

內 部

“748”会议资料选编

二、计 算 数 学

“七四八”会议秘书处

一九七五年三月

说 明

在批林批孔运动普及、深入、持久发展的大好革命形势下，经国务院、中央军委批准，中国科学院、四机部，国防科委于一九七四年九月二日至十八日，在北京召开了“电子计算机技术经验交流会”（代号为“748会议”）。

根据到会同志的要求和会议领导小组决定，现将十个专业组（总体运控、计算数学、程序系统、内存贮器、结构工艺、外部设备、电源、元器件、模拟计算机、工业控制和数据处理，的技术资料，分别整理选编成册，供参考。如有错误和不妥之处，希批评指正。

“748”会议秘书处

目 录

论计算数学中的一些进展	(1)
关于薄板弯曲问题的混含有限元刚度法	(19)
应用高精度三角形曲壳元素分析任意形壳体	(31)
有限单元法动力分析	(47)
轴对称热应力问题的算法和程序	(59)
有限单元法在分析复杂岩基上的混凝土重力坝结构应力计算中的 应用	(83)
按有限元法进行三维连续体应力分析	(91)
用变分法求解三维弹性问题的有限体法	(102)
一阶偏微分方程组有限元理论及应用	(115)
寻找最优控制的数值方法	(130)
最优化方法及其应用	(154)
关于广义逆方法解非线性方程组	(162)
样条函数与 δ 函数逼近的若干问题	(168)
船体数学放样回弹法	(186)
机翼理论外形计算	(207)
二元函数作图	(213)
柱形爆作波及其反射的计算	(221)
土中一维粘塑性应力波数值计算	(236)
麦克斯韦方程的一个差分解法	(246)
关于常微分方程的自动积分问题	(261)
病态线性代数方程的一种叠代解法	(275)
共轭蒙特卡罗方法在人造阈探测器计算中的应用	(285)
一个简化的自适应的卡尔曼滤波器	(296)
适应性滤波	(304)

论计算数学中的一些进展

样 条 函 数

函数的插值和逼近是数值方法的基本环节之一。在生产实践的推动下，近年来面貌有很大变化，发展了所谓样条函数和相应的插值和拟合方法。

设在平面上给了 $N+1$ 个“样点” $(x_0, y_0), \dots, (x_N, y_N)$ ，可以构造一个 N 次多项式曲线

$$y = P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_N x^N$$

通过这些样点

$$P(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

为此只需取

$$P(x) = \sum_{i=0}^N y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

这就是熟知的 N 次多项式插值法。一个比较不熟知的反面是这种插值方法当 N 稍大——例如 $N > 6, 7$ ——后是很不可靠的。图1中给出了十个样点“·”，虚线表示由此产生的九次多项式插值曲线，在左右两端出现大幅度的波动扭拐，显然是不合理的。更有甚者，取已知函数

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

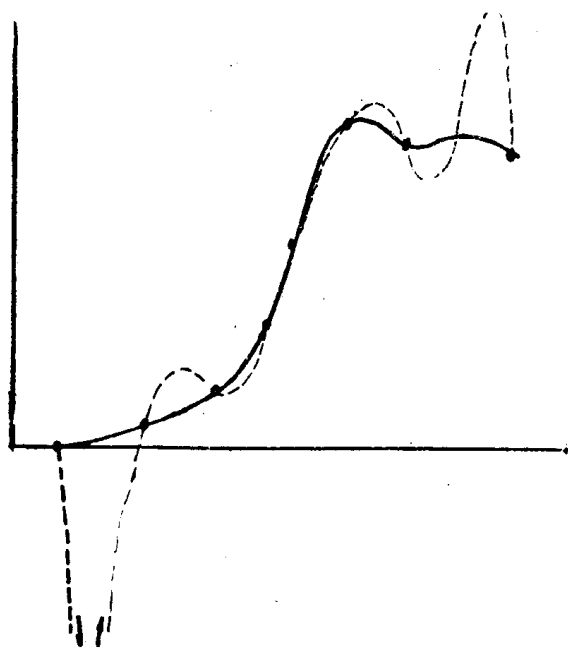


图 1

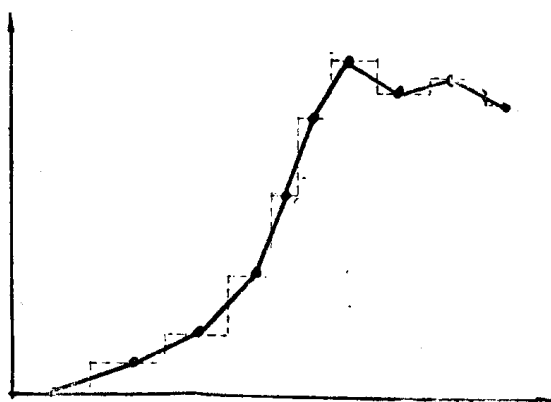


图 2

在区间 $[-5, 5]$ 上作等距 (节点为 $x_0 = -1, x_1, \dots, x_N = 5$) N 次插值, 记为 $f_N(x)$ 。可以证明, 当 $N \rightarrow \infty$ 时在子区间 $[-3.65, 3.65]$ 上 $f_N(x) \rightarrow f(x)$, 但在子区间 $[-5, -3.63]$ 和 $[3.63, 5]$ 上则偏差 $f_N(x) - f(x)$ 发散到 $\pm \infty$ 。此外, 当样点稍稍挪动后, 插值曲线会有大幅度的变化, 这是高次插值不稳定性的表现。

多项式是一种最简单的解析函数。解析函数的特点是无穷光滑并且具有所谓解析可延拓性, 即函数在局部小范围 (不论多小) 的行为可以完全决定全局大范围内的行为。这一特点使得解析函数成为数学分析中的一种有力工具。但是, 也正是这一特点带来了解析函数在数值计算上的困难。可以证明, 解析延拓是不稳定的, 因此, 解析函数不便于数值计算。高次多项式插值的实际困难即源于此。

实践上人们是用相当简单的办法来解决问题的, 即采用分段低次的插值方法。首先, 可以采用分段常数 (0 次) 的插值得出阶梯状的插值曲线, 虽然它是间断的, 但当样点加密时显然拟合得愈来愈好。当要求作连续的插值曲线时, 可以采用分段线性 (一次) 即折线状插值, 这时函数连续, 一阶导数间断。图 2 表示以图 1 的十个样点为基础的阶梯状及折线状插值, 尽管比较“粗糙”, 显然都要比图 1 中的九次插值为合理得多。事实上园井可用方砖砌出, 弯板可用直锯锯出, 劳动人民自古以来就已掌握运用这一原理。

