} + \sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{j=1}^Y C_{ij} \bar{x}_{ij} > \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^Y C_{ij} x_{ij} + \sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{j=1}^Y C_{ij} x_{ij}$$

$$+ \sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{j=1}^Y C_{ij} \bar{x}_{ij} = \sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^Y C_{ij} \bar{x}_{ij}$$

很容易知由不等式反方的 $\bar{x}_{ij}$ 使 $\bar{x}_{ij}$ 很小的故组满足 (A) 的约束条件，上种不等式实

$$\{\bar{x}_{ij} \mid i=1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n \quad j=1, 2, \dots, Y\} \text{ 为}$$

(A) 的最优解或成矛盾。故 $\{\bar{x}_{ij} \mid i=1, 2, \dots, m \quad j=1, 2, \dots, Y\}$

$$\{\bar{x}_{ij} \mid i=1, 2, m+1, \dots, m+n \quad j=1, \dots, Y\} \text{ 分}$$

别为 (B₁) (B₂) 的最优解。

$$(B) \implies (A)$$

$$\text{故 } \{\bar{x}_{ij} \mid i=1, 2, \dots, m \quad j=1, 2, \dots, Y\}$$

$$\{\bar{x}_{ij} \mid i=m+1, \dots, m+n \quad j=1, 2, \dots, Y\}$$

分别为 (B₁) (B₂) 的最优解，即对任意分别满足 (B₁) (B₂) 的约束条件 $\{\bar{x}_{ij} \mid i=1, 2, \dots, m \quad j=1, 2, \dots, Y\}$

$$\{\bar{x}_{ij} \mid i=m+1, \dots, m+n \quad j=1, 2, \dots, Y\} \text{ 都有}$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^Y C_{ij} \bar{x}_{ij} \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^Y C_{ij} \bar{x}_{ij}$$

$$\sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{j=1}^Y C_{ij} \bar{x}_{ij} \leq \sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{j=1}^Y C_{ij} \bar{x}_{ij} \text{ 易知}$$

$$\{\bar{x}_{ij} \mid i=1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n \quad j=1, 2, \dots, Y\}$$

满足 (A) 的约束条件而由使 (A) 的约束条件的最优

$$\{x_{ij} \mid i=1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n \quad j=1, 2, \dots, r\}$$

可构成满足 $(B_1)(B_2)$ 约束条件的两个数组，故

$$\sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^r C_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r C_{ij} x_{ij} +$$

$$\sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{j=1}^r C_{ij} x_{ij} \leq \sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^r C_{ij} \bar{x}_{ij} +$$

$$\sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{j=1}^r C_{ij} \bar{x}_{ij} = \sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^r C_{ij} \bar{x}_{ij}$$

由此得：

$$\{x_{ij} \mid i=1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n \quad j=1, 2, \dots, r\}$$

为 (A) 的最优解。定理证毕。