

地 球 物 理 勘 探

译 文 集

第 二 辑
电 法

桂 林 冶 金 地 质 学 院

1 9 8 1 年 1 月

目 录

1. 计算二层地电断面视电阻率的两种方法 (1)
2. 温纳电极装置电阻率观测结果的直接解释方法 (8)
3. 直流电法定理及其某些结果 (13)
4. 二度不均匀体对单极和双极装置的电场响应 (27)
5. 施卢姆贝格电极装置和某些聚焦电极装置电阻率剖面图的对比 (35)
6. 地球物理方法普查白钨矿—矽卡岩矿体的有效探测深度 (43)
7. 不同电导率介质垂直接触带附近的垂直磁偶极子场 .. (46)
8. 研究某些可变电磁场的特殊函数 (56)
9. 关于各种感应法勘探的抗干扰性 (66)
10. 浸染状硫化矿激发极化现象的一种电化学模型 (70)
11. 椭球状矿体表面极化与体积极化的关系 (92)
12. 某些电极装置在薄板上方的激发极化 (IP) 和视电阻率响应的对比 ... (95)
13. 利用激发极化垂向测深研究岩石的各向异性 (1
14. 含金硫化物矿区填图的经验

计算二层地电断面视电阻率的两种方法

B·A·菲拉多夫

对于二层介质的视电阻率的计算,已提出一些新的方法。其中之一是在电法勘探装置的极距及地电断面的参数变化很大的情况下,保证解决精度可靠的问题;另一种方法是在在保证满足实际精度的情况下,与第一种方法相比,大大缩短了电子计算机的计算时间。

一、计算方法的提出和特点:

正如大家所知,在垂向电测深法中,二层介质的视电阻 $\rho_s(E)$ 的值,是与地电断面的参数和什柳姆别尔耶装置的电极距之半 γ ,用下一形式相联系:

$$\rho_s(E)(\gamma) = \rho_1 \left[1 + 2\bar{\gamma}^2 \int_0^{\infty} \theta_1(\bar{m}) \bar{m} J_1(\bar{m} \bar{\gamma}) d\bar{m} \right] \quad (1)$$

其中, $\theta_1(\bar{m}) = k_1 \varphi / (1 - k_1 \varphi)$, $\varphi(\bar{m}) = \exp(-2\bar{m})$; ρ_1 , h_1 —第一层的电阻率和厚度; ρ_2 ——厚为无限大的底层的电阻率; $J_1(\bar{m} \bar{\gamma})$ ——第一类贝塞尔函数; $R_1 = (\mu - 1) / (\mu + 1)$; $\mu = \rho_2 / \rho_1$; $\bar{m} = h_1 m$; $\bar{\gamma} = \gamma / h_1$ 。

当在很大范围内 μ 可以当作一个常数,而 $\bar{\gamma}$ 达到很大值的条件下,就需要找到一种在数量上求得具有足够精确度的视电阻率的快速方法。在垂向电测深法中,摆在我们面前的任务是,拟定出计算多层介质的视电阻率曲线的有效方法。但是,在评价解决这一任务的各种方法时,首先必须能够计算出 ρ_s ,其计算精度一般说来要高于在上述相同条件下所给定的精度。这个问题的研究还是不够的,而在B·И·晋涅别尔克的“垂向电测深法的正演和反演问题的解”一文中,大概是第一个讨论到的。电法勘探和电测井中的视电阻率的计算,通常是可以办得到的,但其精度不能控制。这是由于在对复杂的振荡函数(振荡函数的变化频率是随 γ 的增大而增大)求积分时产生的某些困难而决定的。例如,在两层介质的最简单情况下,公式(1)中的积分函数,当 $\bar{\gamma} = 1400$ 时,其积分区间实际上为4400左右。因此,在保证高计算精度的条件下,用标准计算方法来求这种函数的积分要消耗电子计算机的很多时间。因为解垂向电测深法的正演,特别是反演问题的时候,要求多次计算(1)类型的积分,很明显,就必须拟定出一些利用积分函数性质的专门方法。

这些方法中,有一种是最简单又是最著名的,那就是在电极距不大时,可保证精度地计算出二层介质的 $\rho_s(E)$ 。其方法是这样的:

设 $\mu < \infty$ 。那么函数 $\theta_1(\bar{m})$ 就可以按 $k_1 \varphi$ 的幂展成绝对收敛的级数,即

$$\theta_1(\bar{m}) = \sum_{j=1}^{\infty} (k_1 \varphi)^j \quad (2)$$

对这一级数逐项求和,我们就得到什柳姆别尔耶装置时的

$$\bar{\rho}_s(E)(\bar{\gamma}) = \rho_s(E) / \rho_1 = 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} k_1^j (R / \sqrt{k^2 + j^2})^3. \quad (3)$$

这里 $R = \bar{\gamma} / 2$ 。实际上求 n 项和, 而舍去余项, 此时的误差为:

$$\epsilon_n^{(E)} = 2 \sum_{j=n+1}^{\infty} k_1^j (R / \sqrt{R^2 + j^2})^3 \quad (4)$$

当 $\mu < 1$ 时, 根据所选择的 n 和 $\bar{\gamma}$, 由此就能轻易地评价计算误差 $\epsilon_n^{(E)}$, 或者在给定 $\bar{\gamma}$ 的情况下, 确定出一项加数, 这项加数为求得具有给定精度的 $\rho_s^{(E)}$, 则必须把它保留在公式 (3) 中。但是, 在电极距很大的情况下, 为获得令人满意的结果, 则通常需要很多项被加数。

在使用电位装置 AM 的情况下, 如果必须算出两层介质的直流点电源电位或视电阻率, 那情况就显得特别复杂化:

$$\bar{\rho}_s^{(V)} = \rho_s^{(V)} / \rho_1 = 1 + 2\bar{\gamma} \int_0^{\infty} \theta(\bar{m}) J_0(\bar{m}\bar{\gamma}) d\bar{m}, \quad (1a)$$

$$\text{或 } \bar{\rho}_s^{(V)} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} k_1^j (R / \sqrt{R^2 + j^2}) \quad (3a)$$

$$\epsilon_n^{(V)} = 2 \sum_{j=n+1}^{\infty} k_1^j (R / \sqrt{R^2 + j^2}). \quad (4a)$$

这一点将在以下的例子中说明。设 $\mu \ll 1$ 。那么级数 (4) 和级数 (4a) 所减小的误差可作如下的估算:

$$|\epsilon_n^{(E)}| < 2 (R / \sqrt{R^2 + (n+1)^2})^3 \exp[-2(n+1)\mu],$$

$$|\epsilon_n^{(V)}| < 2 (R / \sqrt{R^2 + (n+1)^2}) \exp[-2(n+1)\mu].$$

下面的 $|\epsilon_n^{(E)}(\bar{\gamma})|$ 和 $|\epsilon_n^{(V)}(\bar{\gamma})|$ 的数值是 $\mu = 0.01$;

0.001, 0.0001, $\bar{\gamma} = 100$ 和 $\bar{\gamma} = 1400$ 时所导出来的值:

n	$\epsilon_n^{(E)}(100)$	$\epsilon_n^{(E)}(1400)$	$\epsilon_n^{(V)}(100)$	$\epsilon_n^{(V)}(1400)$	μ
99	0.0242	0.263	0.0121	0.268	0.01
999	5.1×10^{-18}	7.8×10^{-10}	2×10^{-10}	2.4×10^{-9}	0.01
999	0.00003	0.051	0.0135	0.155	0.001
999	0.0002	0.309	0.0818	0.939	0.0001
9999	3.381×10^{-8}	9.2×10^{-5}	1.35×10^{-8}	0.0189	0.0001