在实践上, 由于生产上的需要, 常常要求构成更为光顺的插值曲线。例如船体、车型的放样, 要求具有“流线型”, 例如要求曲率——相当于二阶导数——的连续性以便有较好的力学效果。为此目的, 工人师傅运用样条 (木质或钢质的弹性条), 用压铁把样条压住在样点上, 必要时调整其位置, 结果样条自动弯成一条通过样点的光顺曲线。——是一种“物理”的插值方法。

样条可以看成弹性梁, 当变形不大时, 梁的弹性位移满足平衡方程

$$y^{(4)}(x) = \sum g_i \delta(x - x_i)$$

$\delta(x - x_i)$ 表示集中于点 $x = x_i$ 的 δ 函数, $g_i \delta(x - x_i)$ 为作用于节点 x_i 的等效集中力。在两个相邻节点之间 $x_i < x < x_{i+1}$, 梁不受载荷, 因此 $y^{(4)}(x) \equiv 0$, 因此 $y(x)$ 各节点之间是分段三次多项式。对于 δ 函数 $\delta(x - x_i)$ 积分一次成为阶梯函数, 在 x_i 处有间断; 积分两次后处处连续, 再积分两次得到 $y(x)$, 二阶导数连续。因此样条曲线是具有二阶连续导数的分段三次多项式。显然可按这一原则从数学上来模拟这种样条插值。在子区间 $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\dots$, $[x_{N-1}, x_N]$ 分别构造三次多项式, 每段要定 4 个待定系数, 共有 N 段即 $4N$ 个待定系数。要求在交接点 $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ 处 f, f', f'' 都连续, 得到 $3(N-1)$ 个条件, 还要求通过样点 $(x_0, y_0), \dots, (x_N, y_N)$, 即 $f_0 = y_0, \dots, f_N = y_N$ 共有 $3(N-1) + N - 1 = 4N - 2$ 个条件, 还缺两个条件。通常增补两个边界条件, 例如要求两端的曲率为 0 即 $f''_0 = 0, f''_N = 0$ 。或者规定两端的斜率为已知, 例如 $f'_0 = y'_0, f'_N = y'_N$ 。这样可以列出 $4N$ 个代数方程以解出 $4N$ 个待定系数。这就是所谓数学的样条插值。

根据最小势能原理, 样条在通过样点的约束下达成弹性平衡时应变能即曲率平方的积分 $\int_{x_0}^{x_N} k^2 dx$ 达到极小, 曲率 $K = \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}} \approx f''$ (在小变形时)。因此样条曲线是在所有通过样点的曲线中曲率均方积分为最小, 因此在一定意义下可以说是最光顺的插值曲线, 可以消除或减少“多余”的扭拐。图 1 中的实线表示通过十个样点的样条插值, 显然达到了光顺插值的目的。

通常称具有 $P-1$ 阶连续导数而分段 P 次多项式为 P 次样条函数。上面所说的样条插值是三

次样条，而台阶函数及折线函数分别是 0 次及一次样条。一次样条的物理模型是以弹性弦代替上面所说的弹性梁。通过样点的紧张的弹性弦在小变形时满足平衡方程

$$y''(x) = \sum q_i \delta(x - x_i)$$

也等价于使应变能 $\int_{x_0}^{x_N} y'^2 dx$ 达到极小，这就是通过样点的折线。裁缝师付用粉袋弹线、木匠师付用墨斗墨绳来进行放样就是运用这个道理。

样条函数与普通多项式的差别主要在于容许导数有间断。正是这种间断性降低或切断了各区段间的相互影响从而带来了转折自如的灵活性和计算的稳定性。当样条的“次数”提高时，光滑度随之升高，但伴以灵活和稳定性的递降。普通的多项式是具有最高光滑度的解析函数，它要求一切阶的导数都连续，这事实上是非常严峻的约束，从而就失去了灵活性和稳定性。在计算实践上通常样条次数都 ≤ 3 。三次样条已经是“足够”光滑的了，因为肉眼很难察觉二阶以上导数的间断性。

数学上最简单的样条有如

$$0 \text{ 次: } \omega_0(x) = \text{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ +1, & x > 0. \end{cases}$$

$$1 \text{ 次: } \omega_1(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ +x, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$2 \text{ 次: } \omega_2(x) = x^2 \text{sign} x = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0, \\ +x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$3 \text{ 次: } \omega_3(x) = |x|^3 = \begin{cases} -x^3, & x \leq 0, \\ +x^3, & x \geq 0. \end{cases}$$

一般地

$$P \text{ 次: } \omega_p(x) = x^p \text{sign} x = \begin{cases} -x^p, & x \leq 0, \\ +x^p, & x \geq 0. \end{cases} \\ = |x|^p, \text{ 当 } p \text{ 为奇数.}$$

这相当于把 x^p 在负半轴上反号，从而引起 $p-1$ 阶导数在原点 $x=0$ 有间断，因此是 p 次样条。见图 3。对上列函数 $\omega_p(x)$ 作 $p+1$ 阶差分 $\Delta^{p+1}\omega_p(x)$ 还是 p 次样条。这里一阶差分 Δ 定义为

$$\Delta \varphi(x) = \varphi\left(x + \frac{1}{2}\right) - \varphi\left(x - \frac{1}{2}\right),$$

二阶差分 $\Delta^2, \dots, \Delta^{p+1}$ 等则递推为

$$\Delta^2 \varphi(x) = \Delta(\Delta \varphi(x)) = \varphi(x+1) - 2\varphi(x) + \varphi(x-1),$$

$$\Delta^3 \varphi(x) = \Delta(\Delta^2 \varphi(x)) = \varphi\left(x + \frac{3}{2}\right) - 3\varphi\left(x + \frac{1}{2}\right) + 3\varphi\left(x - \frac{1}{2}\right) - \varphi\left(x - \frac{3}{2}\right),$$

$$\Delta^4 \varphi(x) = \Delta(\Delta^3 \varphi(x)) = \varphi(x+2) - \varphi(x+1) + 6\varphi(x) - 4\varphi(x-1) + \varphi(x-2),$$

