·數理化參考叢書·

幾何習題詳解

俞樹德編

萬葉出版社出版

數理化參考叢書

幾何習題詳解

俞樹德編

萬葉出版社出版

幾何習題詳解

著　　者：俞樹德　編

出　　版：萬葉出版社
香港莊士頓道190號三樓

承　　印：新雅印務有限公司
香港灣仔謝非道301號

目　次

平面幾何習題詳解

一 緒論

I. 幾何定理的證明

A. 證明的步驟 (1)辨別假設和終結，再依假設中已知條件先畫一圖，這圖形宜求普遍，不可祇畫特例，否則以偏概全，易生錯誤。(2)定理中種種術語，宜依其定義譯出，務使明白，例如"M 是 AB 的中點"，不如改爲 $AM=MB$. 又如"AOB 與 COD 互相平分"，不如改爲 $AO=OB$, 及 $CO=OD$. 較爲明白。(3)由假設逐步推證到終結，這步驟是證明的主體，就是最主要的部分。須認清假設，根據已知事項，推知第一步理爲眞，更由第一步理推知第二步理爲眞……終於推知終結爲眞確，於是證明完成。(4)證明中所根據理由，祇限於已知事項，計有下列四種：a.已經敍述的定義；b.已經敍述公理；c.已經證明的定理及推論；(已經證明的問題亦可做根據。) d.定理中所假設的已知事項。

B. 證明的方法

(一)直接證法 依據假設及已知事項，逐步推

證，斷定終結成立，於是定理爲眞。有下列二種：

(1)**綜合證法**　由假設及已知事項逐漸推知終結而證明新理爲眞，爲最普通之證法。

(2)**解析證法**　由終結逆推，逐步達到該定理的假設。常用以探索證明的方法，而以綜合法敍述之。

(二)**間接證法**　先假定終結不眞確，即假定終結的反面爲眞，因而逐步推衍所得的結果，和原來假設或已知眞理相矛盾。可知原來終結的反面爲僞，即所欲證的事理(原來終結)爲眞。這方法也叫做歸謬法。除此外又有下列兩種：

(1)**窮舉法**　若終結的反面不祇一種，則逐一證明其僞。例如欲證明 $A>B$，應證明 $A=B$ 及 $A<B$ 皆不眞確，則可知 $A>B$ 必眞。

(2)**同一法**　例如欲證明"A 爲 B"，若已知"B 爲 A"的一理爲眞，且 A 及 B 僅有一無二，則"A 爲 B"必眞。普通已知"A 爲 B"時，欲證"B 爲 A"，先另設 C 爲 A，然後證明 C 即是 B，故 B 爲 A。這種證法也是同一法。

II. **公理**　不要證明而人人所公認是正確的道理。凡數學上均適用的叫做普通公理；僅在幾何學上適用的叫做幾何公理。

A. **普通公理**

1. 等於同量或等量之量相等。

2. 等量加等量其和相等

3. 等量減等量其差相等。

4. 不等量加等量，其和不等，大者仍大，小者仍小。

5. 不等量減等量，其差不等；大者仍大，小者仍小。

6. 等量減不等量，其差不等，減大量者其差反小。

7. 等量以同數倍之，其積相等。（重要特例：等量之二倍相等。）

8. 等量以同數除之，其商相等。（重要特例：等量之半相等。）

9. 三量中之第一量大於第二量，第二量大於第三量，則第一量必大於第三量。

10. 全量等於其各分量之和。

11. 全量大於其任一分量。

12. 在一等式或不等式中，一量可以其等量代之。（簡稱代換）。

B. 幾何公理

13. 通過二點祗能引一直線。（或二點可決定一直線）。

14. 直線為二點間最短之線。

15. 凡平角皆相等。

16. 相交二直線，不能皆與第三直線平行。

17. 直線得由其兩端延長之，至於任何所需之長。

18. 以任意點為圓心，任意長為半徑，可作一圓。

19. 幾何圖形可不變更其形狀與大小，自一位置移至他一位置。

III. 符號及略字

+……加	∥……平行或平行線（多數用∥s）
−……減	∽……相似
=……等於或等積	∠……角（多數用∠s）
≌……全等（或用≡）	△……三角形（多數用△s）
≠……不等	▱……平行四邊形（多數用▱s）
>……大於	⊙……圓（多數用Ⓢ）
<……小於	⌒……弧，如 $\overset{\frown}{AB}$.
□……正方形	rt∠……直角
∴……所以	st∠……平角.
∵……因爲	
⊥……垂直或垂線（多數用⊥s）.	

