

石油化工设备设计参考资料

有限单元法在化工机械设计中的应用

(上册)

上海化工学院

Q050.2
S363

上海化学工业设计院石油化工设备设计建设组

目 录 (上册)

第一章	绪 论	1
第二章	有关矩阵运算的基本知识	4
§ 2-1	定义	4
§ 2-2	矩阵运算	9
§ 2-3	逆矩阵	18
§ 2-4	矩阵的分块	22
第三章	有关的力学知识	27
§ 3-1	载荷	27
§ 3-2	应力—静力平衡	29
§ 3-3	应变—几何关系	35
§ 3-4	虎克定律—物理关系	39
§ 3-5	虚功原理	48
§ 3-6	弹性力学方法与有限单元法的比较	53
第四章	平面问题	55
§ 4-1	平面应力及平面应变问题	55
§ 4-2	结构离散化	63
§ 4-3	单元特性分析	65
§ 4-4	等效节点载荷	78
§ 4-5	结构整体分布—形成基本方程组	86
§ 4-6	位移边界条件处理	92
§ 4-7	总刚度矩阵的存贮	96
§ 4-8	消去法解线代数方程组	104
§ 4-9	应变及应力的计标	116
§ 4-10	程序	118
第五章	轴对称问题	136
§ 5-1	轴对称薄壳问题	136
§ 5-2	一般轴对称问题	162
§ 5-3	一般轴对称问题程序	197

第六章	杆系	232
§ 6-1	杆系结构分析中的有限单元法概念	232
§ 6-2	杆系单元刚度矩阵	240
§ 6-3	杆系整体刚度矩阵的形成—单元刚度矩阵的集合	266
§ 6-4	杆系单元内力和应力计标	274
§ 6-5	平面杆系程序	

第一章 绪 论

近年来，随着高速电子计算机的发展，有限单元法作为结构分析的一种有效手段，发展十分迅速，应用日益广泛。目前已成功地应用于土木、水利、机械、航空及造船等行业。由于化工单体设备向大型化方向发展，对于化工机械的结构分析和强度计算提出了越来越高的要求，许多问题单靠传统的材料力学方法已经完全不能满足生产实践的要求，而经典的弹性力学方法对于一般问题虽然作了许多假设、简化，仍然难以得到解答。因此掌握和运用有限单元法这一有效的分析方法对于从事化工机械设计工作的工程技术人员来说已是十分必要的了。这本书的目的是向从事化工机械设计及应力分析的工程技术人员介绍有限单元法的基本原理，并推荐一些通用的计算程序及其应用实例。

有限单元法的基本思路，从工程角度来理解就是运用结构力学的分析方法来解决连续体的弹性力学问题。为了能用结构力学的分析方法来处理连续的弹性体，首先必须把连续的弹性体设想为由许多然而又是有限个，有限大小的形状简单的单元所组成，每个单元上有若干特殊的点——节点，各单元体在节点处按一定的方式相互联系或者相互作用。与此同时，把用连续形式描述的边界条件看作是只须在若干边界节点上应予遵守的条件。此外还应把弹性体所受的各种载荷化为统一等效的节点载荷。以上所述就是结构的离散化处理。接着对每个单元按照静力平衡、几何关系、物理关系以及相应的能量原理或变分原理建立节点力对节点位移的关系式。最后把每个单元的这种关系式，按照各个单元在节点处互相联系这一连续条件组合起来，从而得到一个其阶数等于节点基本未知量数的线性代数方程组。结合边界条件，解此方程组就可求得这些节点基本未知量。再由这些已解得的节点基本未知量去进一步求取关于单元或节点的其他未知量。从而可得到关于整个问题的一组近似数值解。

按所取的节点基本未知量的不同，有限单元法可分为力法，位移法及混合法三种类型。

下面用轴力杆件单元组成的桁架为例来说明其区别。设有杆单元 AB ，其截面为 F ，长度为 l ，材料弹性模数为 E ，以其一个端点为坐标原点，以其轴向为 X 轴建立坐标系。