$$\Delta^{p+1} \varphi(x) = \Delta(\Delta^p \varphi(x)),$$

于是得另一系列的样条

$$\begin{aligned}
0 \text{ 次: } \Omega_0(x) &= \frac{1}{2} \Delta \omega_0(x) = \begin{cases} 0, & \frac{1}{2} < |x|, \\ 1, & |x| \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \\
\text{一次: } \Omega_1(x) &= \frac{1}{2} \Delta^2 \omega_1(x) = \begin{cases} 0, & 1 \leq |x|, \\ 1 - |x|, & |x| \leq 1. \end{cases} \\
\text{二次: } \Omega_2(x) &= \frac{1}{2} \Delta^3 \omega_2(x) = \begin{cases} 0, & \frac{3}{2} \leq |x|, \\ (\frac{3}{2} - |x|)^2, & \frac{1}{2} \leq |x| \leq \frac{3}{2}, \\ \frac{3}{2} - 2x^2, & |x| \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \\
\text{三次: } \Omega_3(x) &= \frac{1}{2} \Delta^4 \omega_3(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 2, \\ (2 - |x|)^3, & 1 \leq |x| \leq 2, \\ (2 - |x|)^3 - 4(1 - |x|)^3, & |x| \leq 1. \end{cases} \\
P \text{ 次: } \Omega_p(x) &= \frac{1}{2} \Delta^{p+1} \omega_p(x).
\end{aligned}$$

如图 4. Ω_p 为 p 次样条。当 p 为偶数时以半整点 $x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$ 为节点，当 p 为奇数时以整数点 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 为节点。 Ω_p 的主要特点在于“紧凑性”，它在有限的区

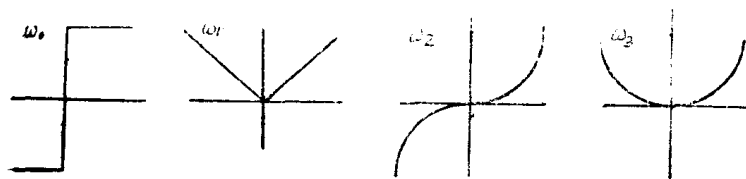


图 3

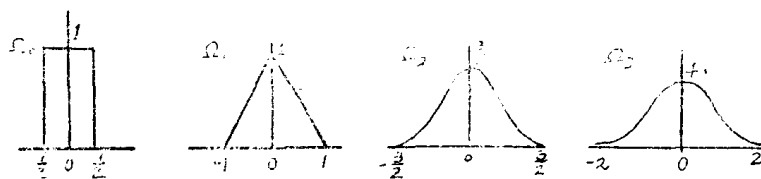


图 4

间 $\left[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right]$ 以外恒为 0，在此区间之内则为中有高峰的山丘形，不妨称之为山丘形样条，

图 4. 它们可以作为样条函数的“基”可以证明：当 p 为奇数（偶数）时，任何以整点 $x = 0, \pm 1, \dots$ （半整点 $x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$ ）为节点的 p 次样条 $f(x)$ 可以表为 $\Omega_p(x)$ 及其平移 $\Omega_p(x+1), \Omega_p(x+2), \dots, \Omega_p(x-1), \Omega_p(x-2), \dots$ 的线性组合。

$$f(x) = \sum_k a_k \Omega_p(x-k)$$

山丘形样条 Ω_p ，由于其紧凑性，有计算稳定的优点，即误差不扩散，不放大，特别适合于数值计算的目的。至于样条 $\omega_p(x)$ 虽然同样也可以作为样条函数的基，但有计算不稳定的缺点，不宜采用。看来山丘形样条如 $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \dots$ 有资格如同多项式，三角函数，指数函数等一样加入所谓“初等函数”之列。

样条函数对于最小二乘法的数据拟合问题也有重要意义，对于数据量很大的问题，例如有 M 个样点 $(x_1, y_1), \dots, (x_M, y_M)$ ，按照最小二乘法，适当选取 N 个基函数 $\varphi_0(x), \dots, \varphi_N(x)$ ，

要求定 N 个参数 $a_0, \dots, a_N$ 使得函数

$$P(x) = \sum_{i=0}^N a_i \varphi_i(x)$$

在点 $x_1, \dots, x_M$ 的值与 $y_1, \dots, y_M$ 的偏差平方和

$$E = \sum_{k=1}^M (P(x_k) - y_k)^2 = \sum_{k=1}^M \left(\sum_{i=0}^N a_i \varphi_i(x_k) - y_k \right)^2 = \text{极小},$$

因此参数 $a_0, \dots, a_N$ 满足所谓法方程组

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0, \quad i=0, \dots, N$$

即

$$\sum_{j=0}^N c_{ij} a_j = b_i, \quad i=0, \dots, N; \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^M \varphi_i(x_k) \varphi_j(x_k), \quad b_i = \sum_{k=1}^M \varphi_i(x_k) y_k,$$

通常 $M \ll N$, N 称为问题的自由数。如取 P 为多项式即 $P(X) = a_0 + a_1 x + \dots + a_N x^N$ 即相当于取 $1, x, \dots, x^N$ 为基, 则与插值问题相类似, 当 N 稍大时也会遇到严重的困难。这时法方程组是高度病态的。方程组的病态通常可用系数矩阵 $C = [c_{ij}]$ 的“性态数”即最大与最小本征值的比值

$$\rho = \lambda_{\max} / \lambda_{\min}$$

来恒量, ρ 值愈大, 病态愈甚, 方程愈“难解”。在多项式的情况即以 $1, X, \dots, X^N$ 为基时 $\rho \approx e^{3N}$, 随 N 作指数状增长。事实上, 当取 $N=10$ 时, 在40位字长的机器上用消去法解算时有效数字可以丢失殆尽。实践上“多自由度”的, 即要求 N 较大。样条函数基本上解决了这一个困难。当取样条

$$\psi_p(x), \psi_p(x-1), \dots, \psi_p(x-N)$$

为基时, $\rho = O(N^{2p+2})$, 虽比多项式的情况大有改进, 但还是相当病态的。当取紧凑的山丘形样条

$$\Omega_p(x), \Omega_p(x-1), \dots, \Omega_p(x-N)$$

为基时(固定 p , 实践上可取 $p=2, 3$)则 $\rho = O(1)$, 与 N 无关! 这时法方程组是良态的, 系数阵为带状, 对角线占优势。这就提供解决“多自由度”最小二乘问题的一种简便而稳定的方法。