二　直線及直線形

I. 點線角

定理（一）　凡直角皆相等。

因爲凡平角皆相等（公理 15），又等量的一半相等（公理 8）所以直角都相等。

定理（二）　過已知直線上的一定點，可作一垂線，但只可作一垂線。

定理（三）　同角或等角的餘角相等。

定理（四）　同角或等角的補角相等。

定理(五)　若二鄰角外邊成一直線，則此二角互爲補角。

系(一)　從直線上一點向同側引若干射線，順次所成諸角的和，等於二直角。

系(二)　從一點引若干射線，環繞這點所成諸角的和，等於四直角。

系(三)　正交兩直線所成的四角皆等於一直角。

定理(六)　若二鄰角互爲補角，則此二角的外邊成一直線。(定理五的逆定理。)

定理(七)　一線段只有一中點。

定理(八)　一角只有一平分角線。

定理(九)　二直線相交，所成的對頂角相等。

已知：二直線 AB 與 CD 相交，所成 $\angle a$ 與 $\angle b$，又 $\angle x$ 與 $\angle y$ 都是對頂角。

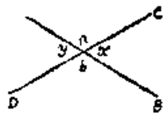


圖 1

求證：$\angle a=\angle b$，$\angle x=\angle y$.

證明：

〔敍　述〕	〔理　由〕
1. AB 與 CD 皆爲直線.	1. 設定.
2. $\angle a$ 爲 $\angle x$ 的補角.	2. 定理(五).
3. $\angle b$ 爲 $\angle x$ 的補角.	3. 定理(五).
4. $\therefore \angle a=\angle b$.	4. 定理(四).
5. 又 $\angle x=\angle y$.	5. 理由同 1——4.

習　題　一

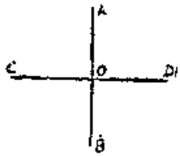


圖 2

由一點引四射線，若所成的四角各爲直角，則此四射線成二直線。

【解】假設：由 O 點引四射線 OA，OB，OC

及 OD，$\angle AOC$，$\angle COB$，$\angle BOD$，及 $\angle DOA$ 各為直角。

求證：AOB 及 COD 均為直線。

證明：

〔敍　　述〕	〔理　　由〕
1. $\angle AOC+\angle COB=\angle AOB=rt\angle$. $\angle COB+\angle BOD=\angle COD=rt\angle$.	1. 直角定義及假設.
2. $\therefore$ AOB 及 COD 各成一直線.	2. 平角定義.

2. 互為補角的二鄰角平分線，必互相垂直。

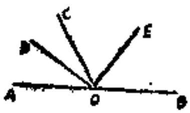


圖 3.

【解】假設：$\angle AOC$ 及 $\angle BOC$ 互為鄰補角 OD 為 $\angle AOC$ 的平分線，OE 為 $\angle BOC$ 的平分線

求證：$DO\perp EO$.

證明：

〔敍　　述〕	〔理　　由〕
1. $\angle AOC+\angle BOC=st\angle$.	1. 補角定義
2. $\angle DOC=\frac{1}{2}\angle AOC$ $\angle COE=\frac{1}{2}\angle BOC$	2. 平分角線定義.
3. $\therefore$ $\angle DOC+\angle COE$ $=rt\angle$.	3. 直角定義.
4. 卽 $\angle DOE=rt\angle$.	4. 公理 10.
5. $\therefore$ $DO\perp EO$.	5. 垂線定義.

3. 若二鄰角的平分線互相垂直，則此二鄰角必互為補角。

【解】假設：二鄰角 $\angle AOC$ 與 $\angle BOC$，DO 為 $\angle AOC$ 的平分線，EO 為 $\angle BOC$ 的平分線，而 $DO\perp EO$.（圖 3.）

求證：$\angle AOC$ 與 $\angle BOC$ 互為補角.