从上述所引用的数据可看出, 在 n 确定的情况下, μ 越小, 则级数 (4) 和 (4a) 的精度就越高; 随着 $\bar{\gamma}$ 的增大, 这样的关系也会出现。此时注意到, 在这样大电极距的情况下, 二层断面的视电阻率按其数值应该与基底层的电阻率相近似。

在 $\mu \gg 1$ 时, 级数 (4) 和 (40) 较之 $\mu \ll 1$ 时收敛得更快, 即在同一种半电极距的条件下, 要达到同样一种相对精度和绝对精度, 则 $\mu = c > 1$ 较 $\mu = 1/c$ 时需要更多项数。要压缩这些项数, 并作出评价, 对不大的 $\bar{\gamma}$ 来说, 虽然可能, 但至少是较困难的, 这一点我们就不讨论了。

在本文中要解决两个任务, 在函数 $\theta(\bar{m})$ 的近似法的基础上, 计算出高精度和低精度的 $\rho^{(E)}$ 和 $\rho^{(V)}$ (但在花费电子计算机的时间不多的条件下)。现在我们就转到这个问题上来讨论。

二、断面 $\theta_1(\bar{m})$ 函数的近似法:

在公式 (3) 中, 我们可保持级数的几项, 并写出级数余项总和的表达式:

$$S_n = \theta_1(\bar{m}) - \sum_{j=1}^n (k_1 \varphi)^j = \sum_{j=n+1}^{\infty} (k_1 \varphi)^j = (k_1 \varphi)^n \theta_1(\bar{m}) \quad (6)$$

那么

$$\theta_1(\bar{m}) = \sum_{j=1}^n (k_1 \varphi)^j + (k_1 \varphi)^n \theta_1(\bar{m}) \quad (7)$$

如果我们首先舍去级数的余项,同时写出 S_n 的误差,那么,现在我们就想办法近似地计算出这个余项对 $\bar{\rho}_s^{(E)}$ 和 $\bar{\rho}_s^{(V)}$ 的贡献。将(7)式代入(1)式中,我们可得到:

$$\bar{\rho}_s^{(E)} = \Sigma E + 2\bar{\gamma}^2 k_1^n \int_0^\infty \bar{m} J_1(\bar{m}\bar{\gamma}) \theta_1(\bar{m}) \exp(-2n\bar{m}) d\bar{m} \quad (8)$$

$$\text{其中 } \Sigma E = 1 + 2 \sum_{j=1}^n k_1^j (R/\sqrt{R^2+z^2})^j$$

比较公式(4)和(8),我们可求得:

$$e_n^{(E)} = 2\bar{\gamma}^2 k_1^n \int_0^\infty \bar{m} J_1(\bar{m}\bar{\gamma}) \theta_1(\bar{m}) \exp(-2n\bar{m}) d\bar{m} \quad (9)$$

为了计算后一个积分,我们可利用B·A·菲拉多夫“借助于电子计算机来计算垂向电测深法的视电阻率”一文中,为求得多层断面的 $\bar{\rho}_s^{(E)}$ 渐近公式所提出的一些方法。其中有一种就是下面所要讨论的方法。为了近似计算出二层断面的函数 $\theta_1(\bar{m})$,我们利用公式:

$$\theta_1(\bar{m}) \approx \tilde{\theta}(\bar{m}) = (\mu - 1)/2(1 + \bar{m})/(1 + \mu\bar{m}) \exp(-2\bar{m}) \quad (10)$$

在上述这篇文章中也指出过,为计算二层断面的 $\bar{\rho}_s^{(E)}$ 而只利用这个渐近公式,在 $\mu = 1$ 时,电极距为任何数值时,就可以获得令人满意的结果。为了研究这种现象的原因,并在 $\mu < 1$ 的情况下推广这一结果,我们来讨论函数的一些性质。

现我们来求 $\theta_1(\bar{m})$ 和 $\tilde{\theta}(\bar{m})$ 之间的差值。

$$\delta_0(\bar{m}) = \theta_1(\bar{m}) - \tilde{\theta}(\bar{m}) = (\mu - 1) \{ [(\mu + 1) - (\mu - 1) \cdot \varphi]^{-1} - 0.5(1 + \bar{m})/(1 + \mu\bar{m}) \} \exp(-2\bar{m}) \quad (11)$$

由此可看出,在 $\bar{m}$ 很大的情况下, $\delta_0(\bar{m})$ 随着 $(\mu - 1)k_1/2\mu$ 的权数按指数衰减。为了研究 $\tilde{\theta}(\bar{m})$ 在小 $\bar{m}$ 时的性质,我们用分数有理函数 $\tilde{\varphi}(\bar{m}) = (1 - \bar{m} + \bar{m}^2/3)/(1 + \bar{m} + \bar{m}^2/3)$,来代替 $\varphi(\bar{m})$ 函数。

正如计算所表明,随着 $\bar{m}$ 的减少, $\tilde{\varphi}(\bar{m}) \rightarrow \varphi(\bar{m})$,而且甚至在相当大的 $\bar{m} < 1$ 时,结果是很理想的。这样,在 $\bar{m} = 0.5$ [$\varphi(\bar{m}) - \tilde{\varphi}(\bar{m}) / < 5.42 \times 10^{-4}$],而 $\bar{m} < 0.1$ 时,就可以用 $2/45 \cdot \bar{m}^3$ 的数值来估计这一差值。

用 $\tilde{\varphi}$ 代替公式(11)中的 φ ,经简单变换后,我们就得到:

$$\delta_0(\bar{m}) = 1/6 \bar{m}^3 (\mu - 1)^2 / (1 + \mu\bar{m})^2$$

作为例子,我们来求在 $\bar{m} = 10^{-3}$, $|\delta_0(\bar{m})| \approx 1/24 \cdot 10^{-3}$, $\bar{m} = 10^{-5}$, $|\delta_0(\bar{m})| \approx 1/24 \times 10^{-5}$, $\bar{m} \leq 1/\mu$, $|\delta_0(\bar{m})| \approx 1/6 \bar{m}^3$ 的情况下, $\mu = 10^3$ 的两层介质的 $\delta_0(\bar{m})$ 值。如果 $\mu < 1$ 则 $|\delta_0(\bar{m})| \leq 1/6 \bar{m}^3$ 。

当积分中的 $\bar{m}$ 为某一平均值时,0.1÷2.0就是 $\tilde{\theta}(\bar{m})$ 与 $\theta_1(\bar{m})$ 误差系数的最大值,而且如果 $\mu > 0.25$, $|\delta_0(\bar{m})|$ 的级次大概小于 $\theta_1(\bar{m})$ 的级次,那么 $\mu < 1/39$ 时,它们就可以通