样条的基本思想是很简单的。无非是把多项式分段化, 使得整个函数成为“装配式”的, 同时保证接缝处一定的连续性。它既保留了多项式在表达形式上的简便性又克服了它们不灵活、不稳定的缺点, 适合于数值实践的需要如前所述, 样条的基本思想是劳动人民自古以来在生产实践中所运用的, 其理论上的初步总结则始于四十年代(1), 而其大发展则是近年来的事(2), 主要是造船, 汽车, 飞机工业生产中广泛应用计算机所推动的, 所谓数学放样已是一项革新技术, 在国内, 文化大革命以来, 总结了工人阶级在生产实践中的丰富经验, 也独立摸索发展了样条插值拟合的方法。样条函数可用于一切有关曲线、曲面的产生、显示、插值、拟合的问题。在实验数据的拟合问题也有重要意义。例如近年根据卫星轨道信号的某些不规则性推断了月球质量集中现象。其中一个重要因素在于应用三次样条成功地拟合了长序列的观测数据。样条的思想对数值积分和微分, 微分方程的数值解, 特别是有限元方法也有显著影响, 而且是相互促进的。与此同时, 样条逼近已经形成函数逼近理论的一个新方面。

参 考 文 献

- [1] Schoenbelrg, I. J., Quart. Appl. Math., 4 (1949) 45, 112.
 [2] Ahlberg, J. H., et al, Theory of Splines and their Applications, N. Y. 19 67.

有 限 元 方 法

工程技术和力学、物理的许多领域内的定常态或平衡态问题都归结为椭圆方程的问题。例如弹性结构平衡态的应力分析，定常热传导，亚声速定常流，电、磁、引力场等等归结为边值问题，弹性体以及电磁场的振动问题等则归结为本征值问题。这类问题的数值解法近年来有了重大的革新，这就是所谓有限元方法。

椭圆方程的一类通用解法是差分法，以波瓦松方程第一类边值问题为例

$$\begin{cases} \Omega: \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f, & \Omega = \{1 < x, y < 1\} \\ \Gamma: u = 0, \end{cases} \quad (1)$$

取方形格网，有熟知的五点差分方程：

$$-\frac{1}{h} \left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} \right) = f_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, N-1,$$

$$u_{i,0} = u_{i,N} = u_{0,j} = u_{N,j} = 0$$

实践上待解的问题在定解区域、边界条件、方程形式和系数等方面可以有种种复杂化，例如

1. 区域 Ω 由规则形状变为不规则的。
2. 边界条件由第一类变为第二，三类，或兼而有之，例如

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma'_0, \quad \Gamma_0: u = \bar{u}, \quad \Gamma'_0: \beta \frac{\partial u}{\partial n} + \eta u = g. \quad (2)$$

3. 方程系数由常系数改为变系数，如

$$\Omega: - \left(\frac{\partial}{\partial x} \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f \quad (3)$$

$\beta = \beta(x, y) > 0$ 。实践上还常遇介质系数 β 有间断性即所谓非均匀或组合介质的问题：

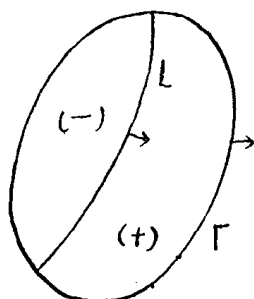


图 5

$$L: \beta^- \neq \beta^+$$

这时在交界线 L 上还需增补一个所谓接触条件

$$L: \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^- = \left(\beta \frac{\partial u}{\partial n} \right)^+ \quad (4)$$

差分方法在原则上可以推广到所有这些情况。但是，随着条件的复杂化，需要作出种种特殊处理，会显得很繁琐，不容易实现算法的标准化，收敛性也不容易得到保证。

椭圆问题另一类传统解法是所谓能量法即李兹—加辽金法。众所熟知，一般椭圆方程都有适当的变分原理即能量极小原理与之等价。例如如边值问题 (3)，(4)，(2) 等价于变分问题

$$\begin{cases} J(u) = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - fu \right\} dx dy + \int_{\Gamma_0^1} \left[\frac{1}{2} Nu^2 - \eta u \right] ds = \text{极小}, \\ \Gamma_0: u = \bar{u} \end{cases} \quad (5)$$

这就是说, 在条件 $\Gamma_0: u = \bar{u}$ 之下使得“能量”积分 $J(u)$ 达到极小的函数即极值函数 u 必定满足微分方程 (3) 和边界条件包括交界条件 (2), (4)。反之亦然。因此, 为了解决边值问题, 可以直接去解等价的能量极值问题, 这就是能量法的出发点。

注意在微分方程 (3) 出现二阶导数, 而在能量积分 (5) 中只有一阶导数。在边值问题中含有法导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 的第二、三类边界条件的交界条件都必须作为定解条件列出, 但在变分问题中则无须作为定解条件列出而是在能量达到极值时自动被满足; 这类条件叫做自然边界条件。相反地, 第一类边界条件 (如果有的话) 则在变分问题和在边值问题中一样, 必须作为定解条件列出, 这类条件叫做强加边界条件, 通常高阶导数的数值处理总比低阶导数困难, 特别是合法导数的自然边界条件, 因此从变分原理出发, 由于它可以不列自然边界条件, 是有潜在的优越性的。

极值问题 (5) 的解有在所有满足强加于 Γ^0 的边界条件的函数类 S 中去找。函数类 S 具有无穷多自由度。在数值解时需要进行离散化, 把无穷多自由度的极值问题退化为有限多自由度的极值问题, 即在 S 的某个只有有限多自由度的函数类 S' ($S' \subset S$) 中去找极值函数。在传统的李兹加辽金法中通常取 S' 为由有限多个多项式。三角函数, 指数函数——一般都是解析函数一所生成

$$S' = \left\{ \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_N(x, y) \right\}, \quad u \approx \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i$$

于是问题 (5) 退化为为

$$\begin{aligned} J(u) = & \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left\{ \left[\beta \left(\frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i \right)^2 + \beta \left(\frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i \right)^2 \right] - f \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i \right\} dx dy \\ & + \int_{\Gamma_0^1} \left[\frac{1}{2} \eta \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i \right)^2 - g \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i \right] ds = J(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \text{极小} \end{aligned} \quad (6)$$

Γ_0^1

不难验证 $J = J(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ 为 $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ 的二次函数

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \alpha_i \alpha_j - \sum_{i=1}^N b_i \alpha_i,$$