现在先以节点力 P 作为基本未知量。为排除刚体位移，假设 A 点为固定铰支。由材料力学可知：

$$\sigma_x = \frac{P}{F}$$

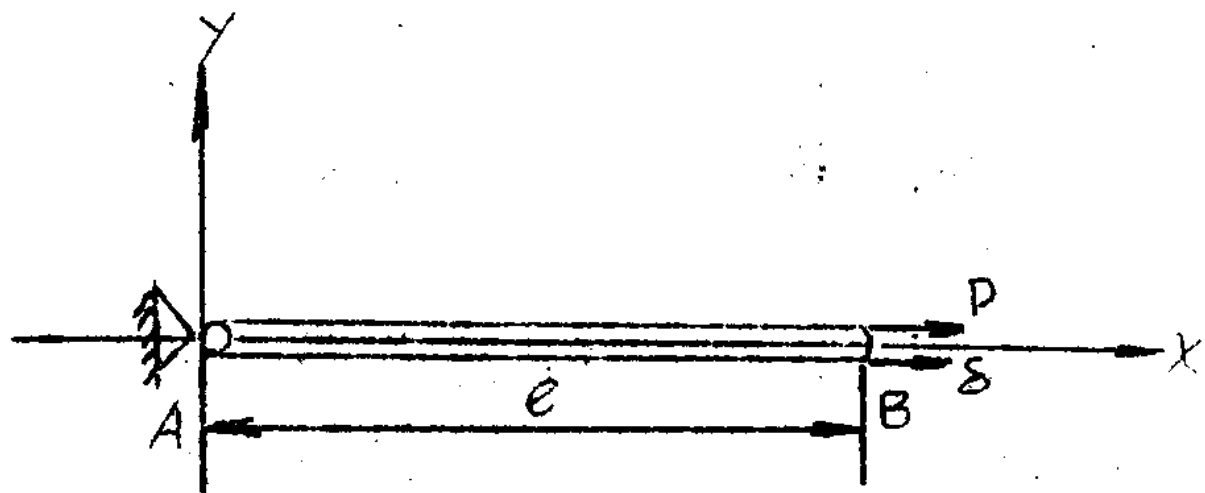
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{P}{EF} = \frac{\Delta X}{X}$$

因此，单元体内各点的位

移 ΔX 为 $\frac{PX}{EF}$ ，从而可

知节点 B 的位移为

$$\delta_B = \frac{Pl}{EF} = \frac{P}{k}$$



式中 k 称为抗拉刚度。在将各个单元集合起来组成一个整体时必须注意满足各单元在节点处是相互连接的这一变形协调条件，亦即各单元在节点处的位移最后为同一值，于是就得到了以节点力为基本未知量的线性代数方程组。解此方程组求得各节点力后节点位移及各单元的应力就可求得了。这就是力法的基本步骤。

位移法则恰好相反，它以节点的位移作为基本未知量，然后构造单元的位移插值模式，亦即建立以节点位移来表示单元内任意点位移的关系式。然后用几何关系求得单元内各点应变的表达式，再用物理关系求得单元内各点的应力表达式（注意这里应变和应力均以节点位移为变量）。最后用虚功原理建立节点位移和节点力之间的关系式。在将各单元集合起来时，注意到各单元在连接点——节点处的节点力的合力是和等效节点载荷相平衡的。于是得到了一组以节点位移为基

本未知易的线性代数方程组。求解此方程组可得到一组节点位移值，从而可求得各单元内的应力及应变值。一般说来，位移法对于建立方程及编制程序比较方便简单，对复杂结构的适应性也好，本书中将主要介绍位移法，只是对于板壳问题还将介绍一个混合法的程序。

