光学糾正概念

北京地質學院
測量教研室

光學糾正概念

1. 緒言　　光學糾正的作用除開消除像片的傾角影響之外，還在像片的變換中使得被糾正的像片有放大與縮小的可能。這種既消除傾角影響，同時又放大或縮小聯合動作，就几何的原理而論，是完全正確的。

僅是這種比例尺的變更，可得一變換后的像片與原來的攝影站所攝得的像片相當，就是所用的攝影機與原來的攝影機的焦距不同。換言之，垂直攝影的空中像片的放大或縮小，平常正確地考慮成比例尺的變更，實際上代表攝影機的焦距的變更，而非攝影高度有什么不同。爲了避免因地形起伏而生的比例尺的變更或以攝影高度的變化而生的比例尺的變更發生混淆，此地採用『放大因子』等于二焦距之比。本處的各種討論從頭到尾都採用 $m=fp/fn$ 爲被糾正的垂直攝影像片的有效焦距與相應傾斜像片的原來的攝影機焦距之比。此因子相當于被糾正像片的從野外攝得的攝影機焦距與實際上所攝得的原來的傾斜像片的空中攝影機焦距之比。

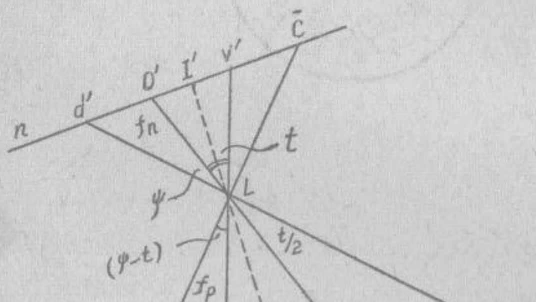

圖 1

2. 光學糾正中的几何關系　　在圖 1 中，n 代表以焦距爲 fn 的攝影機而攝得的傾斜底片面。L 爲透視中心，fp 系由底片 n 投影到水平面 p 所欲求正片的焦距，其值以糾正像片所須求的放大率 $m=\frac{fp}{fn}$ 而求得。圖面爲像片的主面，d′c′ 爲主線，主點 O′ 在投影面上爲 O，垂點 V′ 在投影面上爲 V，等角點 i′ 在投影面上爲 i

及像片的邊界 c' 及 d' 在投影面上爲 c 及 d。在 n 面與 p 面間的夾角卽爲像片的傾角，以 t 表之。

由圖容易看出各點之間有下面的關系：

$$O'V' = fn\ tg\ t \tag{1}$$

$$O'i' = fn\ tg\ t/2 \tag{2}$$

$$i'V' = fn\ tg\ t - fn\ tg\ t/2 \tag{3}$$

$$O'd' = O'C' = fn\ tg\ \varphi \tag{4}$$

$$VO = fp\ tg\ t \tag{5}$$

$$Vi = fp\ tg\ t/2 \tag{6}$$

$$iO = fp\ tg\ t - fp\ tg\ t/2 \tag{7}$$

$$VC = fp\ tg\ (\varphi - t) \tag{8}$$

$$Vd = fp\ tg\ (\varphi + t) \tag{9}$$

圖 2 的記號與圖 1 有同一的意義。圖面代表像片的主面，n 面與 p 面相交成一傾角。又在此圖中 $LJ \parallel$ p 面，$LK \parallel$ n 面，將 LV' 延長至 g，使 $Lg = fp$ 及 $ge' \parallel$ p 面交于 e' 點，此 e' 投影于 p 上成 e。

