近世代數學

B. L. van der Waerden 著

蕭　　君　　絳　　譯

卷　　下

近世代數學

B. L. van der Waerden 著

蕭 君 絳 譯

卷 下

1943

中華民國三十二年雙十節出版

大學教科用書 近世代數學

共兩冊（下）

著者 B. L. van der Waerden

譯者 蕭君絳

樂山老霄頂三清宮
印刷所 文化印書館
代表者 蕭 絜

發行者 國立武漢大學數學室

313

節譯再版原序

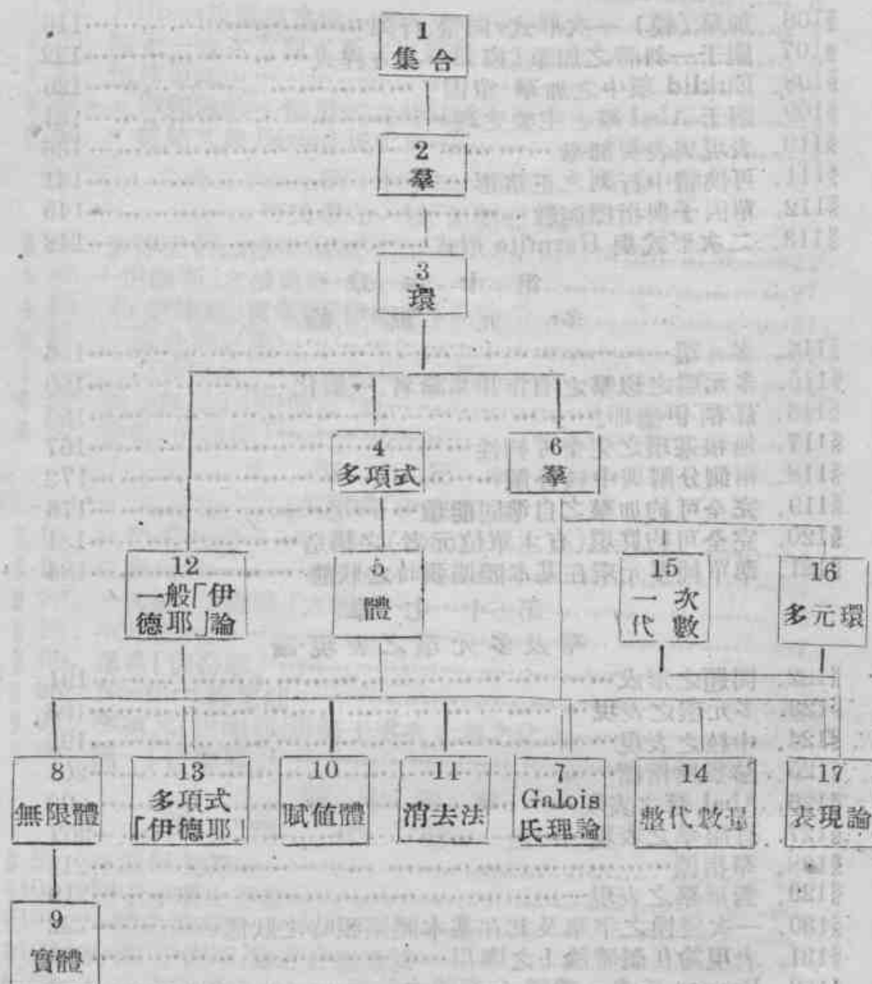
今值本卷再版，如卷一然，迺重加訂正，幾無一章不涉及之.最甚者莫末兩章若，其所論爲多元數暨其表現者.以多元環理論之月異日新突飛孟晉也，故應之而大予擴充，多加改造.顧於多項式「伊德耶」方面，斯有若干付諸删削；無他，與其謂之曰屬于代數學，無寧曰屬於代數幾何學者多也.

於 Leipzig，一九四零年二月.

B. L. van der Waerden.

系統表

（此表乃兩卷各章及其邏輯的關聯性之鳥瞰）



313

目 錄

第十一章
消去法論

第十二章
可換環之一般「伊德耶」論

第十三章
多項式「伊德耶」論

第十四章
整代數量

頁

第 十 五 章

一 次 代 數

第 十 六 章

多 元 數 論

第 十 七 章

羣及多元環之表現論

第十一章

消去法論

消去法論者，乃研究多個未知數之代數方程式系，並求其可解性條件，俾建立公式以資在各種不同情形下解之計算者也．以故相應之一次方程式論即行列式論須假定為已知者．此外尚有須假定為已知者，即一個一未知數之高次方程式為能解是，詳言之，當方程式在一所與體中尚非可解時，能作一擴張體，使於其中為可解，且此一擴張體，方程式在其內得全分裂者是(章5)．迨後所謂「一方程式之解」或「一多項式之零點」云者，恆係是種解之在確定可換基本體K之一適擇擴張體中者之意．