化工机械设计及强度校核的许多问题可以使用有限单元法。经初步实践证明，结果是相当满意的。化工机械的主要零部件有许多是回转体，而且所受的载荷也往往是轴对称的，如圆筒形压力容器，透平压缩机的叶轮等，对于这些设备及零部件的应力计算，可以采用通用的轴对称程序或轴对称壳程序。对于矩形封头、加强筋及活塞式压缩机连杆等零部件，其计算可以采用关于平面问题（平面应力或应变）的程序。对于非轴对称的壳，如大口径三通等，或几何形状为轴对称而载荷非轴对称的，如受有集中力作用的圆筒体等情况，可以应用壳体计算程序。对于有些部件，如压缩机阀孔附近，压力容器开孔及接管附近的应力状态可以用三维的应力分析程序来进行计算。有些较复杂的结构，如换热器，则可看作壳、板、梁的组合结构，此时只需将各种通用程序适当组合，便可编制出能处理这类组合结构的程序。在化工机械的设计及校核中，温度应力常常起了重要的作用，有限单元法可以用来计算温度场的温度分布并据此进一步计算温度应力。由上面简单的介绍可见有限单元法对于化工机械的设计及强度校核是非常有用的，本书将向读者介绍上述各种计算程序的原理及其应用，对于如何编制适用于组合结构分析用的程序提出指导性的意见并举例说明。

鉴于有限单元法和矩阵运算的密切关系以及有关力学知识在本书的叙述及推导中将被直接引用，因而本书的前二章将专门简述这方面的内容。

第二章 关于矩阵运算的基本知识

在叙述有限单元法的基本原理及其公式的推导时，矩阵是必不可少的表达形式。这种表达形式直观性强，容易理介，运算简便，而且便于编写成计算机程序。所以有些场合有限单元法亦被理介为“结构矩阵分析法”的一种形式。鉴于矩阵及其运算在有限单元法中的地位，这一章就对矩阵作些简单介绍。

§ 2-1 定 义

一、矩阵

排成 m 行， n 列的矩阵形式的数或符号的集合称为矩阵。

如线性代数方程组：

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = y_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = y_2,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = y_3,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = y_m$$

其各个方程的系数 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ 的总体可用一个矩阵表示为：

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

在上面的矩阵中，每一横排称为行，每一纵排称为列。因此矩阵 $[A]$ 是 m 行 n 列的矩阵，也称矩阵 $[A]$ 是 $m \times n$ 阶的。有时为了

特别表达出矩阵的阶数，也可将上述矩阵记成 $[A]_{m \times n}$ 。矩阵中每一个数或符号称为矩阵的元素。如 a_{ij} 则表示矩阵 $[A]$ 中第 i 行第 j 列的元素。

矩阵的形式与行列式很相近，但二者的意义却完全不同，必须注意加以区别。矩阵与行列式至少有二点不同：第一，行列式的行数必须等于其列数，即其形式必须是方的，而矩阵不受这一限制。第二，行列式可以按一定的规则展开，从而求得行列式的值，所以行列式是代表一个具体的数；而矩阵只是一系列数或符号按一定次序排列的集合，既不能展开，也不代表某一具体的数值。

三 行矩阵及列矩阵

只有一行的矩阵称为行阵或行向量。如一个 $1 \times n$ 阶的矩阵：

$$[B] = [b_1, b_2, \dots, b_n]$$

就是一个行阵。

只有一列的矩阵称为列阵或列向量。如本节开始时提到的线性代数方程组的未知数及各方程等号右侧的已知数各组成一个 $n \times 1$ 及 $m \times 1$ 阶的列阵。

$$[x] = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \quad [y] = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{Bmatrix}$$

列阵一般用花括号来表示。为了书写方便列阵往往也表示成以下形式：

$$[x] = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t \quad [y] = [y_1, y_2, \dots, y_m]^t$$

三 方阵，对称阵，单位阵，零阵，对角线矩阵，上三角矩阵及下三角矩阵行数和列数相等的矩阵称为方阵。方阵的行数（即列数）称为方阵的阶数。方阵的左上角到右下角之间的连线称为主对角线，有时也简称为对角线。位于主对角线上的元素称为对角元。显然对角