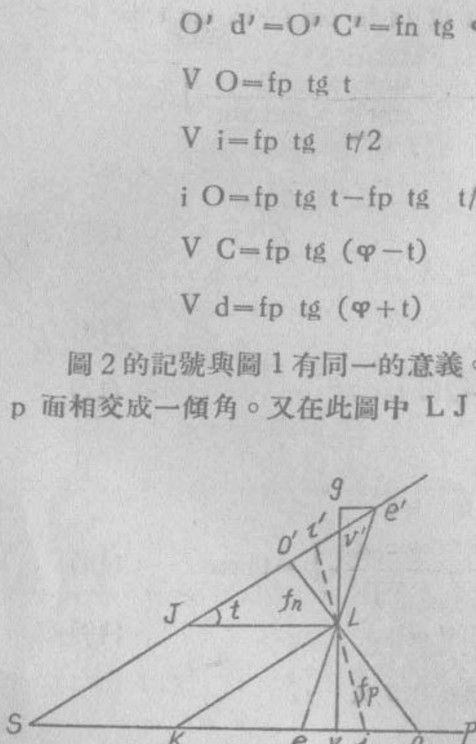

圖 2

顯然 $Le' = Le$，此 e' 點叫做等尺度點或過 e' 在底片上與主線成正交的線，叫做等尺度線，因爲底片上的尺度與投影尺度相等。

在圖 2 上容易看出的關系如下：

$$LJ = SK = fn\ sec\ t \tag{10}$$

$$SJ = KL = fp\ csc\ t \tag{11}$$

$$L\ V' = fn\ \sec t \tag{12}$$

$$V'\ e' = (fp - fn\ \sec t)\ \csc t$$

$$= fp\ \csc\ t - fn\ \sec t \csc\ t \tag{13}$$

$$O'\ J = fn\ \text{ctg}\ t \tag{14}$$

$$J\ e' = JO' + O'v' + ve'$$

$$= fn\ \text{ctg}\ t + fn\ \text{tg}\ t + fp\ \csc\ t - fn\ \sec\ t\ \csc\ t$$

$$= fn\left(\frac{\cos t}{\sin t} + \frac{\sin t}{\cos t} - \frac{1}{\sin t \cos t}\right)$$

$$+ fp\ \csc t$$

$$= fp\ \csc t \tag{15}$$

$$S\,J = J\ e'$$

$$L\ e' = L\,e \tag{16}$$

$$S\ e = 2J\ L = 2SK = 2fn\ \csc\ t \tag{17}$$

$$J\ i' = JO' + O'i'$$

$$= fn\ \text{ctg}t + fn\ \text{tg}\quad t/2$$

$$= fn\left(\frac{\cos t}{\sin t} + \frac{1 - \cos t}{\sin t}\right) = fn\ \csc\ t \tag{18}$$

將 (18) 與 (10) 比較　$J\ i' = L\,J$ (19)

$$K\,i = KV + Vi = f\,\text{ctg}t + fp\ \text{tg}\quad t/2$$

$$= fp\left(\frac{\cos t}{\sin t} + \frac{1 - \cos t}{\sin t}\right)$$

$$= fp\ \csc t \tag{20}$$

$$K\ i = KL = SJ \tag{21}$$

$$S\ i' = SJ + Ji' = fp\ \csc t + fn\ \csc t$$

$$= (fn + fp)csct \qquad (22)$$

$$S\,i = SK + Ki = fn\ csc\ t + fp\ csc\ t$$

$$= (fn + fp)csct \qquad (23)$$

$$S\,i' = Si \qquad (24)$$

$$S\,O' = SJ + JO' = fp\,csct + fn\,ctgt$$

$$= \frac{fp + fn\,cost}{sint} \qquad (25)$$

$$S\,O = SK + KV + VO$$

$$= fn\,csct + fp\,ctgt + fptgt$$

$$= fn\ csct + fp\left(\frac{cost}{sint} + \frac{sint}{cost}\right)$$

$$= fn\,csct + fp\,sect\,csct \qquad (26)$$

$$S\,v' = SJ + JO' + O'v'$$

$$= fp\,csct + fn\,ctgt + fn\,tgt$$

$$= fp\,csct + fn\,sect\,csct \qquad (27)$$

$$S\,v = SK + KV = fn\,csct + fp\,ctgt$$

$$= \frac{fn + fp\,cost}{sint} \qquad (28)$$

以 s 爲原點，代表 p 面的水平線爲 x 軸的直角坐標：

$$L點 = \begin{cases} x = fn\,csct + fpc\,tg\ t = \dfrac{fn + fpcost}{sint} \\ y = fp \end{cases}$$