§77. 多個一變數多項式之終結式系

定理．對於r個一變數多項式$f_1,\cdots,f_r$其次數為n與而係數為未定者，有關於此諸係數之整值多項式$D_1,\cdots\cdots,D_h$而具次性質者之一系存，即對係數之取自一體K者之特殊值，$D_1=0,\cdots\cdots,D_h=0$乃為方程式$f_1=0,\cdots\cdots,f_r=0$在一適當擴張體內為可解，或凡此諸多項式$f_1,\cdots,f_r$之形式的首係數皆為零之必要而且充分之條件．

證明可依 Kronecker 氏消去法以行之．

首變多項式$f_1,\cdots,f_r$為等次數多項式，此當n為其(形式的)次數之最高者時，將每多項式f_i之為較小次數n_i者以x^{n-n_i}及以$(x-1)^{n-n_i}$乘

之卽得;於是由f_i旋有兩個形式的次數爲n者之多項式成立,其公零點,對於係數之某一特殊化,與f_i之零點一致,而其首係數亦與f_i者一致.若斯所成等次數多項式之一系,卽令所含較系$f_1,\cdots,f_r$中多項式爲多,但其所有公零點恰爲同一,玆以$g_1,\cdots,g_s$記之.

今自$g_1,\cdots\cdots,g_s$作一次結合式

$$g_u=u_1g_1+\cdots+u_sg_s;\ g_v=v_1g_1+\cdots+v_sg_s$$

其u,v爲未定元而以添加於體K者也.當g_u與g_v對於$g_1,\cdots,g_s$之係數之特殊值有一因子公共時,此因子得由u與v有理而定(§18).但一個實際關聯於v之有理因子,由g_u之分解不足以得之,因g_u與v無關故.故g_u與g_v之每公因子,必與v,同樣與u無關,因之卽得整除$g_1,g_2,\cdots,g_s$也.反之,若$g_1,\cdots,g_s$有一因子公共,此因子亦整除g_u與g_v.

是故g_u與g_v欲有一公因子,或其中其首係數爲零,其終結式R之爲零

(1) $$R=0\ (\text{對于 } u \text{ 與 } v \text{ 皆恆等的})$$

是所必要而且充分.玆將R依u與v之冪積整列之而名其係數曰$D_1,\cdots,D_h$,則(1)與 $D_1=0,\ D_2=0,\cdots,D_h=0$

同值.但D_i爲$f_1,\cdots,f_r$之未定係數之整値多項式.由是而定理全證.

此$D_1,\cdots,D_h$一系曰多項式$f_1,\cdots,f_r$之<u>終結式系</u>(Resultantensystem).

由§27則有 $R\equiv 0\ (g_u,g_v)$

$$\equiv 0\ (g_1,\cdots,g_s)$$

$$\equiv 0\,(f_1, f_2, \cdots, f_r),$$

再由是,若就所述依u_i與v_i之冪積而整列之,即得

$$(2)\qquad (D_1, \cdots, D_h) \equiv 0\,(f_1, \cdots, f_r).$$

注意.1.若自始即知多項式f_r中之一個如f_1其形式的首係數不為零者,凡將多項式f_r變為等次數者之準備運算可全免.此外此時並可將計算簡化,即毋庸作g_u與g_v之終結式,只作f_1與$v_2 f_2+\cdots+v_r f_r$者便足.

2.在所有首係數皆為零者之例外情形時,如於§27然,以之為x_1與x_2之齊次形式,則形式上得以避之,是所當然.於是由f_i以作g_i,以$x_1^{n-n_i}$與$x_2^{n-n_i}$代替以x^{n-n_i}與$(x-1)^{n-n_i}$乘之即得.

3.在單獨一多項式時,應用上述方法乃得一條由零而成之終結式系.

§78. 一般消去法論

以下,$\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$常為確定基本體K上一適擇擴張體中n個附有號數者之元一系列之意.若一多項式f有$f(\xi_1, \cdots, \xi_n)=0$一性質,則曰系列$\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$(或簡曰$\xi$)為$f$之一零點(Nullstelle).一般消去法論,乃論一問題,即對一任意代數方程式系

$$f_1(\xi)=0,\ f_2(\xi)=0, \cdots, f_r(\xi)=0$$

之一切解,換言之對K$[x_1, \cdots, x_n]$之多項式$f_1, \cdots, f_r$所有公零點至少理論上予以決定是.【注:實際其相關計算恒能較見諸實行者複雜異常.】

關乎此之方法,係借助前節終結式系而將所有未知數「陸續消去」者.