分。这样一来,从某种意义上来说,函数 $\tilde{\Theta}_1(\bar{m})$ 就是一个近似值,即函数 $\tilde{\Theta}_1(\bar{m})$ 令人满意地描述了函数 $\Theta_1(\bar{m})$ 的综合性质。在同一时间内, $\tilde{\Theta}_1(\bar{m})$ 是小的 $\bar{m}$ 时的渐近线,即当 $\bar{m}$ 趋于零时,精度增高了的 $\tilde{\Theta}_1(\bar{m})$ 就趋近于 $\Theta_1(\bar{m})$ 。在大 $\bar{m}$ 时,函数 $\Theta_1(\bar{m})$ 和 $\tilde{\Theta}_1(\bar{m})$ 按指数规律衰减,并在 $\bar{m} > 10$ 时,实际上 $\Theta_1(\bar{m})$ 和 $\tilde{\Theta}_1(\bar{m})$ 对决定 $\rho_s^{(E)}$ 和 $\rho_s^{(V)}$ 的积分值的贡献是不存在的。

我们现在利用这些结果来解决我们的任务。将(10)式代入公式(9)中,我们就得到下列 $\varepsilon_n^{(E)}$ 的近似表达式:

$$\tilde{\varepsilon}_n^{(E)} = \bar{\gamma}^2 (\mu - 1) k_1^n \int_0^\infty \bar{m} J_1(\bar{m} \bar{\gamma}) (1 + \bar{m}) / (1 + \mu \bar{m}) \exp \{ - 2 \cdot (n + 1) \bar{m} \} d\bar{m} \quad (12)$$

在这个公式中,衰减因子 $\exp \{ - 2(n + 1) \bar{m} \}$ 的存在,实际上就保证了计算公式(9)中具有可靠精度的积分的可能性,也就是说,解决所提出来的任务中的第一个任务。事实上,如果组成差数 $\Delta n = \varepsilon_n^{(E)} - \tilde{\varepsilon}_n^{(E)}$,那由(9), (11), (12)式我们就可以求得:

$$\Delta n = 2 \bar{\gamma}^2 k_1^n \int_0^\infty \bar{m} J_1(\bar{m} \bar{\gamma}) \delta_0(\bar{m}) \exp(-2n\bar{m}) d\bar{m}$$

考虑到上述 $\delta_0(\bar{m})$ 的估计,并根据任务条件来选择相应的 n 值(例如100或1000)时,我们就可以求出 $\delta_0(\bar{m}) \exp(-2n\bar{m})$ 值,也就是说,在任意 $\bar{m}$ 值的情况下, Δn 可作为任意小的数。

这样一来,现在我们的任务就在于必须计算出具有高精度的(12)式积分。

三、计算 $\int_0^\infty \bar{m} k / (1 + \mu \bar{m}) \exp^{-2\bar{m}} J_0(\bar{m} \bar{\gamma}) d\bar{m}$ 类型积分的方法:

要直接计算上述类型的积分,正如前面所指出的,是会碰到一定的困难。为了克服这些困难,我们稍进行一下积分交换,这种变换是在“借助电子计算机来计算垂向电测深法的视电阻率”一文所提出来的。我们用积分 $\int_0^\infty \exp[-(1 + \mu \bar{m})t] dt$ 来代替函数 $(1 + \mu \bar{m})^{-1}$,并在变换积分顺序后,就可以得到*。

$$\varepsilon_n^{(E)} = \bar{\gamma}^2 k_1^n (\mu - 1) / \mu \cdot \int_0^\infty \bar{m} J_1(\bar{m} \bar{\gamma}) e^{-2(n+1)\bar{m}} (1 + \bar{m}) \cdot$$

$$\int_0^\infty \exp[-(1 + \mu \bar{m})t] dt d\bar{m} = (\mu - 1) / \mu \cdot k_1^n \left[(R / \sqrt{R^2 + (n + 1)^2})^3 + (\mu - 1) I_E \right] \quad (13)$$

其中 $I_E = \int_0^\infty f^3(t) e^{-t} dt = \int_0^\infty F(t) dt,$

$$f(t) = P / \sqrt{P^2 + 1}, P = R / (n + 1 + \mu t / 2) \quad (14)$$

A. 给定精度的(14)积分的计算:

* 因相应积分的绝对收敛性,故在这里积分次序的变换是可以办到的。

——原文注。

为在数量上求得(14)积分,我们利用系数法,这个方法能计算出可确定精度的 I_E 。按照采用这种方法所必须的要求,把积分域 $[0, \infty)$ 划分为三部份: $[0, d_B]$, $[d_H, d_B]$ 和 $[d_B, \infty)$ 这样一来,在第一和第三个区间上的总积分贡献就不超过某一个预先给定的 λ 值。

为了确定 d_H 和 d_B 我们来进行必要的计算。由公式(13)和(14),我们可求得:

$$(\mu - 1)^2 \mu^{-1} |k_2|^n \int_n^{d_H} e^{-t} f^s(t) dt < d_H (\mu - 1)^2 \mu^{-1} \leq \lambda,$$

$$(\mu - 1)^2 \mu^{-1} |k_1|^n \int_{d_B}^{\infty} e^{-t} f^s(t) dt < (\mu - 1)^2 \mu^{-1} \exp(-d_B) \leq \lambda$$

由此就可得到: $d_B \leq \lambda \mu (\mu - 1)^{-2} = c$, $d_B \geq |\ln c|$ 。当给定 λ 值和 μ 的变化范围时,就可以估算出 d_H 和 d_B 。对于我们的情况,设 $\lambda = 0.25 \times 10^{-6}$, $10^{-4} \leq \mu \leq 10^4$ 。由上述可知: $d_H = 0.25 \times 10^{-10}$, $d_B = 24.4$ 。在中部区间 $[d_H, d_B]$,斯克瓦依尔的积分用下列方式算出。我们把区间 $[d_H, d_B]$ 划分为初等积分的 $2N_0$,而且我们把关于 S 坐标原点的分法点 X_i ($i = -N_0, N_0$)均匀地安置在对数比例尺中,即 $X_i = S q_0^i$ 。

在这里 $S = \sqrt{d_H d_B} \ln q_0 = (0.5/N_0) \ln(d_H/d_B)$

$$\text{那么 } I_E = \sum_{i=-N_0}^{N_0} \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(e^x) e^x dx$$

这个积分可用各种不同的方法来计算。特别是斯克瓦依尔提出的确定积分值的公式,这个公式在我们的条件下,可以写成如下形式:

$$I_{NK} = 0.5 \left\{ I_{NK-1} + S \ln q_{K-1} \sum_{j=1}^{P_K} [F(S q_{K-1}^{2j-1}) q_{K-1}^{2j-1} + F(q_{K-1}^{2j-1}) \cdot q_{K-1}^{2j-1}] \right\},$$

$$P_K = 2P_{K-1}, N_K = 2N_{K-1}, q_K = \sqrt{q_{K-1}},$$

$$(K = 1, \dots, \omega), P_1 = N_0 + 1,$$

$$I_{N_0} = S \ln q_0 \left\{ F(s) + \sum_{j=1}^{N_0} [F(S/q_0) + F(S q_0^j) q_0^j] \right\}.$$

我们在电子计算机上试验已证明,研究积分是很有效的。需着重指出,在计算 I_{NK} 时,这种有效性是依靠一次计算积分函数值来达到的,同时,我们已知上述全部值 $I_{NK-1}, \dots, I_N$ (以及相应的 $\delta_{NK-1}, \dots, \delta_{N_0}$)而且不但可评价计算误差还能评价 I_{NK} 逼近 I_E 值的性质。

斯克瓦依尔所指示的 I_E 的主要性质,已被我们在计算过程中所证实。这种特性在扩大求积分 N_K 的结点数的情况下,计算 I_{NK} 的误差可看作任意小,也就是说,按全部区间 $[0, \infty)$ 计算公式(14)的积分的误差,最终结果由所选择的 d_H 和 d_B 来决定。