$$
O' \text{點} = \begin{cases} x = SO' \cos t = (fp \csc t + fn \operatorname{ctg} t)\cos t \\ \quad = fp \operatorname{ctg} t + fn \dfrac{\cos^2 t}{\sin t} \\ y = (fp \csc t + fn \operatorname{ctg} t)\sin t = fp + fn \cos t \end{cases}
$$

$$
O \text{點} = \begin{cases} x = fn \csc t + fp \sec t \csc t \\ y = O \end{cases}
$$

$$
e' \text{點} = \begin{cases} x = 2fp \operatorname{ctg} t \\ y = 2fp \end{cases}
$$

像片糾正的實際問題，在于將原來的，如像在圖 2 中所示的 n 面的底片，經過糾正攝影機的透鏡，恰如將底片從 n 面經過透視中心 L 投影到圖 2 中的 p 面的像片一樣地得出一完全相同的像片來。

3. 在光學糾正中的几何定理

a. 定理 1 在相交于 S 的二線 n 及 p 的中間有一透視中心 L，如果過 L 作一與 SL 成正交的固定軸，又如果將在 n 線中的任一點，過 L 投影到 p 線上，則對於所有這樣的對應點些，向該固定軸所作的垂足，割該固定軸的線段的倒數之和爲常數。

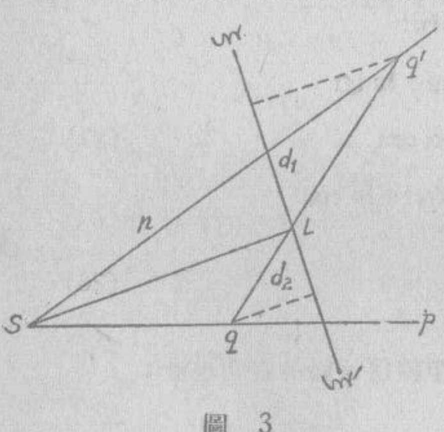

圖 3

如圖 3，n 及 p 爲相交于 S 的二已知線，L 爲此二交線的交角內一固定透視中心點，聯接 SL 並作此線的正交線，即爲固定軸 $\xi\xi'$，$\xi\xi' \perp SL$. 由 n 線上任一點 q′ 過 L 投影到 p 線上成 q，由 q′ 及 q 向 $\xi\xi'$ 作正交線，交 $\xi\xi'$ 軸于二點，此二點對 L 的距離各爲 d_1，d_2。則凡這樣由 n 向 p 投影的對應點都有 $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}$ 成常數的關系。

設在 n 線上的任一點 q′ 距 S 的距離爲 γ，以 S 爲原點，SP 爲 x 軸，沿 S P 方向爲正，過 S 作與 SP 成正交的線爲 y 軸，在 SP 的上方爲正。設固定點 L 的坐標爲（x_1，y_1）。令此二線 n 及 P的交角爲 t。則 q′ 的坐標爲（$\gamma\cos t$，$\gamma\sin t$）直線 q′ L 的方程爲：

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_1-\gamma\sin t}{x_1-\gamma\cos t} \tag{3.1}$$

當 y=O 時得出此直線與 p 的交點 q 的坐標爲

$$\left(\frac{y_1\gamma\cos t-x_1\gamma\sin t}{y_1-\gamma\sin t},\ O\right) \tag{3.2}$$

S L 的坡度爲 $\frac{y_1}{x_1}$ ，而由 q′ 及 q 向 $\xi\xi'$ 作的投影線，與

S L 成平行，則此投影線的方程各爲

$$y-\gamma\sin t=\frac{y_1}{x_1}(x-\gamma\cos t) \tag{3.3}$$

$$y-O=\frac{y_1}{x_1}\left(x-\frac{y_1\gamma\cos t-x_1\gamma\sin t}{y_1-\gamma\sin t}\right) \tag{3.4}$$