这里 a_{ij}, b_i 表为“基函数” $\varphi_1 \dots \varphi_N$ 及其导数乘以 β, η, f, g 等等的积分, 可以证明矩阵 $A = (a_{ij})$ 必定是对称正定的。根据微积分中的极值原理, 问题归结于 $\frac{\partial}{\partial \alpha_i} J(\alpha_1 \dots \alpha_N) = 0, i = 1 \dots N$, 即相当于解线代数方程组

$$\sum_{i=1}^N a_{ij} \alpha_j = b_i, \quad i = 1 \dots N$$

在有些情况, 从问题的特出发, 往往可以只取少数几个“基函数”就能得到相当精确的解。

传统方法中基函数都是在解析函数中去选取, 由于解析函数在数值计算上的不灵活性和不稳定性, 要使它满足给定的强加边界条件以及适应于比较复杂的几何、物理条件是相当困难的, 变分原理在处理自然边界条件方面的优点并不能得到体现。正由于这些原因, 在计算机出现后, 能量法在相应程度上被比较灵活通用的差分法所代替的

有限元法是能量法与差分法的一种相当成功的结合。它和能量法一样, 从变分原理出发。它又和差分法相似, 把定解区域剖分为格偏, 分解为原则上为任意形状的点、线、面、体单元, 而取于函数类 S' 为剖分基础上的分片低次插值函数类即样条式的装配式的函数类, 这样就比差分法有更大的灵活性和适应性, 并能实现变分原理在边界条件方面的优点。最通用最简单的是采用三角剖分和相应的分片线性插值, 把 Ω 分解为

点元: $A_1 \dots A_{N_0}$

线元: $B_1 \dots B_{N_1}$

面元: $C_1 \dots C_{N_2}$

每个线元 B 以两个点元为顶点, 每个三角面元 C 以三个点元为顶点三个线元为边界。将未知函数 $u(x, y)$ 代以它在节点 $A_1 \dots A_{N_0}$ 的值 $U_1 \dots U_{N_0}$ 所产生的分片 (按单元) 线性插值函数,

$$J(u) = \sum_{C_i} \int \left\{ \frac{1}{2} \left[\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - f u \right\} dx dy + \sum_{B_i} \int \left[\frac{1}{2} \eta u^2 - g u \right] dS$$

在每个面元 $C = (A_1, A_2, A_3)$ 上 $u(x, y)$ 为由 u_1, u_2, u_3 产生的线性函数, 从而能量积分就成为 u_1, u_2, u_3 的二次函数

$$\iint_C \left\{ \dots \right\} dx dy = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}^{(C)} u_i u_j - \sum_{i=1}^3 b_i^{(C)} u_i$$

右端系数可以根据顶点坐标和单元上 β, f 的值按统一的方式算出。对于线元 $B = (A_1, A_2)$ 也类似

$$\int_B \left[\dots \right] dS = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^{(B)} u_i u_j - \sum_{i=1}^2 b_i^{(B)} u_i$$

对一切单元照此处理并累加即得

$$J(u) \approx J(u_1 \dots u_{N_0}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N_0} a_{ij} u_i u_j - \sum_{i=1}^{N_0} b_i u_i$$

只要给了剖分的各点、线、面元的交接关系, 右端系数 a_{ij}, b_i 的累加其可以按统一的方式进行。

设第一类边界条件段 Γ_0 由节点 $A_{N+1}, A_{N+2} \dots A_{N_0}$ 组成, 其上的 u 取已知值 $\bar{u}$;

$$u_{N+1} = \bar{u}_{N+1}, \dots, u_{N_0} = \bar{u}_{N_0}$$

于是问题 (6) 变为二次函数 $J(u_1 \dots u_{N_0})$ 在上列条件下的极小问题, 即二次函数 $J(u, \dots u_N, \bar{u}_{N+1} \dots \bar{u}_{N_0})$ 相对于变元 $u_1 \dots u_N$ 的极小问题, 这就相当于

$$\frac{\partial}{\partial u_i} J(u_1, \dots u_N, \bar{u}_{N+1}, \dots \bar{u}_{N_0}) = 0, \quad i = 1 \dots N$$

即求解下列线表数方程组

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} u_j = b'_i = b - \sum_{j=N+1}^{N_0} a_{ij} \bar{u}_j, \quad i = 1, \dots, N,$$

这里系数阵 $A = (a_{ij})$ 在力学问题中叫做刚度矩阵——一定是对称正定的, 同于一般

的能量法，而在差分方法中不一定能保配这一点。矩阵A同时又是稀疏的，即 a_{ij} 中绝大多数为0，同于一般的差分法，而在传统的能量法中则不然。系数矩阵的对称正定性和稀疏性是执行解算的有利条件。

概括地说，相对于传统的能量法和差分法而言，有限元法是取长补短在更高的水平上统一起来，它吸取和发展了差分方法的灵活性，并使能量原理的潜在优点得到充分发挥。比较顺利地解决了历来数值方法的难点，对于几何上、物理上比较复杂的问题——“真实”的问题”往往是如此——特别适宜。有限元方法从本质上说是初等的，很容易掌握。由于变分原理与剖分插值相结合的结果，使得有限元法在理论上也相当简单，能在广泛的情况下证明其收敛性，从而保证实用上是可靠的；这一点也是很突出的。

有限元法对于偏微分方程数值解的程序自动化提供了一个样板。有限元算法的各个环节例如单元分析，总体合成，代数解等等都是便于标准化的，解题人只须提供最低限度的有关单元剖分的坐标及系数讯息，其后全过程可由程序自动执行直至输出结果包括图形显示。这样可以大大缩短解题周期，实践意义很大。

有限元法的要点最早曾在四十年代提出〔1〕。其后，主要是到了六十年代，在国内外，在不同实践基础上，通过不同的途径各自独立地形成和发展了当前所谓的有限元法及其相应的理论〔2—7〕。它的有效性已在大量的实践中证实，目前在弹性结构的领域内已广泛应用。由于方法是通用的，对于众多领域例如传热，定常流体，电磁场等方面的椭圆问题也是适应的。方法的主导思想也可应用于不定常粘性流以及各类迂运问题（波尔兹曼方程）。各项发展推广工作正在广泛地进行。

参 考 文 献

- 〔1〕 Courant, R., Bull. Amer. Math. Soc., 49 (1943), 1.
- 〔2〕 Clough, R.W., Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, 1960.
- 〔3〕 冯康，应用数学与计算数学2:3 (1965) 238—262.
- 〔4〕 黄鸣慈，王萃贤，崔俊芝，赵静芳，林宗楷，应用数学与计算数学3:1 (1966) 54—60.
- 〔5〕 Friedrichs, K.O., Keller, H.B., Numerical Solution of partial Differential Equations (ed. J.H. Bramble) 1—9, N.Y. 1966.
- 〔6〕 齐基茨茨一邱，结构和连续力学中的有限单元体法，国防工业出版社，1973.
- 〔7〕 Strang, H., Fix G., An Analysis of Finite Element Method, N.Y. 1973.