證明：〔敘　述〕	〔理　由〕
1. $\angle DOC+\angle COE=\angle DOE$ $=rt\angle$.	1. 公理 10 及垂線定義.
2. $\angle DOC=\angle AOD$, $\angle COB=\angle BOE$.	2. 平分線定義.
3. $\angle AOB=\angle AOC+\angle COB$ $=\angle AOD+\angle DOC+\angle COE$ $+\angle BOE=\angle DOC+\angle DOC$ $+\angle COE+\angle COE$ $=2(\angle DOC+\angle COE)$ $=2rt\angle$.	3. 公理 10. 公理 12.
$\therefore \angle AOC$ 與 $\angle BOC$ 互為補角.	4. 補角定義.

若$\angle ABC$為直角，又$\angle A$為$\angle 1$之餘角，求證$\angle A=\angle 2$.

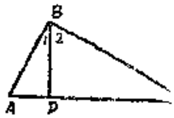


圖 4.

【解】假設：$\angle ABC=rt\angle$.

$\angle A+\angle 1=rt\angle$.

求證：$\angle A=\angle 2$.

證明：$\angle 1+\angle 2=\angle ABC$（公理 10）$=rt\angle$（假設）.

$\angle A+\angle 1=rt\angle$（假設）

$\angle 1+\angle 2=\angle A+\angle 1$（公理 1）.

$\therefore \angle A=\angle 2$（公理 3）.

5. 若 AB 及 CD 均為直線；又$\angle AOE$及$\angle COF$皆為直角，求證$\angle DOE=\angle BOF$.

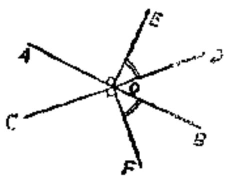


圖 5.

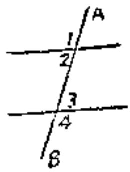
【解】假設：AB 及 CD 均為直線.

$\angle AOE$ 及 $\angle COF$ 均為直角

求證：$\angle DOE=\angle BOE$.

證明： 〔敍　　述〕	〔理　　由〕
1. $\angle AOE+\angle DOE+\angle BOD$ $=st\angle$.	1. 假設 AB 爲直線及定理(五)系(一)
2. $\angle COF+BOF+\angle BOD$ $=st\angle$.	2. 假設 CD 爲直線，及定理(五)系(一).
3. $\angle AOE=\angle COF=rt\angle$.	3. 假設及定理(一).
4. 又 $\angle BOD=\angle BOD$	4. 恆等.
5. 而 $\angle AOE+\angle DOE$ $+\angle BOD=\angle COF+\angle BOF$ $+\angle BOD$.	5. 公理 15.
6. $\therefore \angle DOE=\angle BOF$.	6. 公理 3.

6. 若 AB 爲一直線，又 $\angle 2=\angle 3$，求證 $\angle 1=\angle 4$.



【解】證明：$\angle 1+\angle 2=st\angle$.(定理(五))

$\angle 3+\angle 4=st\angle$.(同上)

則 $\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4$.(公理 15)

而 $\angle 2=\angle 3$ (假設)．$\therefore \angle 1=\angle 4$ (公理 3)．

圖 6.

7. 三直線 AD, BE 及 CF 相交於 O 而成 1, 2, 3, 4, 5, 6 六角：

(a) 若 $\angle 2$ 與 $\angle 6$ 互爲餘角，求 $\angle 4$.

(b) $\angle AOC+\angle BOD+\angle COE=2st\angle$.

(c) $\angle AOC+\angle COE-\angle EOA=2\angle 1$.

(d) 若 $\angle 6=\angle 5$，則 $\angle 2=\angle 3$.

(e) 若 $\angle FOB=\angle FOD$，則 $\angle 5=\angle 6$.

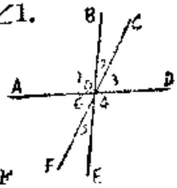


圖 7.

【解】(a) $\because \angle 1+\angle 2+\angle 6=st\angle$ (假設 CF 爲直線).

而 $\angle 2+\angle 6=rt\angle$.（假設 $\angle 2$ 與 $\angle 6$ 互為餘角）

$\therefore \angle 1=rt\angle$　$(st\angle - rt\angle = rt\angle)$.

又 $\angle 1=\angle 4$.（定理(九)）.

故得 $\angle 4=rt\angle$.（公理一）.

(b) $\angle AOC+\angle BOD+\angle COE$

$=\angle 1+\angle 2+\angle 2+\angle 3+\angle 3+\angle 4$.