將此二方程寫成標準式

$$\frac{y_1x-x_1y+x_1\gamma\sin t-y_1\gamma\cos t}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}}=O$$

$$\frac{(y_1{}^2-y_1\gamma\sin t)x+(x_1\gamma\sin t-x_1y_1)y+x_1y_1\gamma\sin t-y_1{}^2\gamma\cos t}{\sqrt{(y_1{}^2-y_1\gamma\sin t)^2+(x_1\gamma\sin t-x_1y_1)^2}}=O$$

根据解析几何學由一點至此直線的距離的原理有

$$d_1=\frac{x_1y_1-x_1y_1+x_1\gamma\sin t-y_1\gamma\cos t}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}} \tag{3.5}$$

$$d_2 = \frac{x_1(y_1{}^2 - y_1\gamma\sin t) + y_1(x_1\gamma\sin t - x_1y_1) + x_1y_1\gamma\sin t - y_1{}^2\gamma\cos t}{\sqrt{(y_1{}^2 - y_1\gamma\sin t)^2 + (x_1\gamma\sin t - x_1y_1)^2}} \tag{3.6}$$

簡化之，得

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= \frac{\gamma(x_1\sin t - y_1\cos t)}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2}} \\ d_2 &= \frac{-y_1\gamma(x_1\sin t - y_1\cos t)}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2}\,(y_1 - \gamma\sin t)} \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

此二距離具有相反的符號，由于它在 S L 線的相對邊上。

因而

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2}}{\gamma(x_1\sin t - y_1\cos t)} - \frac{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2}\,(y_1 - \gamma\sin t)}{y_1\gamma(x_1\sin t - y_1\cos t)}$$

或

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2}\,\sin t}{y_1(x_1\sin t - y_1\cos t)} \tag{3.8}$$

上式說明當 t 角及 L (x_1, y_1) 既經確定之后，不論經過 L 投影到 p 的相應點在 n 上的位置如何，而 $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}$ 恒為常數值。

b. 定理 2　n,p 二線相交于 S 而成任意角度 t，如果一透視中心 L 距 n 的距離為 fn，距 p 的距離為 fp 及 L J 平行于 p，K L 平行于 n，並將此節點四邊形 S J L K 以 S K 邊固定不動，旋轉至任一位置 S J′ L′ K，使 n′ 線與 p 線成任一角度 θ，如圖 4 所示，則在 n 線上的任一點 q′，過 L 投影至 p 線上為 q，以此點轉動至 q′′ 點之后，則 q′′ 即在一位置恰如由 n′ 線過一新的透視中心位置 L′，投影到 p 線的同一點 q′ 上。

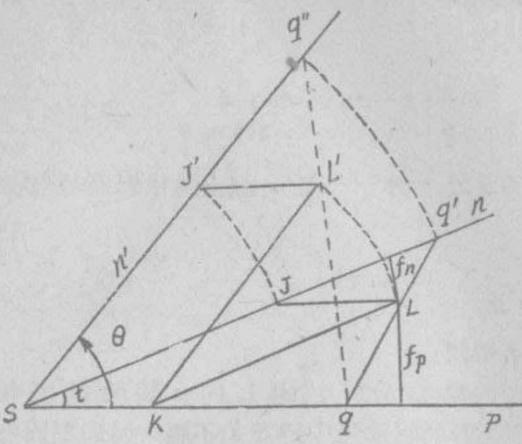

圖 4

如圖 4, n, p 二線相交于 S 而成任意角度 t；位于此角內的透視中心 L 距 n 及 p 各爲 fn，fp，L J 平行于 p，L K 平行於 n；在 n 線上距 S 任一距離 γ 的 q' 點，過 L 投影至 p 線上后爲 q；以 S K 固定不動，將節點四邊形 S J L k 旋轉至任一位置 S J' L' K，旋轉后的 S J' 線叫做 n' 與 p 線成任一角度 θ，q' 的新位置 q'' 仍距 S 有 γ 距離，則 q'' 過 L' 向 p 線的投影與 q' 過 L 向 p 線上的投影完全相同。