数值 $\epsilon_n(V)$ 对 $\rho_s(V)$ 的贡献可作类似地计算:

$$\epsilon_n(V) = k^n (\mu +) / \mu \cdot \left\{ R / \sqrt{R^2 + (n+1)^2} + (\mu + 1) I_V \right\},$$

$$\text{其中 } I_V = \int_0^{\infty} e^{-t} f(t) dt \quad (14a)$$

而 $f(t)$ 根据公式(15)来决定。

下面列出的是在电子计算机上计算出来的 $\bar{\rho}_s(E)$ 和 $\bar{\rho}_s(V)$ 值,是在 $\mu = 10^4$ 和 $\mu = 10^{-4}$ 的断面上,同时采用 $\omega = 5, n = 1000$ 时计算的。这里也给出了 Σ_E 和 Σ_V 的近似值,它是由公式(8)和(3a)中级数1000项的简单求和得到的。

根据上述设想和评价, 所计算出来的 $\bar{\rho}_s(E)$ 和 $\bar{\rho}_s(V)$ 曲线, 其误差不超过 1×10^{-6} , 而且求积分的绝对误差不超过 0.74×10^{-10} 。

γ	$\bar{\rho}_s(E)$	Σ_E	$\bar{\rho}_s(V)$	Σ_V	$\bar{\rho}_s(E)$	Σ_E	$\bar{\rho}_s(V)$	Σ_V
0.5	1.034732	1.0347	5.421592	4.629	0.974468	0.974	0.666884	0.6671
1.0	1.226100	1.226	9.387327	8.165	0.243345	0.2433	0.400821	0.4012
2.0	2.024510	2.025	17.270356	14.82	0.427556	0.4276	0.118277	0.1191
4.0	3.998565	3.998	31.761552	26.87	0.049736	0.0497	0.007441	0.0091
8.0	7.992653	7.994	57.981065	48.2	0.000361	0.00036	0.000121	0.0034
16.0	15.974578	15.97	104.884485	85.33	0.000101	0.0001	0.000100	0.0066
32.0	31.898676	31.89	187.639021	148.5	0.000100	0.0001	0.000100	0.0132
64.0	63.957667	63.57	331.118470	252.9	0.000100	0.0001	0.000100	0.0263
128.0	126.413880	126.2	574.312624	417.9	0.000100	0.0001	0.000100	0.0524
256.0	249.806954	248.3	984.312796	662.2	0.000100	0.0001	0.000100	0.1040
512.0	488.215407	477.0	1605.86433	985.8	0.000100	0.0126	0.000100	0.2030
1024.0	935.024360	857.2	2547.90476	1338.1	0.000100	0.0775	0.000100	0.3730

从电子计算机所得到的数据可看出: 虽然(3)和(3a)式级数项数足够大, 但如果仅仅作为常数, 在 γ 增加的情况下, 计算 $\bar{\rho}_s(E)$, 特别是计算 $\bar{\rho}_s(V)$ 时, 其误差要增大到什么程度。

当 μ 值在积分域(10^{-4} , 10^4)之内时, $\bar{\rho}_s(E)$ 及 $\bar{\rho}_s(V)$ 的误差就要减小, 例如, 当 $\mu = 99$ 和 $\mu = 1/99$ 时, 级数1000项的简单求和, 至少在选择 γ 的变化范围时, 保证足够高的计算精确度。

B. (14)和(14a)积分的近似计算:

为了解决这一问题, 可提供几种方法。其中一个方法是在 n 较小时, 上述所讨论过的公式的利用。计算结果表明, 在 $n = 100$ 时, 对于 μ 值在区间 $0.001 \div 1$ 的地电断面, 计算 $\bar{\rho}_s(V)$ 的绝对误差不超过 2.6×10^{-3} , 而当 $1 < \mu \leq 10^3$ 时, 不超过 3×10^{-3} , 相对误差不大于 2.6×10^{-3} , 当 $n = 10$ 时, 对于 C 值在 $10^{-2} \sim 10^2$ 区间的地电断面, 绝对误差相应地在 $1 \times 10^{-6} \sim 2 \times 10^{-3}$ 之间摆动, 而相对误差约为 2×10^{-3} 。

可是, 我们将不采用这个方法, 而采用“计算积分的参考书”中所推导出来的五点求积公式。这个公式是为函数 $f(x)$ 整个 $x'e^{-x}$ 求积分提出来的, 函数 $f(x)$ 在 $x > 0$ 半轴上连续, 并在大于 x 时, 有 $f(x) \sim C_0 + C_1/x + C_2/x^2 + \dots$ 型的展开式。公式(14)和(14a)中积分函数满足这些条件, 同时, 利用五点求积法

$$\int_0^{\infty} x'e^{-x}f(x)dx \approx \sum_{K=1}^5 A_K f(X_K) \quad (15)$$

的时候, 能获得好的结果, 而且在我们的条件下, $S = 0$ 。也就是说, 甚至当 $n = 0$ 时, 利用上述公式计算 μ 值由0.25到100的地电断面的 $\bar{\rho}_s(E)$, 所得到的结果也是不坏的。当然, 当 n 增大时, 其结果也就会变好。这样, 为计算 μ 值由 10^{-2} 到 10^3 的变化区间内的 $\bar{\rho}_s(V)$, 足可利用 $n = 100$, 而且绝对误差不超过 7.4×10^{-4} , 而相对误差小于 3×10^{-3} 。如果假设 $n = 20$, 那么绝对误差不大于0.6, 而相对误差不大于 10^{-2} 。

当利用五点求积法来计算 $\bar{\rho}_s(E)$ 的时候, 我们可设 $n = 100$ 。那么 μ 值由 10^{-2} 到 10^3 的地电断面的视电阻率曲线就可以计算出来, 其绝对误差 $< 5.2 \times 10^{-4}$, 而相对误差是 3×10^{-3} 。应着重指出, 当 $\mu > 1$ 时, 下一公式可保证有较好的结果, 公式(8)和(14)作某些变换

后就可得到这个公式:

$$\bar{\rho}_s(E) = \Sigma E + \left[(\mu - 1) / \mu \right] k_1^2 \left\{ \left[R / \sqrt{R^2 + (n+1)^2} \right]^2 + 2 \left[(\mu + 1) / \mu \right] \right. \\ \left. \left[\int_0^\infty (R / \sqrt{P^2 + 1}) e^{-t} dt - (n+1) (R / \sqrt{R^2 + (n+1)^2}) \right] \right\} \quad (16)$$

为了好比较,我们要指出,对于上述地电断面用公式(3)和(3a)100项简单求和的办法计算 $\bar{\rho}_s(E)$ 和 $\bar{\rho}_s(V)$ 的相对误差可达800。

整个计算是利用B·H·菲拉多夫编辑的课程大纲在БЭСМ—4M型电子计算机求得的。基于这些计算和说明,我们可作出如下几点结论。

1. 在 ρ_2/ρ_1 的变化范围很大的情况下,为保证计算二层介质的视电阻率的高精度,我们必须采用相应于无穷级数的足够多的项数,而它的余项用斯克瓦依尔方法来算。在这种情况下,当 $\mu > 1$ 时,用公式(16)计算 $\bar{\rho}_s(E)$ 的结果比较理想。