快 速 付 氏 变 换

谐波分析即付立叶方法是研究振动和波动现象的有效而通用的数学工具。它的要点在于：任意波形总能进行谱分解，即表示为不同频率，不同振幅的简谐波的线性叠加。它有三种主要形式。

一、付氏级数——对于周期函数 $f(t) \equiv f(t+T)$ ：

$$\text{正变换 (分)} : c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2\pi i k t / T} dt, k=0, \pm 1, \dots$$

$$\text{反变换 (合)} : f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{-2\pi i k t / T}$$

二、付氏积分——对于任意函数 $f(t)$, $-\infty < t < \infty$

$$\text{正: } F(S) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i S t} dt, \quad -\infty < S < \infty,$$

$$\text{反: } f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(S) e^{2\pi i S t} dS, \quad -\infty < t < \infty,$$

三、离散付氏变换——对于等距离散数据 $(f_0, \dots, f_{N-1})$

$$\text{正: } F_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f_j W_N^{-jk}, \quad k=0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{反: } f_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} F_k W_N^{jk}, \quad j=0, 1, \dots, N-1$$

此处 $W_N = e^{2\pi i / N}$

它们都是在“时间域”与“频率域”之间建立一定的交换关系,在付氏级数及积分是解析的关系,在离散付氏变换则是代数的关系。在付氏级数,时间域连续,频率域离散;在付氏积分两者都是连续的 $-\infty < t, S < \infty$,正反变换作对称的形式。对付氏级数或积分进行离散化数值计算时都归结为有限个点上的有限付氏级数即离散付氏变换。

离散付氏变换是把向量 $f = (f_0, \dots, f_{N-1})$ 变为 $F = (F_0, \dots, F_{N-1})$ 的一种线性变换 $F_k = \sum a_{kj} f_j$ 从形式上看,从 N 元向量 f 出发,计算 F 的每个分量要 N 个运算单位——这里一个运算单位指的是一个复数乘法和一个复数加法,因此计算 F 的全部 N 个分量的工作量为 N^2 ,这就是一般地用 N 阶矩阵乘以 N 阶向量的工作量。但是这里的系数矩阵(略去非本质的规范因子 $\frac{1}{\sqrt{N}}$ 取特殊的形式 $a_{kj} = W_N^{-jk}$, W_N 为1的 N 次原根, W_N 的一次都是模量为1的复数并且具有周期性

$$W_N^{l+N} \equiv W_N^l, \quad l=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

N^2 个系数 W_N^{jk} 中只含有 N 个不同的数 $W_N^0, W_N^1, \dots, W_N^{N-1}$ 利用系数的这种特殊性是有可能把工作量减少,甚至大大减少的。所谓快速付氏变换(FFT)是指计算离散付氏变换的快速算法,把工作量从 N^2 缩减至 $N \log_2 N$ 。现以 $N=2^3=8$ 为例说明之。

已知 $(f_0, f_1, \dots, f_7)$ 要算 $(F_0, F_1, \dots, F_7)$

$$F_k = \sum_{j=0}^7 W^{-jk} f_j, \quad W = W_8 = e^{2\pi i / 8}$$

把下标表为二进制

$$j = (j_2, j_1, j_0) = j_2 \cdot 2^2 + j_1 \cdot 2^1 + j_0 \cdot 2^0, \quad j_0, j_1, j_2 = 0, 1$$

$$k = (k_2, k_1, k_0) = \dots$$

由于周期性,不难验证

$$W^{-jk} = W^{-j_2 \cdot (k_0, 0, 0)} \cdot W^{-j_1 \cdot (k_1, k_0, 0)} \cdot W^{-j_0 \cdot (k_2, k_1, k_0)},$$

于是

$$F_k = F(k_2, k_1, k_0) = \sum_{j=0}^7 f_j W^{-jk} = \sum_{j_0=0}^1 \left(\sum_{j_1=0}^1 \left(\sum_{j_2=0}^1 f(j_0, j_1, j_2) W^{-j_2 \cdot (k_0, 0, 0)} \right) \right)$$

$$\cdot W^{-j_1 \cdot (k_1, k_0, 0)} W^{-j_0 \cdot (k_2, k_1, k_0)}$$

将下标适当改写后即得三段递推公式

$$f^{(0)}(k_2, k_1, k_0) = f(k_2, k_1, k_0) = f_k,$$

$$f^{(1)}(k_2, k_1, k_0) = f^{(0)}(0, k_1, k_0) + f^{(0)}(1, k_1, k_0) W^{(k_2, 0, 0)}$$

$$f^{(2)}(k_2, k_1, k_0) = f^{(1)}(k_2, 0, k_0) + f^{(1)}(k_2, 1, k_0) W^{(k_1, k_2, 0)},$$

$$f^{(3)}(k_2, k_1, k_0) = f^{(2)}(k_2, k_1, 0) + f^{(2)}(k_2, k_1, 1) W^{(k_0, k_1, k_2)},$$

$$F_k = F(k_2, k_1, k_0) = f^{(3)}(k_0, k_1, k_2), k_0, k_1, k_2 = 0, 1$$

相当于把变换 $f \rightarrow F$ 分为三级变换，每一级上 $f^{(i)} \rightarrow f^{(i+1)}$ 每个分量的产生只要一个复数乘法，故每级工作量为 N ，共有三级 $3 = \log_2 8$ ，因此总工作量为 $8 \cdot 3 = N \cdot \log_2 N$ 。这一方法显然可以推广到任意的 $N = 2^m$ 。对于其它的 N 也有快速算法，但是最简便、高率、常用是取 N 为 2 的整幂。由于实践上对 N 的选用有一定的主动权，这并不构成严重的限制，必要时可对数据进行截尾或补零。

快速算法比传统算法提高工效 $N^2 / N \log_2 N = N / \log_2 N$ 倍。当 N 很大时这是巨量的提高。例如 $N = 2^4 = 16$ ，提高 4 倍； $N = 2^{10} = 1000$ ，提高 100 倍； $N = 2^{20} \approx 10^6$ （一百万），提高五万倍！实践上，例如干涉光谱数据长度 N 确可达到近百万的量级。对于二维付氏变换

$$F_{p,q} = \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} f_{jk} W^{-(jp+kq)}, p, q = 0, \dots, M-1$$