令坐標系統仍如前面的圖 3 不變，則 q' 及 L 的坐標爲

$$q':\quad x=\gamma\cos t,\quad y=\gamma\sin t$$

$$L:\quad x=fn\csc t+fp\operatorname{ctg}t\quad y=fp$$

則直線 q' L 的方程爲：

$$\frac{y-\gamma\sin t}{x-\gamma\cos t}=\frac{\gamma\sin t-fp}{\gamma\cos t-fn\csc t-fp\operatorname{ctg}t}\qquad(3.9)$$

當 y=O 時，得出此線與 p 線的交點 q 的坐標如下：

$$q:\quad x=\frac{\gamma fn}{\gamma\sin t-fp},\qquad y=O\qquad(3.10)$$

在節點四邊形轉動之后，L' 及 q'' 的坐標成爲：

$$L':\quad x=SK+KL'\cos\theta=fn\csc t+fp\csc t\cos\theta$$

$$y=fp\csc t\sin\theta$$

$$q'':\quad x=\gamma\cos\theta$$

$$y = \gamma \sin \theta$$

則直線 q'' L' 的方程爲

$$\frac{y-\gamma \operatorname{sint} \theta}{x-\gamma \cos \theta}=\frac{\gamma \sin \theta - \mathrm{fp} \csc \mathrm{t} \sin \theta}{\gamma \cos \theta - \mathrm{fn} \csc \mathrm{t} - \mathrm{fp} \csc \mathrm{t} \cos \theta} \quad (3.11)$$

當 y=O 時，此線與 p 線的交點，卽 q'' 在 p 線上的投影點的坐標將爲

$$x=\frac{\gamma \mathrm{fn}}{\gamma \sin \mathrm{t}-\mathrm{fp}}, \quad y=O$$

此項坐標與 q 點的坐標完全相同。

因此 q'' 過 L' 向 p 線的投影恰與 q' 過 L 向 p 線的投影相同。如果保持像面不動，則在節點四邊形中的 S J 不動，將節點四邊形 S J L K 轉至另一新位置其結果與上同。

4. 糾正問題的求解

應用光學糾正的几何原理卽奠定出糾正問題的 Scheimpflug 解，這種解法由圖 5 闡明。詳細說明如下：

如前面的圖 1 及圖 2 中的几何圖形來說明糾正的方法。設想有一平面 n 及一平面 p 以像片的傾角 t 相交。如果任一假想的透視中心 L 位於距 n 及 p 各爲 fn 及 fp 處，fp/fn 之比等于欲求的放大率，則以一像片的主點在過 L 向 n 面所作的正交線的垂足 O' 上及其主線與過 L 與 n 及 p 成正交的平面的割線相合，而在 n 面上如此設置的一張像片卽欲糾正的像片。這種經過透視中心在L 由 n 面向 p 面所作的欲求的投影由圖 1 及圖 2 中表明。

上面的几何定理 2 証明這種相同的欲求的糾正，完全可以變換 n 面及 p 面的位置及透視中心的位置，始終維持節點四邊形 SJLK 的 S K 固定不變來得出。

但是，如果爲了糾正而作的像片的複制是以一攝影機來完成，則其透鏡須設在 L 點。此透鏡的焦距將有一固定值，設以 F 表之。爲求由底片面將像投影于投影面上或承影面上得清晰的構像，對于投影到 p 面上去的 n 面上的任何一點，根据光學糾正定理 $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}$ 就