2. 当 μ 值由 10^{-3} 到 10^3 的区间内变化时,公式(3)和(3a)中级数100项的求和,以及利用B·И·克雷诺夫等人提出来的五点求积法公式来计算这些级数的余项是非常有效的。

最后我们要指出,所得到的结果在计算视电阻率和多层地电断面电位的有效线路的研究工作中,以及在评定解电法勘探和电测井的正演问题的质量时,都可以利用的。此外,利用上述方法,对于 $\int_0^\infty \frac{x^1}{1+2x} e^{-\beta x} J_0(rx) dx$ 类型积分的有效求积法,在包括 γ 很大的情况下,都可以办得到的。

译自1979年第七期“Геология и геофизика”

刘象勤译 胡先益 严修明校

温纳电极装置电阻率观测结果的直接解释方法

O. 柯耶福德

绪 言

我在前一篇文章中提出了一种用什柳姆别尔热 (Schlumberger) 电极装置的电阻率观测结果的直接解释方法。该方法包括两个步骤, 第一步是从所观测的视电阻率曲线推导出视电阻率积分表达式中的核函数; 第二步是由该核函数导出电阻率层。

本文的目的在于使用温纳电极装置的 (视) 电阻率观测值来适应上述方法。我知道, 纯电阻率测量时, 什柳姆别尔热电极装置用的最广泛, 而且也最值得推荐。然而, 近几年来电阻率测量常与激发极化测量一起进行 (其重要性似乎正在迅速增加)。由于什柳姆别尔热所用的测量电极距用于激发极化测量太短, 也需要用较大的测量电极距测得电阻率数值来进行解释。

本文里的解释方法是用温纳电极装置推导出来的。它是有限电极距电极装置的一种通用的方法。但是, 读者会注意到在推导过程中, 简单地改变一下距离系数, 这种方法就容易适用于有限电极距的其他电极装置。

核函数仅仅由电阻率层的特性参数决定而与所用的电极装置无关。解释的第二步, 即由核函数确定电阻率层, 它与所用的电极装置同样无关。所以, 本文中我们仅从所观测的视电阻率曲线讨论核函数的推导方法。

方 法 理 论

点电流源在水平地层的地表所产生的地表电位分布表达式已由斯蒂范尼斯可 (Stefanescu) 和什柳姆别尔热 (1930) 导出, 该表达式为

$$V = \frac{I}{2\pi} \rho_1 \left\{ \frac{1}{\gamma} + 2 \int_0^{\infty} K(\lambda) \cdot J_0(\lambda \gamma) \cdot d\lambda \right\} \quad (1)$$

其中 V 是电位, γ 是电流源到观测点的距离, I 是电流强度, ρ_1 是第一层电阻率, J_0 是零阶贝塞尔函数, $K(\lambda)$ 是由几个分界面的深度和反射系数决定的核函数。

温纳电极装置的视电阻率 $\rho_{a\omega}$ 定义为

$$\rho_{a\omega} = 4\pi a (V_A - V_B) / I \quad (2)$$

其中 a 是相邻电极之间的距离, V_A , V_B 是距离单点电流源分别为 a , $2a$ 的两个观测点的电位。其他有限电极距的电极装置的表达式可用类似方程 (2) 的形式获得; 在这些表达式中, a 必须用某些其他的距离来代替, 而且对 V_A , V_B 应重新给以定义; 此外, 如果电极装置不对称, 也许需要更多的电位项。

如果把方程 (1) 的电位表达式代入方程 (2), 则得

$$\rho_{a\omega} = \rho_1 \left\{ 1 + 4a \int_0^{\infty} K(\lambda) [J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)] d\lambda \right\} \quad (3)$$

现在用局部函数 $\Delta K(\lambda)$ 的总和来逼近 $K(\lambda)$ 则有

$$K(\lambda) \cong \sum \Delta K(\lambda) \quad (4)$$

按照方程(3)也可用局部函数 $\Delta\rho_{a\omega}$ 之和来逼近 $(\rho_{a\omega} - \rho_1)$, 因此

$$(\rho_{a\omega} - \rho_1) \cong \sum \Delta\rho_{a\omega} \quad (5)$$

其中 $\Delta\rho_{a\omega}$ 用方程

$$\Delta\rho_{a\omega} = 4\rho_1 a \int_0^{\infty} \Delta K(\lambda) [J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)] d\lambda \quad (6)$$

来定义。

由此方程看出, $\Delta\rho_{a\omega}$ 象 $\rho_{a\omega}$ 一样, 是电极距 a 的函数。

从什柳姆别尔热电极装置出发, $\Delta\rho_a$ 相应的表达式有可能导出相应 $\Delta K(\lambda)$ 的一个明显的方程(见Koeford 1965, 方程 8), 因此, 可选择适当的一些 $\Delta\rho_a$ 函数并推导出对应于 $\Delta\rho_a$ 的 $\Delta K(\lambda)$ 的表达式。但是, 就我所知, 要从方程 6 来推导 $\Delta K(\lambda)$ 的一个明显的表达式是不可能的。所以, 对有限电极装置必须从适合于 $\Delta K(\lambda)$ 的一些函数出发, 而后推导出对应于 $\Delta K(\lambda)$ 的 $\Delta\rho_{a\omega}$ 函数。为此目的, 我们将选择由什柳姆别尔热装置所获的 $\Delta K(\lambda)$ 的一些函数, 使这些函数对测量电极距有限的电极装置也给出适合于 $\Delta\rho_a$ 的表达式是合理的。

用一些无理数的代数函数逼近电阻率曲线

首先将前一篇论文(Koeford, 1965)中表 I 所给定的 $\Delta K(\lambda)$ 表达式代入方程(6)。

这些表达式的第二项是 $-\frac{1}{2}e^{-\varphi\lambda}$ 。对应的 $\Delta\rho_{a\omega}$ 表达式可应用众所周知的定理导出(参看Watson, 1962, 十三章第二节方程 1)。

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda\varphi} J_0(\lambda Y) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{Y^2 + \varphi^2}} \quad (7)$$

利用此方程以 $\Delta K(\lambda) = \frac{1}{2}e^{-\varphi\lambda}$ 代入方程(6)得

$$\Delta\rho_{a\omega} = 2\rho_1 a \left\{ \frac{1}{\sqrt{a^2 + \varphi^2}} - \frac{1}{\sqrt{4a^2 + \varphi^2}} \right\} \quad (8)$$

我前文中表 I 的第二个 $\Delta K(\lambda)$ 表达式是把第一个 $\Delta K(\lambda)$ 对 φ 求导并乘以 $-\varphi/3$ 而得到的。而 $\Delta\rho_{a\omega}$ 的相应表达式则是对方程(8)的 $\Delta\rho_{a\omega}$ 使用相同的运算得到的, 其结果为

$$\Delta\rho_{a\omega} = \frac{2}{3} \rho_1 \left\{ \frac{a\varphi^2}{(a^2 + \varphi^2)^{3/2}} - \frac{a\varphi^2}{(4a^2 + \varphi^2)^{3/2}} \right\} \quad (9)$$

我1965年文中表 I 的第三个 $\Delta K(\lambda)$ 表达式是第二个 $\Delta K(\lambda)$ 表达式除以 φ^2 , 然后对 φ 求导, 最后乘以 $-\varphi^3/5$ 得到的, 相应的 $\Delta\rho_{a\omega}$ 表达式是对方程 9 右边项使用相同的运算得到的, 其结果为

$$\Delta\rho_{a\omega} = \frac{2}{5} \rho_1 \left\{ \frac{a\varphi^4}{(a^2 + \varphi^2)^{5/2}} - \frac{a\varphi^4}{(4a^2 + \varphi^2)^{5/2}} \right\} \quad (10)$$