而 $\angle 2=\angle 5$.　$\angle 3=\angle 6$.（定理(九)）.

$\therefore \angle AOC+\angle BOD+\angle COE=\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4$

$+\angle 5+\angle 6=2st\angle$.（公理

(c) $\angle AOC+\angle COE-\angle EOA$

$=\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4-\angle 5-\angle 6$.

而 $\angle 1=\angle 4$，$\angle 2=\angle 5$，$\angle 3=\angle 6$.（定理九）

$\therefore \angle AOC+\angle COE-\angle EOA=\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 1$

$-\angle 2-\angle 3=2\angle 1$　（公理 12）

(d) $\because \angle 6=\angle 5$.（假設）而 $\angle 6=\angle 3$　$\angle 5=\angle 2$.（定理九）

$\therefore \angle 2=\angle 3$.（公理 1.）

$\because \angle FOB=\angle 1+\angle 6$，$\angle FOD=\angle 4+\angle 5$.（公理10.）

而 $\angle FOB=\angle FOD$　（假設）

$\therefore \angle 1+\angle 6=\angle 4+\angle 5$.（公理1.）

又 $\angle 1=\angle 4$.（定理九）　　$\therefore \angle 5=\angle 6$.（公理 3.）

8. 求證兩對頂角的平分線成一直線。

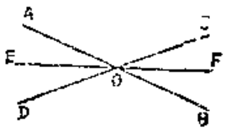


圖 8.

【解】假設：AB 及 CD 二直線交於 O 點所成對頂角 $\angle AOD$ 與 $\angle BOC$，而 OE 為 $\angle AOD$ 的平分線，OF 為 $\angle BOC$ 的平分線.

求證：EOF 成一直線。

證明：

〔敍　　述〕	〔理　　由〕
$\angle AOD=\angle BOC$.	1. 定理(九).

2. $\angle AOE=\frac{1}{2}\angle AOD$ $\angle BOF=\frac{1}{2}\angle BOC$	2. 平分線定義
3. $\angle AOE=\angle BOF$.	3. 公理 8.
4. $\angle EOF=\angle AOE+\angle AOC+\angle COF=\angle AOC+\angle COF+\angle BOF$.	4. 公理 10. 公理 12
5. $\angle AOC+\angle COF+\angle BOF=\angle AOB=st\angle$.	5. 假設 AB 爲直線.
6. $\therefore\ \angle EOF=st\angle$	6. 公理 1.
7. EOF 爲直線.	7. 平角定義.

9. 求證兩雙對頂角的平分線互相垂直。

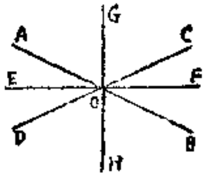


圖 9.

【解】假設：AB 及 CD 二直線相交而成 $\angle AOD$ 及 $\angle BOC$，又 $\angle AOC$ 及 $\angle BOD$，兩雙對頂角。EOF，GOH 爲對頂角的平分線。

求證：$EF\perp GH$.

證明：

〔敘　述〕	〔理　由〕
1. $\angle AOC$ 與 $\angle BOC$ 互爲補角.	1. 假設 AB 爲直線及定理五.
2. $GO\perp OF$.	2. 題 2.
3. EOF 及 GOH 均爲直線.	3. 題 8.
4. $\therefore EF\perp GH$.	4. EF，GH 顺次爲 GO，OF 的延長線.

10. 設 P 是線段 AB 的中點：

(a) 若 Q 是 AB 的內分點，而在 AP 段內，

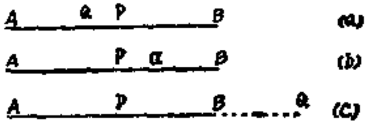
則 $QB-AQ=2QP$.

(b) 若 Q 是 AB 的內分點，而在 PB 段內，

則 $AQ-QB=2QP$.

(c) 若 Q 是 AB 的外分點，則 $AQ+QB=2PQ$.

圖 10.



【解】(a) 假設：$AP=PB$，Q點在 AP 段內.

求證：$QB-AQ=2QP$.

證明：$PB=AP=AQ+QP$.

$QB=QP+PB=QP+AQ+QP$.

$\therefore QB-AQ=QP+AQ+QP-AQ$

(b) 假設：$AP=PB$，Q點在 PB 段內.