必須有一定値。要實現這个條件，設置在 L 點處的透鏡面必須經過 S，

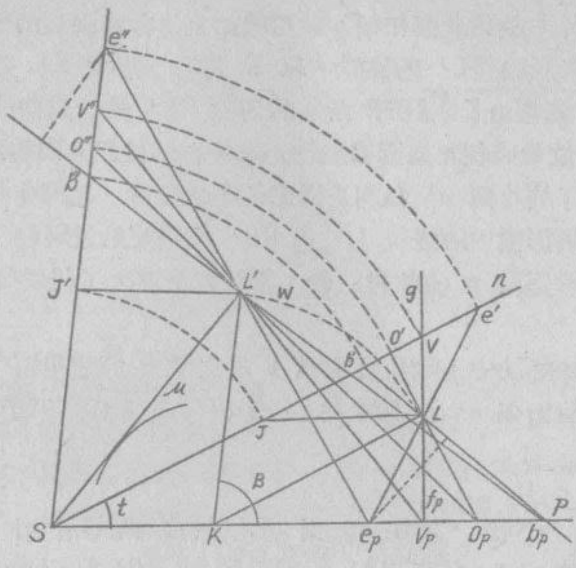

圖 5

並且透鏡的几何軸必須與 SL 成正交；于是由 n 面投影至 p 面的任一對應點，其 $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}$ 都成常數。

當旋轉節點四邊形 SJLK 並使 p 面中產生的構像具有欲求的放大率時，此四邊形的正確位置必須求得，不僅是要對于此四邊形的所有位置，當將 d_1 及 d_2 投影于與 SL 成正交的透鏡軸上 $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}$ 成一常數；而此常數又必須等于 $\frac{1}{F}$ 。這最后一个條件仍決定對于糾正像片上所有的點都清晰成像的保証。

糾正問題的 Scheimpflug 解由圖 5 中闡明。作原底片的 n 平面與水平面 p 成傾角 t。設 fn 爲原攝影機已知的焦距，則 fp 爲由糾正像片上所要求的放大率 m＝fp/fn 而得。透視中心 L 的位置在距 n 及 p 各爲 fn 及 fp 的地方。作 LJ 平行于 p ，LK 平行于 n，

則等尺度線由點 e′ 表之，此處 Je′=SJ ，而將 e′ 過 L 投影于 e. 以 K 點爲心，以糾正攝影機的主焦距 F 爲半徑作一弧 u ，並由『S』作 SL′ 線與此弧相切。此切線卽定出其轉動后的節點四邊形 SJ′L′K 的對角線 SL′ 的位置。以 K 爲心，距離 KL 爲半徑作一弧 w，此 w 弧與由『S』所作弧 u 的切線 SL′ 的交點卽決定透視中心 L′ 的新位置或糾正攝影機透鏡光學中心的位置。四邊形 SJ′L′K 的完成決定了底片面 n′ 在糾正攝影機中的位置。此種作圖法完全決定了在糾正攝影機中的透鏡 L′ 與 SL′ 成正交的透鏡軸 $\xi\xi'$ ，底片面 n′ 及承影面 p 的相對位置，並且完全解決了糾正與放大的組合問題。

在以上的解法中，除几何定理 1 及定理 2 的運用而外，尙有一點須要証明的卽在 n′ 面上的任一點 e′′ 過 L′ 投影于 p 上后，$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{F}$ 。

由于 SK=Kep ，則從 ep 至 SL′ 線的垂距等于由 K 至 SL′ 的垂距的兩倍。卽 ep 至 SL′ 的垂距爲 2F。同理 L′ep=L′e′′，e′ 至 SL′ 的垂距也是 2F 。因此對于 e′′ 的投影到 ep 。

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{2F}+\frac{1}{2F}=\frac{1}{F}$$

而此 $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{F}$ 條件對于所有由 n′ 面過 L′ 投影至 p 面的點皆能適合。所以在糾正像片上所有的點都呈清晰的構像。

圖 5 系表示在糾正攝影機中所欲求的原傾斜像片的糾正與放大對于底片 n′ 承影面 p 透視的光心 L′ 及透鏡軸 $\xi\xi'$ 的正確關系位置。

5. 在糾正攝影機上的尺度設置

a. 具有設置尺的糾正攝影機的結構

假設糾正攝影機是以攝影機的光軸成水平，底片及承影面成垂直來設計的。圖 6 爲一平面圖，底片面以 n′ 表之，承影面以 p 表之。以符合上述的几何圖形，底片面的承影面二者均繞二垂直軸傾