第四个 $\Delta\rho_{a\omega}$ 表达式同样是将方程10右边项除以 φ^4 , 然后对 φ 求导, 最后乘以 $-\varphi^5/7$ 得到的, 其结果为

$$\Delta\rho_{a\omega} = \frac{2}{7} \rho_1 \left\{ \frac{a\varphi^6}{(a^2 + \varphi^2)^{7/2}} - \frac{a\varphi^6}{(4a^2 + \varphi^2)^{7/2}} \right\} \quad (11)$$

方程(8)至方程(11)的 $\Delta\rho_{a\omega}$ 与对应的 $\Delta K(\lambda)$ 一起归纳在表 I。我1965年文中表 I 的最后三个 $\Delta K(\lambda)$ 以及相应的 $\Delta\rho_a$ 与 $\Delta\rho_{a\omega}$ 可根据最初的四个函数的线性组合得到。因此第五个 $\Delta K(\lambda)$ 等于第一个 $\Delta K(\lambda)$ 与第二个 $\Delta K(\lambda)$ 之差, 第六个 $\Delta K(\lambda)$ 等于第二个 $\Delta K(\lambda)$

与第三个 $\Delta K(\lambda)$ 之差，第七个 $\Delta K(\lambda)$ 等于第三个 $\Delta K(\lambda)$ 与第四个 $\Delta K(\lambda)$ 之差。

图1是表I中一些 $\Delta \rho_{\text{a}\omega}$ 的曲线。将这些曲线与相应的什柳姆别尔热装置曲线(Koeford 1965, 图3和图5)对比表明温纳装置的曲线形状与什柳姆别尔热装置的曲线形状非常相似，但是温纳装置曲线沿 a/φ 轴相对于什柳姆别尔热装置曲线位移了约0.75单位。然而，就是这个位移。温纳装置曲线也不能同什柳姆别尔热曲线完全重合。

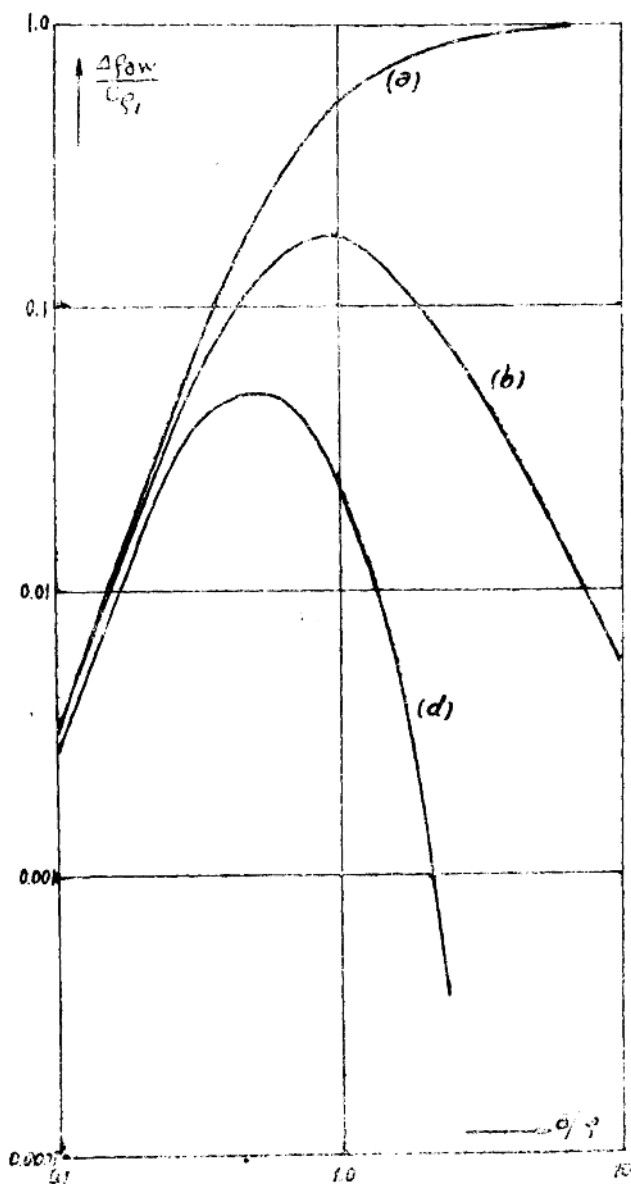


图1 列在表I中一些函数的温纳视电阻率曲线。

表 I

温纳视电阻率增量与相应的核函数增量

$\Delta \rho_{aw}(a) / C \rho_1$		$\Delta K(\lambda) / C$	符号
$\frac{2a}{\sqrt{a^2 + \varphi^2}}$	$\frac{2a}{\sqrt{4a^2 + \varphi^2}}$	$\frac{1}{2} e^{-\varphi \lambda}$	a
$\frac{2a\varphi^2}{3(a^2 + \varphi^2)^{3/2}}$	$\frac{2a\varphi^2}{3(4a^2 + \varphi^2)^{3/2}}$	$\frac{1}{6} (\varphi \lambda) e^{-\varphi \lambda}$	b
$\frac{2a\varphi^4}{5(a^2 + \varphi^2)^{5/2}}$	$\frac{2a\varphi^4}{5(4a^2 + \varphi^2)^{5/2}}$	$\frac{1}{30} (\varphi^2 \lambda^2 + \varphi \lambda) e^{-\varphi \lambda}$	c
$\frac{2a\varphi^6}{7(a^2 + \varphi^2)^{7/2}}$	$\frac{2a\varphi^6}{7(4a^2 + \varphi^2)^{7/2}}$	$\frac{1}{210} (\varphi^3 \lambda^3 + 3\varphi^2 \lambda^2 + 3\varphi \lambda) e^{-\varphi \lambda}$	d

用指数函数逼近视电阻率曲线

要找对应于我前文(Koeford, 1961)表 II 中 $\Delta k(\lambda)$ 的 $\Delta \rho_{aw}$, 我们从本文方程(7)出发,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda \varphi} J_0(\lambda \gamma) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + \varphi^2}}$$

并使这个方程服从汉克尔(Hankel)变换(见Watson, 1962, 第十四章第三节方程3), 此结果为

$$\int_0^\infty \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \varphi^2}} \cdot J_0(\lambda \gamma) d\gamma = \frac{1}{\lambda} e^{-\varphi \lambda} \quad (12)$$

现在变换符号, 将 λ 代换 γ , a 代换 λ , η 代换 φ 则得

$$\int_0^\infty \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \eta^2}} \cdot J_0(\lambda a) \cdot d\lambda = \frac{1}{a} e^{-\eta a} \quad (13)$$

要找对应于我前文表 II 中的第三个 $\Delta k(\lambda)$ 的 $\Delta \rho_{aw}$, 我们把方程(13)对 η 求导并乘以 $-\eta/2$, 其结果为

$$\int_0^\infty \frac{(\lambda/\eta)}{2\{1 + (\lambda/\eta)^2\}^{3/2}} \cdot J_0(\lambda a) \cdot d\lambda = -\frac{\eta}{2} e^{-\eta a} \quad (14)$$