元所在的行数等于其所在的列数。

若方阵 $[A]$ 的各元素是沿对角线对称相等的，即 $a_{ij} = a_{ji}$ ，则称矩阵 $[A]$ 为对称阵。

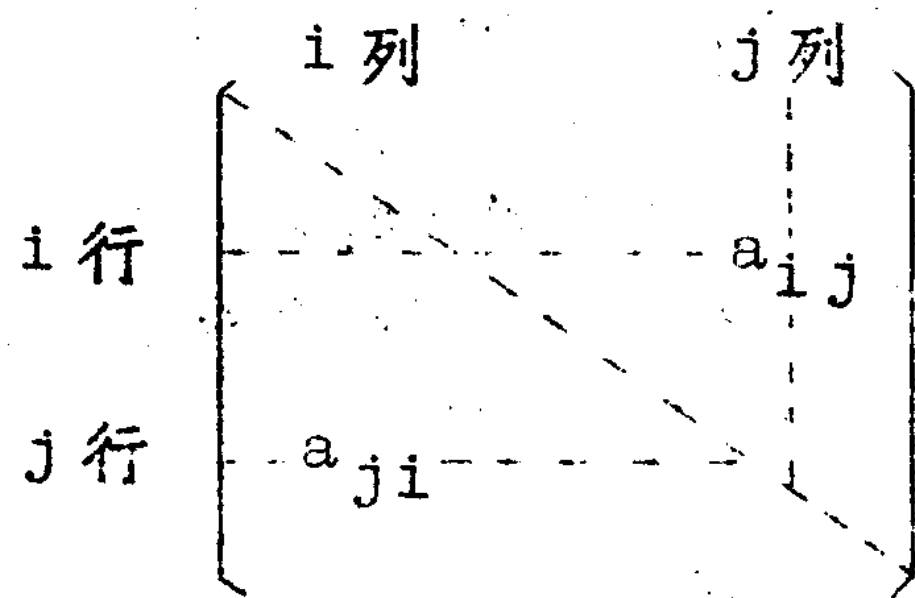


图 2-1 元素 a_{ij} 沿对角线与元素 a_{ji} 对称

方阵中除主对角元素为 1 外，其余元素均为 0，则称为单位阵，又称为么阵，往往可用 $[I]_n$ 来表示，其中 n 为该单位阵的阶数。单位阵在矩阵运算中的作用类似于普通代数运算中的常数 1。显然单位阵是对称阵。

若方阵的全部元素均为零，称该方阵为零阵。零阵可表示为 $[0]_n$ ，其中 n 是其阶数。零阵在矩阵运算中的作用和普通代数运算中零的作用一样。

若方阵除了主对角线的元素外，其余元素均为零，则称此方阵为对角线矩阵。

若方阵主对角线以下的所有元素全部为零，则称此方阵为上三角矩阵。如：

$$[u] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

反之，若方阵主对角线以上的所有元素全部为零，则称此方阵为下三角矩阵。如：

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

四、纯量：

仅由一个元素组成的 1×1 阶的矩阵，在矩阵运算中称为纯量。

五、矩阵的转置：

将矩阵 $[A]$ 的行和列依次互换，所得到的新的矩阵称为原矩阵的转置矩阵，记为 $[A]^t$ 。

如：

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad [A]^t = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 8 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

显然对称矩阵等于它的转置，即若 $[A]$ 是对称阵，则 $[A] = [A]^t$ 。
又显然转置矩阵的转置等于原矩阵，即：

$$([A]^t)^t = [A]$$

六、正交矩阵

若某一方阵，其每一行（列）各元素平方之和均为 1，而任意二个不同行（列）的对应元素乘积之和均为 0，则称该方阵为正交矩阵。

如：

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

七 对称正定矩阵

如果对于任意的 n 阶列向量 $[x]$ ，由对称阵 $[A]_{n \times n}$ 为系数矩阵的二次型恒大于零，即

$$[x]^t [A] \cdot [x] = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j > 0$$

而且只有当 $[x]$ 是零向量时，二次型才等于零。则此二次型称为正定二次型，而对应的系数矩阵 $[A]$ 称为对称正定矩阵。

对称正定阵的所有主子式都大于零，即：

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \\ \dots\dots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