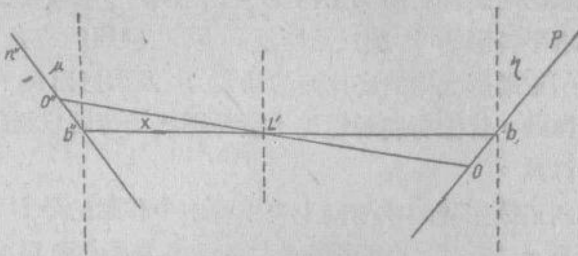

圖 6

斜，此二垂直軸全都位于過透鏡 L' 的几何軸的平面中，假設透鏡在一固定位置上不動。

對于底片匣可作旋轉運動，使底片在其匣內圍繞着透鏡軸的轉動中心旋轉。首先將底片放在底片匣內，以直線運動來對中直到主點位于底片匣的轉動中心處的透鏡軸上爲止。於是將底片面圍繞着主點在其本身的面內轉動直到垂點位于含有糾正攝影機透鏡軸的水平面上爲止。如果底片的 y 軸在最初的位置上是垂直的，則在糾正儀攝影機內的『旋轉』運動需要將底片面反時針方向轉動 S—90° 的角度。此處 S 爲主線的旋角。對于此種轉動裝有一游標以讀出其最初位置的轉動量。底片的轉動后的位置由圖 7 來說明。

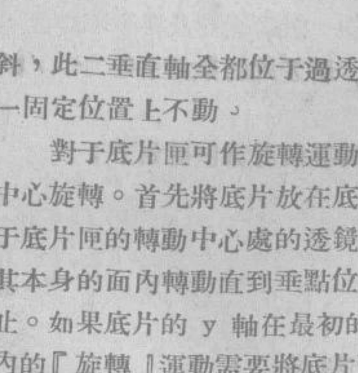

圖 7

對于在底片匣內的底片可作水平的線性運動以使得底片水平地移動一離心距離 o'b'=o''b''（見圖 5）此后圖 5 的 b'' 及 b 點位于糾正攝影機的透鏡軸上。對于此種線性運動裝有一制動螺旋及一微動螺旋，並有一游標以正確地設置出計算值 o''b'' 或 o'b'。

于是將底片圍繞着過 b'' 的垂直軸（圖 6）傾斜一數量等于 μ 角，此 μ 角等于其代表底片面的 n' 線與 SL' 線間的夾角。（圖 5）

類似地承影面圍繞着過 b 的垂直軸 ，傾斜 η 角，顯然 η 角等于其代表水平投影的 P 線或承影面與 SL′ 線間的夾角。（圖 5）

對于在糾正攝影機內的底片面的傾角 μ 及承影面的傾角 η ，這二種角度轉動，皆備有制動螺旋，微動螺旋及游標以正確地設置這些角度的計算值。

同時在糾正攝影機的水平軸上也備有水平移動的分划尺，所以在圖 6 以 x 及 y 所示的，在透鏡 L′ 的光心及底片面與承影面的傾軸間的線性距離可以精確地利用制動螺旋，微動螺旋及游標來設置。按圖 6 及圖 5 作一比較這些對于 x 及 y 所設置的數值各等于 L′b′ 及 L′b 。

作爲糾正攝影機內的直接設置之用的數値計算包括如下：

$\mu=$ 底片面的傾角

$\eta=$ 底板面的傾角

$x=L'b''$

$y=L'b$

$o''b''=$ 底片離心的在主線上的距離。

b 在糾正攝影機內的底片面與承影面的傾角公式

圖 8 爲圖 5 經簡化后的一部分，根据此圖有

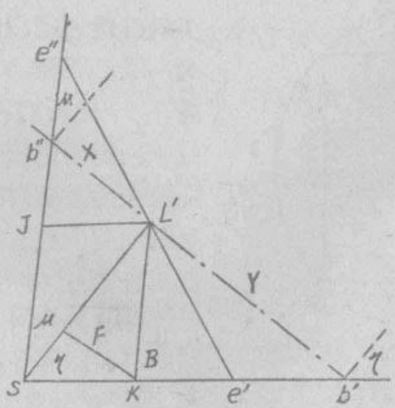

圖 8

$$S\,K = J'L' = fn \csc t$$

$$S\,J' = KL' = fp \csc t$$

$$SL' = \sqrt{fn^2\csc^2 t - F^2} + \sqrt{fp^2\csc^2 t - F^2}$$

$$= \frac{\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t} + \sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 t}}{\mathrm{Sint}}$$