当

$$\Delta k(\lambda) = \frac{(\lambda/\eta)}{2\{1 + (\lambda/\eta)^2\}^{3/2}}$$

时, 综合方程(14)与方程(6)得

$$\Delta \rho_{aw} = 2\rho_1 \eta a (e^{-\eta a} - e^{-2\eta a}) \quad (15)$$

其次, 将方程(14)两边除以 η^2 , 然后对 η 求导最后乘以 $-\eta^3$, 其结果为

$$\int_0^\infty \frac{3(\lambda/\eta)}{2\{1 + (\lambda/\eta)^2\}^{5/2}} J_0(\lambda a) \cdot d\lambda = \left(\frac{a\eta^2}{2} + \frac{\eta}{2}\right) e^{-\eta a} \quad (16)$$

当

$$\Delta k(\lambda) = \frac{3(\lambda/\eta)}{2\{1 + (\lambda/\eta)^2\}^{5/2}}$$

时, 综合方程(16)与方程(6)得

$$\rho_{aw} = \rho_1 \{ (2a\eta + 2a^2\eta^2) e^{-\eta a} - (2a\eta + 4a^2\eta^2) e^{-2\eta a} \} \quad (17)$$

我们虽然不能用初等函数的形式来表示对应于我前文表 II 中前两个 $\Delta k(\lambda)$ 函数的 $\Delta \rho_{aw}$, 然而, 从另一方面来说, 可从方程(13)直接得到所考虑的这种类型的一对附加函数。如果把 这个方程同方程(6)结合起来, 当

$$\Delta k(\lambda) = \frac{(\lambda/\eta)}{2\sqrt{1 + (\lambda/\eta)^2}}$$

时, 我们找到

$$\Delta \rho_{aw} = \rho_1 (2e^{-\eta a} - e^{-2\eta a}) \quad (19)$$

表 II

温纳视电阻率增量与对应的核函数增量

$\Delta \rho_{aw}(a) / C\rho_1$	$\Delta k(\lambda) / C$	符 号
$2e^{-\eta a} - e^{-2\eta a}$	$\frac{(\lambda/\eta)}{2\{1 + (\lambda/\eta)^2\}^{1/2}}$	a
$2\eta a \cdot e^{-\eta a} - 2\eta a \cdot e^{-2\eta a}$	$\frac{(\lambda/\eta)}{2\{1 + (\lambda/\eta)^2\}^{3/2}}$	b
$(2\eta a + 2\eta^2 a^2) \cdot e^{-\eta a} - (2\eta a + 4\eta^2 a^2)e^{-2\eta a}$	$\frac{(\lambda/\eta)}{2\{1 + (\lambda/\eta)^2\}^{5/2}}$	c

方程(19), (15), (17)的 $\Delta \rho_{aw}$ 与对应的 $\Delta k(\lambda)$ 函数一起列在本文表 II。

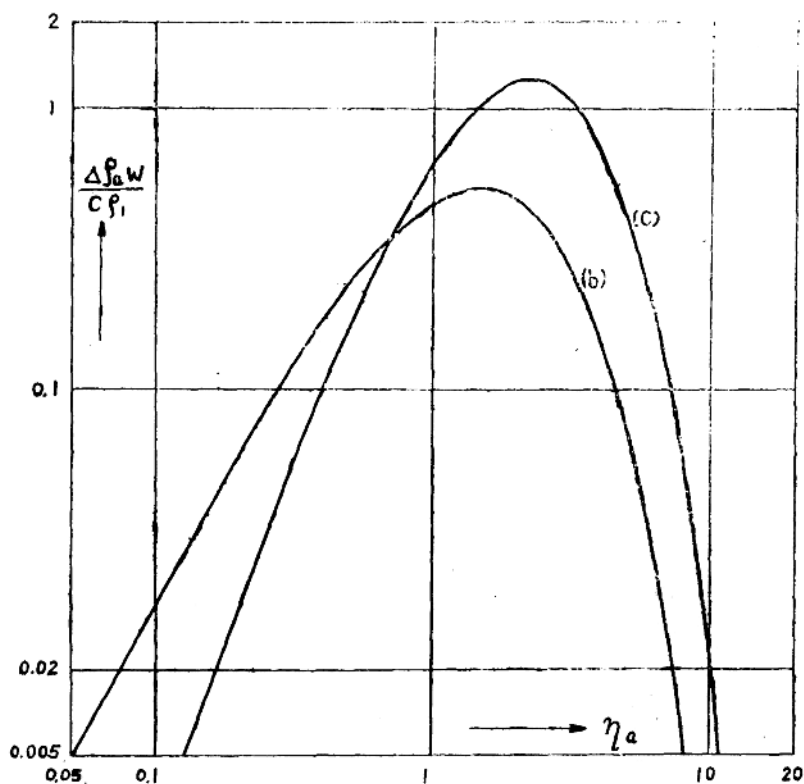


图2 列在表 II 的一些函数的温纳视电阻率曲线

直流法定理及其某些结果

A · Roy

1. 引言

在早些时发表的文章中 (Roy和Dhar 1971、Roy和Apparao 1971、Roy 1974) 对于单个地层元在电法测得的总信号中所起作用引进一种概念, 根据与静电场直观类比, 假设每个地层元的作用为 $k \nabla \psi \cdot \nabla \phi dV$, 其中 $k = 1/2\pi$ 或 $1/4\pi$, ϕ 是不论用什么方法先已确定的电位分布, $\psi = 1/r$, r 是此体积元与电位测量点之间的距离, dV 是所研究的体积元, 在该元上求其梯度值。对于均匀大地或层状介质, 对下半空间的各个体积元所产生的作用求和或求其积分, 即可获得在地面上任何电极装置接收点上总信号的正确值, 我们认为, 但不证明这些结果不是偶然的而普遍是真实的。

Koefoed (1972) 正式对这种类比进行了研究并在均匀半空间的情况下为假设提供了理论证明。在这篇论文里, 我们对上述假设现在定一个公式或一条定理提出了一种独立的证明, 不依靠类比, 也不受均匀体或其他条件的限制。

2. 假设的证明: 定理

我们仍从格林的第一个恒等式出发, 即

$$\iiint_V \nabla \psi \cdot \nabla \phi dV + \iiint_V \psi \nabla^2 \phi dV = \iint_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \quad (1)$$

其中, ψ 和 ϕ 是位置的两个标量函数, ψ 和 ϕ 以及它们的一阶、二阶导数, 在整个体积 V 内及边界面 S 上都是连续的。(图 1)

均匀情况

假设体积 V 为无限大的区域为电导率 σ 的均匀介质所充满, 因此边界面 S 在 origin 周围扩展到离 origin 无穷远, ϕ 是在离 origin 有限距离内强度为 I 的点电流源产生的电位, ψ 等于 $1/r$, 其

图 2 是表 II 最后两个 $\Delta\rho_{aw}$ 的曲线, 与什柳姆别尔热电极装置对应的函数曲线 (见 Koeford, 1965, 图 12) 相对比, 再次表明温纳装置的曲线形状与什柳姆别尔热装置的曲线形状是相似的。但是相对于后者似乎沿 ηa 轴位移了约 0.75 个单位。然而, 就是这样位移, 温纳装置曲线与什柳姆别尔热装置曲线也不会完全重合。