这是对称正定矩阵的重要性质，是判别一个方阵是否为对称正定矩阵的充分必要条件。

由上面性质可以得到对称正定矩阵的另一个重要特性，即对称正定矩阵的所有主对元均大于零。

如果方阵 $[A]$ 是对称正定矩阵，则方阵 $[A]$ 必可逆，因此以对称正定矩阵为系数阵的线性代数方程组

$$[A][x] = [F]$$

必有唯一解。

八 矩阵在 7 1 9 机算法语言中的表示

在 7 1 9 机算法语言中，一个矩阵通常可以用一个二维数组（固定数组或半动态数组）来表示；而行阵、列阵则可以一维数组来表示。

如 $[A]_{m \times n}$, $[B]_{n \times l}$, $[B]_{n \times l}$ 及 $[x]_{n \times 1}$ 可分别用 719 机算法语言中的数值 $A(1:m, 1:n)$, $B(1:n, 1:l)$, $x(1:n)$ 来表示。而矩阵中的某一元素, 如 a_{ij} , b_{jk} , x_j 则分别为 $A(i, j)$, $B(j, k)$, $x(j)$ 。注意, 二维数组各元素在计算机内存中存贮的次序为按行存放, 如 $[A]_{m \times n}$ 的各元素在内存中存放的次序为 a_{11} , a_{12} , a_{13} , ..., a_{1n} , a_{21} , a_{22} , ..., a_{2n} , a_{31} , ..., a_{m1} , a_{m2} , a_{m3} , ..., a_{mn} 。

§ 2-2 矩阵运算

一、矩阵的相等

若矩阵 $[A]$ 和矩阵 $[B]$ 的阶数相同, 设其都是 $m \times n$ 阶, 且所有对应元素都一一相等, 即 $a_{ij} = b_{ij}$ ($i=1, 2, \dots, m$, $j=1, 2, 3, \dots, n$), 则矩阵 $[A]$ 和矩阵 $[B]$ 相等, 即 $[A] = [B]$ 。

二、矩阵的加法和减法

矩阵的加减运算仅能在同阶的矩阵间进行, 且其和或差亦为同样阶数的矩阵。和或差矩阵的各元素为相加或相减矩阵对应元素的和或差。即:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

矩阵的加法和减法满足交换律和结合律, 即:

$$[A] \pm [B] = \pm [B] + [A]$$

$$([A] \pm [B]) \pm [C] = [A] \pm ([B] \pm [C]) \quad (2-2)$$

此外还成立着：

$$([A] \pm [B])^t = [A]^t \pm [B]^t \quad (2-3)$$

三 纯量与矩阵的乘积（数乘）

纯量与矩阵相乘，就是将该纯量乘矩阵的每个元素，即：

$$\alpha[A]_{m \times n} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

显然，下列关系也是成立的：

$$(\alpha \pm \beta)[A] = \alpha[A] \pm \beta[A]$$

$$\alpha([A] \pm [B]) = \alpha[A] \pm \alpha[B]$$

$$\alpha(\beta[A]) = (\alpha\beta)[A]$$

$$\alpha([A][B]) = (\alpha[A])[B] = [A](\alpha[B])$$

$$(\alpha[A])^t = \alpha[A]^t \quad (2-5)$$

四 矩阵的乘法

∵ 若矩阵 $[A]_{m \times l}$ 的列数等于矩阵 $[B]_{l \times n}$ 的行数，则称矩阵 $[A]$ 与矩阵 $[B]$ 共形，此时可按 $[A][B]$ 的次序进行相乘，乘积矩阵 $[C]$ 的阶数为 $m \times n$ ，乘积矩阵 $[C]$ 各元素的计算公式为：

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$(i=1, 2, \cdots, m, j=1, 2, \cdots, n) \quad (2-6)$$