相当于 $N = M^2$ ，慢速算法提高工效 $N / \log_2 N = M^2 / 2M$ 。更是突出。例如用付氏变换于卫星摄影相卡作强化处理，对于 10 厘米见方的底片按间距 1 微米分线时， $M = 10^4$ ， $N = M^2 = 10^8$ （一亿），传统算法工作量为 $N^2 = 10^{16}$ （一亿亿），在每秒百万次量级的机器上要算三个世纪，用快速算法则工作量 $N \log_2 N \sim 3 \times 10^9$ ，一小时内可以解决！

离散付氏变换可以用来解微分方程，主要是对于常系数、规则区域。例如矩形格网上的波瓦松方程的差分格式

$$4u_{jk} - (u_{j-1,k} + u_{j+1,k} + u_{j,k+1} + u_{j,k-1}) = \frac{1}{N^2} f_{jk},$$

$$u_{j,0} = u_{j,N} = u_{N,k} = 0, \quad j, k = 1, \dots, N-1.$$

对两端作正弦变换——付氏变换的一种特殊形式—— $f_{jk} \sim F_{p,q}$

$u_{j,k} \sim U_{p,q}$ 即得

$$(4 - 2 \cos \frac{p\pi}{N} - 2 \cos \frac{q\pi}{N}) U_{p,q} = \frac{1}{N^2} F_{p,q},$$

$$U_{p,q} = \frac{1}{N^2} F_{p,q} / (4 - 2 \cos \frac{p\pi}{N} - 2 \cos \frac{q\pi}{N})$$

因此只需对 f 作正变换再对 U 作反变换即两次变换可得差分方程的具解 u_{jk} ，用快速法时工作量约计为 $5N^2 \log_2 N$ ，这是当前解椭圆差分方程（矩形域）最快速的解法之一，比叠代法（叠到合理精度为止）的优选法交替方向法 $\sim 5N^2 (\log_2 N)^2$ 或优选超松弛法 $\sim \frac{3}{2} N^3 \log_2 N$ 都要快一个量级或更多。

快速付氏变换实质上只是一个小小的数学“窍门”，但影响很大，它基本上克服了时间域与频率域之间互相转换的计算障碍，并可用于实时，因此为数字谐波分析的广泛应用创造了条件，在有些领域内已经引起了革新。例如在五十年代初提出了所谓付立叶光谱分析法。用干涉仪测量光程差再作付氏变换以得光谱，是一项先进技术。但过去模拟式转换的精度不

足,直到快速算法解决它的关键问题后才得到迅速发展。地震勘探信息处理由模拟式过渡到数字化,快速付氏变换也起了相当的作用。目前在光谱、声谱、地震谱分析,晶体结构分析,滤波,数字信号处理,图形讯息处理,物探,天线,雷达,声纳,卫星摄影分析,全息图,以及医疗卫生上的心电图,脑电图,X光相片强化等等方面或已有大量应用或有潜在的应用〔3—5〕,同时也正在逐步替代模拟式转换建备。

类似于付立叶变换还有其它的线性正交变换为哈大马(Hadamard)变换,沃希(Walsh)变换等等,也有相应的快速算法和广泛应用〔5〕。

快算算法最早见于本世纪之初〔1〕,其后不断有人重新提出和用过。在手算时代, N 只能取得很小,效果不显,没有受到重视,实际问题多采用模拟设备。到了六十年代中,再次重新提出了目前所称的快速方法,但比较系统、完整些〔3〕,由于切合了实践的需要,这才得到普遍重视和推广。

参 考 文 献

- 〔1〕 Runge, C., Zeit. Math. Phys., 48 (1963), 443.
- 〔2〕 Cooley, J.W., Tukey, J.W., Math Comp., 19 (1965), 297—300.
- 〔3〕 IEEE Trans. Audio Electroacoustics, AU15:3 (1967), AU17:3 (1969).
- 〔4〕 Brigham, Fast Forier Transform, N.Y. 1973.
- 〔5〕 Andrews, H.C., Computer Techniqies in Image Processing, N.Y. 1970.

常微分方程和刚性系统

离散系统的瞬态过程一般表为常微分方程

$$\frac{dy_k}{dt} = f(y_1, \dots, y_n, t), k=1, \dots, n.$$

系统的物理特征通常通过雅可比矩阵

$$a_{ij} = \frac{\partial f}{\partial y_j}, i, j=1, 2, \dots, n$$

的本征值

$$\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k, k=1, \dots, n$$

来表达。来征值的实部 $R_e \lambda_k = \alpha_k$ 表示增长($\alpha_k > 0$)或衰减($\alpha_k \leq 0$)因子,虚部 $m \lambda_k = \beta_k$ 表示周期性振动的频率。在线性化的情况下,对应于本征值 λ_k 的基本解为

$$U_k(t) = a_k e^{\lambda_k t} = a_k e^{\alpha_k t} \cdot e^{i\beta_k t}, k=1, \dots, n$$

通常根据 $R_e \lambda_k$ 是否都 < 0 即 λ_k 是否都在复数平面的左半来判別系统是否稳定。在稳定的情况

称 $\tau_k = \frac{1}{|R_e \lambda_k|} = -\frac{1}{\alpha_k}$ 为时间常数,而基本解(线性化情况)可以表为

$$u_k(t) = a_k e^{-t/\tau_k} \cdot e^{i\beta_k t}, K=1, \dots, n.$$

时间常数 τ_k 愈小,衰减愈快。

实践上一种重要的类型是 λ_k 集中在虚轴上,这是临界稳定或接近于临界稳定的情况,其典型是简谐运动,一般轨道问题属此。稳定系统中另一种重要的类型是所谓刚性系统或病态

系统（也叫小参数系统），即 $|Re\lambda_1|, \dots, |Re\lambda_n|$ 也就是时间常数 $\tau_1, \dots, \tau_n$ 相差悬殊的情况，通常以所谓刚性比

$$\rho = \max |Re\lambda_K| / \min |Re\lambda_K| = \max \tau / \min \tau$$

作为刚性程度即病态程度的恒量。当 $\rho \gg 1$ 时称为刚性的，在自控系统中，控制部件一般反应灵敏，是可以急变的，具有小的时间常数，受控物体一般惯性大，是缓变的，具有大的时间常数。在多成分的化学反应中，有些反应速度快，有些慢，可以有好几个量级的差别。在复杂的电子式电力网络中，时间常数也会有大幅度的差别。在传热，扩散，分馏等过程中，把空间变量离散化后得到的常微分方程组也是刚性的。最早在五十年代初，人们通过化学反应问题开始认识到刚性系统的特点〔1〕。它在实践上的普遍性和重要性则是近十年来确认的。在控制系统，电网络，物理及化学动力学过程，种种施予过程中都经常出现刚性微分方程组，因此其数值解的研究成为常微分方程的一项重点〔2〕。