由方程 19 定义的 $\Delta\rho_{aw}$ 曲线形状不同于绘在图 2 的曲线。从方程 19 容易看出, 当 ηa 趋于零, $\Delta\rho_{aw}$ 逐渐趋于 ρ_1 , 而当 ηa 变为无限大则 $\Delta\rho_{aw}$ 趋于零。

陈景星译

吴英隆校

“geophysical prospecting”

Volume XIV, Number 1

March, 1966

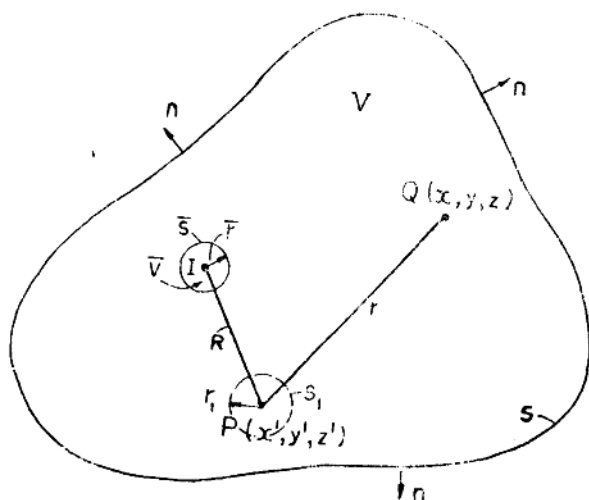


图1 方程(1)和(10)的几何关系

中 $\bar{r}$ 是原点附近的一个固定点 $P(x', y', z')$ 和变动点 $Q(x, y, z)$ 之间的距离。由于这种恒等性, 方程(1)右边的面积分为零, 因为 $\psi \frac{\partial \phi}{\partial n}$ 随 $1/r^2$ 减小而 S 仅随 r^2 增大。 $\nabla^2 \phi$ 在供电点围绕半径为 $\bar{r}$ 的无穷小的球形体积 $\bar{V}$ 之外处处为零, 所以方程(1)可以重新写成:

$$\iiint_V \nabla \psi \cdot \nabla \phi dV + \lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \iiint_{\bar{V}} \psi \nabla^2 \phi d\bar{V} = 0 \quad (2)$$

其中, 梯度和体积元只与不带撇的坐标 (x, y, z) 有关。

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \bar{L} \lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \iiint_{\bar{V}} \psi \nabla^2 \phi d\bar{V} &= -\frac{1}{R} \cdot \bar{L} \lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \iiint_{\bar{V}} \nabla \cdot E d\bar{V} \\ &= -\frac{1}{R\sigma} \cdot \bar{L} \lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \iint_{\bar{S}} J \cdot n d\bar{S} \\ &= -\frac{1}{R\sigma} \cdot \bar{L} \lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4\pi \bar{r}^2} \cdot 4\pi \bar{r}^2 \right) \\ &= -\frac{I}{R\sigma} \quad (3) \\ &= -4\pi \phi_P \quad (3') \end{aligned}$$

其中, $E = -\nabla \phi$, $J =$ 电流密度 $= \sigma E$, 而 ϕ_P 是点电流源 I 在距离为 R (图1)的 P 点所产生的电位, 把关系式(3)和(3')代入方程(2), 便得:

$$\iiint_V \nabla \psi \cdot \nabla \phi dV = \frac{I}{\sigma R} = 4\pi \phi_P \quad (4)$$

它证明了假设或建立了均匀无限空间的定理。于是, P 点的电位可认为是点电流源 I 的

直接作用结果或是这些体积元间接作用结果的和。

不均匀情况

对于一个无限电导率为 $\sigma(x, y, z)$ 不均匀全空间, 方程 (1) 的面积分仍然等于零, 即

$$\begin{aligned} & \iiint_V \nabla \psi \cdot \nabla \phi \, dv + \iiint_V \psi \nabla^2 \phi \, dv = 0 \\ \text{或} & \iiint_V \nabla \psi \cdot \nabla \phi \, dv - \iiint_V \psi \nabla \cdot E \, dv = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

其中, 所有符号的意义都与图 1 相同。现在要记住 σ 是位置的函数。

$$\nabla \cdot \sigma E = \nabla \sigma \cdot E + \sigma \nabla \cdot E$$

$$\text{或} \nabla \cdot E = (\nabla \cdot \sigma E - \nabla \sigma \cdot E) / \sigma \quad (6)$$

利用关系 (6) 来替换方程 (5) 中的 $\nabla \cdot E$, 则得:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \nabla \psi \cdot \nabla \phi \, dv = \iiint_V \psi [(\nabla \cdot \sigma E - \nabla \sigma \cdot E) / \sigma] \, dv = 0 \\ \text{或} & \iiint_V \nabla \psi \cdot \nabla \phi \, dv = \iiint_V \frac{\nabla \cdot J + \nabla \sigma \cdot \nabla \phi}{\sigma} \, dv \end{aligned} \quad (7)$$

其中, J 是在 $Q(x, y, z)$ 点的电流密度矢量, 已知方程式 (7) 的右边等于 $4\pi\phi_P$ (Vozoff 1960)。方程 (7) 右边的第一项是解电位的齐次微分方程给出的一次电位, 而第二项表示不均匀体的存在产生的扰动电位。要注意, 如果点电流源不止一个所在位置是在电导率为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 等等的介质中, P 点的一次电位将是:

$[I_1/\sigma_1 R_1 + I_2/\sigma_2 R_2 + I_3/\sigma_3 R_3 + \dots] / 4\pi$, 其中, $R_1, R_2, R_3, \dots$ 是 P 到点电流源 $I_1, I_2, I_3, \dots$ 的距离。现在 ϕ 可以写成下式:

$$\phi_P = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\nabla \cdot J + \nabla \sigma \cdot \nabla \phi}{\sigma} \, dv = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \nabla \psi \cdot \nabla \phi \, dv \quad (8)$$

对于均匀介质, $\nabla \sigma = 0$, 方程 (8) 简化成方程 (4), 这就证实了我们的定理: 在任何各向同性的地中, 任意一点 P 的电位能用下式计算:

$$\phi_P = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \nabla(1/r) \cdot \nabla \phi \, dv \quad (9)$$

在这里是对整个空间求积分, 而且电位的分布 ϕ 是用常规方法获得的, 原来在 Roy 和 Apparao (1971) 及 Roy (1974) 的文章中系数用的是 $1/2\pi$, 而不是 $1/4\pi$, 仅对下半空间积分, 我们将会看到的那样, 对于水平地壳, 由于事实上不管 P 和电流源的位置如何, P 点之上的半空间和 P 点之下的半空间作用总是相等的, 所以仍然获得精确的结果。

在求方程 (9) 中的体积分时, 需特别研究以下三种极限情况:

(I) $Q \rightarrow P$: $\nabla(1/r)$ 随 $(1/r^2)$ 增大, $\nabla \phi$ 仍为有限值, dv 随 r^3 减小, 而被积函数随 r 趋于零而变为无穷小。

(II) $Q \rightarrow I$: $\nabla(1/r)$ 为有限值, $\nabla \phi$ 随 $1/L^2$ 增大 (L 是 Q 与 I 之间的距离), dv 随 L^3 而减小, 而当 Q 趋于 I 时被积函数趋于零。

(III) P 和 Q 远 $\rightarrow I$: $\nabla(1/r)$ 随 $1/r^2$ 增大, dv 随 r^3 减小, 而被积函数有如 $1/r$ 不定限地增大。