$$\text{如：} [A]_{3 \times 4} [B]_{4 \times 2} = [C]_{3 \times 2}$$

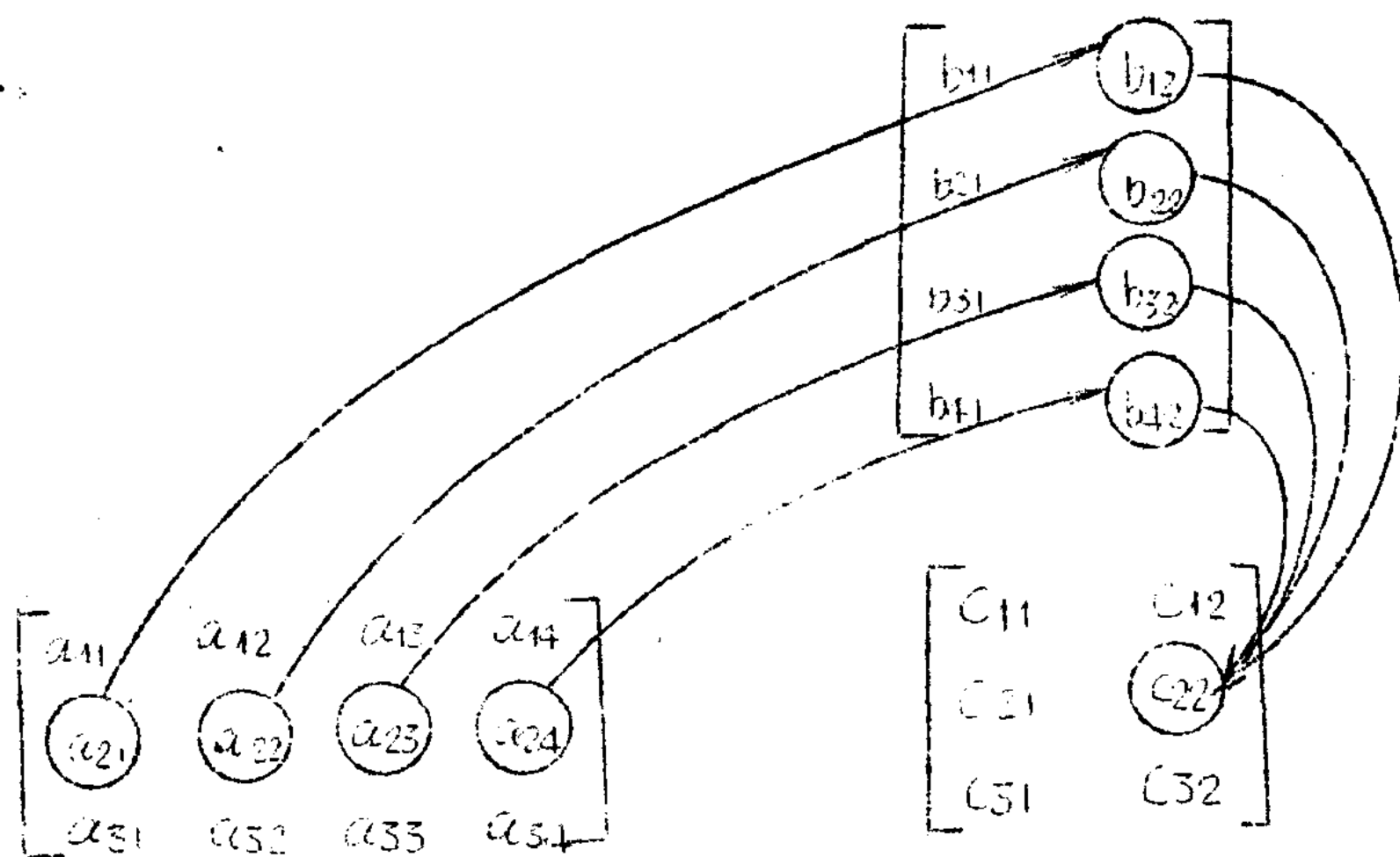


图 2-2 矩阵 $[A]_{3 \times 4}$ 与矩阵 $[B]_{4 \times 2}$ 相乘

其中： $C_{22} = a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{32} + a_{24} b_{42}$

对于 $[A]_{m \times l} \cdot [B]_{l \times n} = [C]_{m \times n}$ 的一般情形为

$$C_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ik} b_{kj} + \dots + a_{il} b_{lj}$$

$$= \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj}$$

矩阵相乘的特例是矩阵与向量的乘积（矩阵与列向量相乘及行阵与矩阵相乘）。如：

$$[A]_{m \times n} \cdot [x]_{n \times 1} = [B]_{m \times 1}$$

$$b_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (2-7)$$

实际上上式就是本章开始时所提到的线性代数方程组。又如：

$$[Y]_{1 \times m} \cdot [A]_{m \times n} = [C]_{1 \times n}$$

$$C_j = \sum_{k=1}^m Y_k a_{ki} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2-8)$$