$S'L'$ 的坡度 $= tg\left(\sin^{-1} \dfrac{F}{fn \csc t} \right)$

$$= tg\left(\sin^{-1} \frac{F\sin t}{fn} \right)$$

$$= \frac{F\sin t}{\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t}}$$

以 S 爲原點，p 線爲 x 軸則 L′ 及 J′ 的直角坐標爲

點 L′
$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t} + \sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 t}}{\sin t} \right)\left(\dfrac{\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t}}{fn} \right) \\ y = \left(\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t} + \sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 t} \right) \dfrac{F}{fn} \end{cases}$$

點 J′
$$\begin{cases} x = \dfrac{\left(\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t} + \sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 t}\right)\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t}}{fn \sin t} - \dfrac{fn}{\sin t} \\ \quad = \dfrac{\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t}\,\sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 t} - F^2\sin^2 t}{fn \sin t} \\ y = \left(\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t} + \sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 t} \right) \dfrac{F}{fn} \end{cases}$$

因此對于 J′，n′ 的坡度爲 $\dfrac{y}{x}$

$$\frac{\left(\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t} + \sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 t}\right)F\sin t}{\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t}\,\sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 t} - F^2\sin^2 t}$$

$\mu = n'$ 的傾角——SL' 的傾角

$$tg\mu = \frac{\dfrac{\left(\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t} + \sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 t}\right)F\sin t}{\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t}\sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 t} - F^2\sin^2 t} - \dfrac{F\sin t}{\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t}}}{1 + \dfrac{\left(\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t} + \sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 t}\right)F^2\sin^2 t}{(fn^2 - F^2\sin^2 t)\sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 t} - F^2\sin^2 t\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t}}}$$

$$= \frac{F\sin t}{\sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 t}}$$

η—SL' 的傾角

$$tg\eta = \frac{F\sin t}{\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t}}$$

C、透鏡光心至底片的傾軸及至底板傾軸的距離公式

$$x = L'b'' = SL'tg\mu = \left(\frac{\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t} + \sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 t}}{\sin t}\right)\frac{F\sin t}{\left(\sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 t}\right)}$$

$y = L'b' = SL'tg\eta$

$$= \left(\frac{\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t} + \sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 t}}{\sin t}\right)\frac{F\sin t}{\left(\sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 t}\right)}$$

于是

$$x = F\left(\frac{\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t} + \sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 t}}{\sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 t}} \right)$$

$$y = F\left(\frac{\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t} + \sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 t}}{\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t}} \right.$$

d、糾正攝影機內底片離心距的公式

現在尙須要推出底片在糾正攝影機內，當旋轉以后將其主線移至一水平位置，使 b'' 點移至透鏡軸上（見圖 5 及圖 6 ）所要的線性位移的公式。這種位移在圖 5 中爲 $o''b''$ 或 $o'b'$

$$o''b'' = o'b' = So'' - Sb'' = So' - Sb''$$

但是 $\quad So' = \dfrac{fp + fn\cos t}{\sin t}$

$$Sb'' = SL'\operatorname{Sec}\mu = \frac{\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t} + \sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 t}}{\sin t}\operatorname{Sec}\mu$$

$$= \frac{\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t} + \sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 t}}{\sin t}\sqrt{1 + tg^2\mu}$$

$$= \frac{\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t} + \sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 t}}{\sin t} \cdot \frac{fp}{\sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 t}}$$

因此

$$o'b' = o''b'' = \frac{fp + fn\cos t}{\sin t} - \left(\frac{\sqrt{fn^2 - F^2\sin^2 t} + \sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 f}}{\sin t} \right) \times \frac{fp}{\sqrt{fp^2 - F^2\sin^2 t}}$$