求證：$AQ-QB=2QP$.

證明：$AP=PB=QP+QB$.

$AQ=AP+QP=QP+QB+QP$

$AQ-QB=QP+QB+QP-QB=2QP$.

(c) 假設：$AP=PB$，Q點在 AB 線段的延長線上.

求證：$AQ+QB=2PQ$.

證明：$AP=PB=PQ-QB$.

$AQ=AP+PQ=PQ-QB+PQ$.

$\therefore AQ+QB=PQ-QB+PQ+QB=2PQ$.

11. 三角形

定理(十) 兩三角形中，一三角形之兩邊及其所夾之角，各等於又一三角形之兩邊及其所夾之角，則此兩三角形全等。(s. a. s.=s. a. s.)

假設：$\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$ 中，

$AB=A'B'$，$AC=A'C'$，

$\angle A=\angle A'$

總求：$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$．

證明：

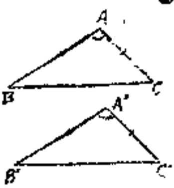


圖 11.

〔敘述〕	〔理由〕
1. 移置 $\triangle ABC$ 於 $\triangle A'B'C'$ 上，使 AB 與其等量之 $A'B'$ 疊合．	1. 公理 19. 由假設 $AB=A'B'$．
2. AC 與 $A'C'$ 疊合．	2. 由假設 $\angle A=\angle A'$．
3. C 與 C' 合．	3. 由假設 $AC=A'C'$．
4. BC 與 $B'C'$ 疊合．	4. 公理 13.
5. $\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$	5. 圖形能疊合者全等。

〔註：本證明方法叫疊合法，除證明基本定理外很少應用．〕

定理(十一) 兩三角形中，一三角形之一邊及其兩端之角各等於又一三角形之一邊及其兩端之角，則此兩三角形全等。($a.s.a.=a.s.a.$)．

〔證明可仿上定理用疊合法〕．

定理(十二) 等腰三角形底角相等。

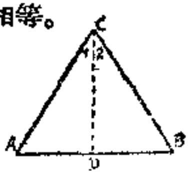


圖 12.

假設：$\triangle ABC$ 中 $AC=BC$．

總求：$\angle A=\angle B$．

證明：作 $\angle C$ 的平分線 CD，與 AB 相交於 D．

在 $\triangle ACD$．及 $\triangle BCD$ 中．

$AC=BC$(假設)．$\angle 1=\angle 2$ (作圖)

$CD=CD$ (恆等)．$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCD$．($s.a.s.=s.a.s.$)

$\therefore \angle A=\angle B$．

系(一)　等腰三角形頂角的平分線必爲底邊的垂直平分線。

系(二)　等邊三角形就是等角三角形。

定理(十三)　三角形中若有二角相等，對邊必等。〔可用疊合法證明〕.

系(一)　等角三角形就是等邊三角形。

定理(十四)　兩三角形中，如三邊彼此對應相等，則此二三角形必全等。(s. s. s.＝s. s. s.)

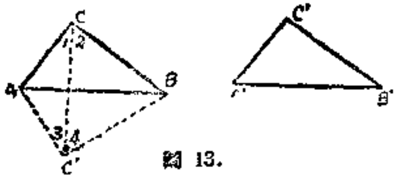


圖 13.

設：$\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$ 中：$AB=A'B'$

$AC=A'C'$

求證：$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

證明：將 $\triangle A'B'C'$ 移置於 $\triangle ABC$ 之下，使 $A'B'$ 與 AB 重合，而 C 及 C' 各在 AB 之兩側。(公理 19，及假設 $AB=A'B'$) 聯 CC' (公理 13.)

因 $\triangle ACC'$ 是等腰 $\triangle$，(由假設 $AC=A'C'$)，

故 $\angle 1=\angle 3$.(定理十二).

因 $\triangle BCC'$ 是等腰 $\triangle$，(由假設 $BC=B'C'$)，

故 $\angle 2=\angle 4$.(定理十二).

$\therefore$ $\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4$.(公理2.)

即 $\angle ACB=\angle A'C'B'$.

$\therefore \triangle ABC\cong A'B'C'$.(s. a. s.＝s. a. s.).

定理(十五)　兩直角三角形，有斜邊及一銳角，對應相等，則必爲全等形。〔可用疊合法證明〕