2 关于矩阵的乘法，具有下列性质：

$$1) \lambda([A][B]) = (\lambda[A])[B] = [A](\lambda[B]) \quad (2-9)$$

当 $[B]$ 和 $[C]$ 同阶时：

$$[A]([B] + [C]) = [A][B] + [A][C]$$

$$([B] + [C])[A] = [B][A] + [C][A]$$

$$[E]([A] + [B])[F] = [E][A][F] + [E][B][F]$$

(2-10)

2) 若 $p = q, q = r$ 则：

$$[A]_{m \times p} \cdot [B]_{p \times q} \cdot [C]_{q \times n} = ([A][B])[C]$$

$$= [A]([B][C]) = [D]_{m \times n} \quad (2-11)$$

3) 一般情况下 $[A][B] \neq [B][A]$ (2-12)

由矩阵乘法的定义，必须是共形的二个矩阵才能相乘，一般

$[A]_{m \times l}$ 符合共形而 $[B]_{l \times n}$ 和 $[A]_{m \times l}$ 则不一定共形。即使 $[A]$ 共形，但其乘积一般也不等于 $[A][B]$ ，如：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

而

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

二者显然不等。所以必须注意，在等式 $[A] = [B]$ 两边乘上矩阵 $[C]$ 时，应区分“左乘”及“右乘”，二者不能相混。

4) 若 $[A][B] = [A][C]$ 不一定成立。如：

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

而 $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ 则显然不等。

在有限元素法公式推导时要用到下列定理：

若当 $[A]$ 的元素取任意数值时，等式 $[A][B]=[A][C]$ 恒成立，则 $[B]=[C]$ 。

5) 若 $[A][B]=[0]$ ，一般不能推论 $[A]=0$ ，或 $[B]=0$ ，如：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

而 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 及 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 二者显然都不是 0

6) 矩阵 $[A]$ 和单位阵相乘时，其积仍为 $[A]$ 。即：

$$[I][A]=[A], \quad [A][I]=[A] \quad (2-13)$$

7) $([A][B])^t = [B]^t [A]^t$

$$([A][B][C])^t = [C]^t [B]^t [A]^t \quad (2-14)$$

8) 若 $[B]$ 是对称阵，且 $[B][A] \neq 0$ 及 $[A]^t [B] \neq 0$ ，

则矩阵积 $[C]_{m \times n} = [A]_{m \times n}^t [B]_{n \times n} [A]_{n \times m}$ 也是对称的。

$$\begin{aligned} \therefore [C]^t &= ([A]^t [B] [A])^t = [A]^t [B]^t ([A]^t)^t \\ &= [A]^t [B] [A] = [C] \end{aligned}$$

五 矩阵的微分

1. 若矩阵 $[A]$ 的各元素是变数 S 的函数，即：

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) & \cdots & a_{1n}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) & \cdots & a_{2n}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}(s) & a_{m2}(s) & \cdots & a_{mn}(s) \end{bmatrix}$$

则 $[A]$ 对 s 的导数，是 $[A]$ 的各元素对 s 求导数后，按原次序排列的集合。即：

$$\frac{d}{ds}[A] = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds}a_{11}(s) & \frac{d}{ds}a_{12}(s) & \cdots & \frac{d}{ds}a_{1n}(s) \\ \frac{d}{ds}a_{21}(s) & \frac{d}{ds}a_{22}(s) & \cdots & \frac{d}{ds}a_{2n}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{ds}a_{m1}(s) & \frac{d}{ds}a_{m2}(s) & \cdots & \frac{d}{ds}a_{mn}(s) \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

如 $[A] = \begin{bmatrix} 2s+3 & s^2+2s \\ s & 3 \end{bmatrix}$

则 $\frac{d}{ds}[A] = \begin{bmatrix} 2 & 2(s+1) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. 在有限单元法公式推导时，往往需要一个变号 u 对列向量 $\{x\} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$ 所有各元素的微分，如： $\frac{\partial u}{\partial \{x\}}$ ，它的意义是：