刚性微分方程系统的数值解有相当的困难。系统的最大时间常数 τ_{max} 是刻画系统活跃的“有生时间”，因此解题的总时限 $0 \leq t \leq T$ 约为 $T \approx \tau_{max}$ ，在传统的数值解法，不论是尤拉，亚丹斯，或龙格库塔法，当采用开型（显式）公式时，为了保证稳定性时间步长 h 必需取为 $h \approx 0 (\tau_{min})$ ，而积分的总步数 $N = T/h \approx \tau_{max}/\tau_{min} = \rho$ 因此当刚性比 ρ 很大（例如 10^6 ，实际上是完全有可能的！）时，则往往对于表面看来很“单纯”的问题，积分的步数会成为难以容忍的负担。如果单从截断误差来考虑，当瞬变过程结束趋向于稳定状态时，步长 h 是可以放大的，但是由于格式受到稳定条件的束缚，好比小脚女人走路，步子就是迈不大。因此原则上应采取适当的隐式以保证格式恒稳，使得步长 h 不受稳定性束缚而只取决于精确度。但是，如果采取常微分方程中传统的处理方法，在隐式解非线性方程组时采取简单叠代法，则为了保证叠代收敛，对于时间步长又要求 $h \approx 0 (\tau_{min})$ 陷于同样的矛盾。

当刚性系统中含有高频振荡成分即本征值有大的虚部 β_k 时则除了大的 $|\alpha_k|$ （即小的时间常数 τ_k ）外，大的 $|\beta_k|$ 也给步长带来限制，这从显式尤拉公式的步长条件

$$h \leq \min \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2}$$

可以看出。这是因为每一个全周期总要有一定个数的分点，而在高频时就要求很多的分点。

传统的数值解法是针对过去实践中主要是非刚性系统而设计的。数值积分方法主要是用多项式去逼近解，但多项式很难描写长区间上的指数曲线，因此不难理解，为什么它们一般不适应于刚性系统。可以证明：线性多步显式不可能恒稳，恒稳的线性多步隐式最出精度为2阶，最优情况就即平均尤拉格式即梯形公式〔3〕。

近年来刚性系统的数值解的一类方法是采用恒稳或近于恒稳的格式，在每步解隐式方程组时采用牛顿叠代，当有较好初值时，叠代收敛性基本上不受步长限制。叠代的每一步解线性化方程组时则采用直接法如消去法。这样就使步长摆脱了稳定性或叠代收敛性所强加的严重限制，重点转为有效地解非线性方程组及其线性化方程组的问题，涉及到牛顿法的改进和稀疏矩阵技术的运用等。也有考虑用有理函数来逼近指数函数的思想来构成差分格式以便较好地适应刚性系统的特点。有一类可取的思想是把瞬态解与稳态解分开来算，即用小步长算完

瞬态, 解稳定后可把含小时间比方程 $\frac{dy}{dt} = f$ 更广的方程 $\varepsilon \frac{dy}{dt} = f(x)$ 常数或高频振荡的方程中

的 $\frac{dy}{dt}$ 置为 0, 即略去小参数将相应的瞬态微分方程变为稳态代数方程, 再去积分这个新的微分一代数方程组, 步长可以放大。还有一类方法是对于方程 $\frac{dy}{dt} = f(y, t)$ 引进小参数 ε 和大参

数 $\beta > 0$ 和一个新函数 $z(t) \equiv (\varepsilon - \beta)^{-1} \left[\frac{dy}{dt} + y \right]$, 从而得到含未知函数 (y, z) 但与原方程等价的微分一代数方程组

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -\beta^{-1}y + (\beta^{-1}\varepsilon - 1)z, \\ \varepsilon z = y + \beta(\varepsilon - \beta)^{-1}(y + \varepsilon f) \end{cases}$$

对此当取 ε 充分小 β 充分大时可以制定恒稳的隐式格式 (连同解隐式的恒收敛叠代格式) 以及接近于恒稳的显式格式, 看来适应于本征值虚部较小的刚性系统包括热传导问题, 也能用于解方程如 $\varepsilon \frac{dy}{dt} = g(y, t)$ 而 $\varepsilon = \varepsilon(y, t)$ 在某些点上可以有零点 [4—6]。

参 考 文 献

- (1) Curtiss, C. F., Hirschfelder, J. O., Proc. Nat. Acad. Sci, USA, 38 (1952), 235—243.
- (2) Willoughby, R. A. ed., Stiff Differential Systems, International Symposium, N. Y. 1974.
- (3) Dahlquist, G. BIT, 3(1963), 27—43.
- (4) Gear, C. W., Numerical Initial-value Problem of Ordinary Differential Equations, NY. 1972.
- (5) Lambert, J. D., Computational Methods in Ordinary Differential Equations, London, 1973 (第八章)
- (6) 韩天敏, 病态常微分方程初值问题数值求解的一种方法, 本次会议报告。

流体力学问题的质点法

流体力学瞬态即不定常态问题的数学、物理背景是比较复杂的, 多种多样的, 其数值解法的发展必是多方面的。下面只略述其中一个方面即所谓质点法即粒子法。这是由流体运动的物理模型引伸出来的一类方法, 有其一般性的意义。为此先说明一下流体运动的数学表达方式。

流体力学连续介质运动过程的描述方式。按照所取参考坐标—自变量—的不同, 大致可分为两类: 定位表象即尤拉坐标和定质表象即拉格朗日坐标。在定位表象下, 参考坐标取为普通的空间坐标如 x (以一维为例)。流场参数为密度 $\rho(x, t)$, 速度 $u(x, t)$, 压力 $p(x, t)$, 内能 $E(x, t)$... 表示在时刻 t 位于位置 x 的流体元的密度, 速度, ...。在同一位置 x , 不同时刻 t 的 ρ, u, p 等实际上是由不同的流体元来体现的。在定位表象下, 一维可压缩流的基本方程组是