於是爲適合目的計，乃假定系$f_1,\cdots,f_r$內有一或爲α次之多項式在，其中x_1^α之係數爲一異於零之常數.此要求有時自然即可滿足；否則如次處理：即或凡多項式$f_1,\cdots,f_r$皆恆等爲零，此時所有値系$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$悉爲其解，此無再論之必要；或有一f_i，如f_1，不恆等爲零.於是由置換

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1=u_1x_1', \\ x_2=x_2'+u_2x_1', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=x_n'+u_nx_1' \end{cases}$$

以導入新變數$x_1',\cdots,x_n'$，但式中$u_1,\cdots,u_n$爲未定元，以添加于體K者.將(1)代入$f_1,\cdots,f_r$，隨有$x_1',\cdots,x_n'$之新多項式$f_1',\cdots,f_r'$成立，其中x_1'之最高冪之係數乃$u_1,\cdots,u_n$之一不爲零之多項式；即若α爲多項式f_1之次數，則

$$f_1'=f_1(u_1x_1',x_2'+u_2x_1',\cdots,x_n'+u_nx_1'),$$

而此式中$x_1'^\alpha$之係數爲$f_1^*(u_1,\cdots,u_n)$，但f_1^*係表示f_1中最高(α)次之成分者.【注意：代替未定元u_ν又可用u_ν在基本體中之特殊値，或其在一適擇擴張體內之特殊値(當基本體爲有限時)，至此種特殊値之選擇須使$f_1^*(u_1,\cdots,u_n)$對之不爲零而後可.】

今能以消去x_1'，並求得一終結式系

$$d_1,\cdots\cdots,d_l$$

之僅與$x_2',\cdots,x_n'$相關者.此終結式系之每零點$(\xi_2',\cdots,\xi_n')$(因以一個首

係數不爲零之助)，可導出多項式 $f_1',\cdots,f_r'$ 之至少一零點 $\{\xi_1',\cdots,\xi_n\}$，因之卽可得其全部．至所缺未知數 ξ_1' 常自方程式其最大公約數非常數者之一系得以決定之;卽對於 ξ_1' 恆有一代數方程式至少爲一次者在．若 $d_1,\cdots,d_l$ 尙不恆等爲零,容以同法續施之:若變換(導入 $x_2'',\cdots,x_n''$ 以代 $x_2',\cdots,x_n'$)，若消去，以及其他．此方法施行至第 s 回，苟由 $x_1',x_2'',\cdots,x_s^{(s)}$ 之消去而得到一恆等的爲零之 $x_{s+1}^{(s)},\cdots,x_n^{(s)}$ 之多項式系輒止．否則繼續施之以迄于所有未定元之消去，而於是所得之(常數)終結式倘恆不爲零，是所設方程式系之不能解自明．但以前者論，其自 s 回後之終結式爲零，故對于 $x_{s+1}^{(s)},\cdots,x_n^{(s)}$ 可代入以任意値 $\xi_{s+1}^{(s)},\cdots,\xi_n^{(s)}$ 而由是陸續能決定 $\xi_1',\xi_2'',\cdots,\xi_s^{(s)}$(以逆序得之)．對每個値系 $\{\xi_{s+1}^{(s)},\cdots,\xi_n^{(s)}\}$，可得有限個値系 $\{\xi_1',\xi_2'',\cdots,\xi_s^{(s)}\}$，而由是,以置換(1)，便反之得値系 $\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$，此滿足原方程式者也．

且對于 $\xi_{s+1}^{(s)},\cdots,\xi_n^{(s)}$ 又能代入以未定元，于是得 $\xi_1',\cdots,\xi_s^{(s)}$ 爲此諸未定元之代數函數一系或多系之形;雖然,所須注意者,對于特殊之 $\xi_{s+1}^{(s)},\cdots,\xi_n^{(s)}$，此外尙能有解之不克以任何方法自對未定元 $\xi_{s+1}^{(s)},\cdots,\xi_n^{(s)}$ 之解施以特殊化而得者，觀乎次例所示自明．

設
$$f_1=x_1^2+x_1x_2,$$
$$f_2=x_1x_2+x_2^2+x_1+x_2.$$

因f_1中已有x_1^2一項在，故準備變換(1)在此無所用之．其關于x_1之終結式必恆等爲零；因對x_2之任值f_1與f_2有公因子x_1+x_2故．對於未定之ξ_2，相應而有$\xi_1=-\xi_2$．但若特選$\xi_2=-1$，則f_2爲零，而對ξ_1，除值$+1$外尙有值0．然此值系$\{0,-1\}$決不能自一般解$\xi_1=-\xi_2$施以特殊化而得也．

如於此例然，自一般者言，其$f_1,\cdots,f_r$之公零點之「代數的集合體」亦分裂爲異「次元」之異「既約集合體」之各容認一用代數函數之「參數表示」者．關乎此之證(不用消去法論)，可閱第13章．至此集合體與參數表示之明白計算，固能以消去法論而成；但於此不事詳論．【注：參閱 F.S. Macaulay: Algebraic Theory of Modular Systems, Cambridge Tracts Nr.19, Cambridge 1916，或著者之 Einführung in die algebraische Geometrie, Berlin 1939.】

由前節合同式(2)，則有在多項式域$K(u)[x_1',\cdots,x_n']$中成立者之

$$(2)\qquad (d_1,\cdots,d_l)\equiv 0(f_1',\cdots f_r').$$

由是，對施行消去而終導歸不爲零之常數以作終結式者之情形，得一有趣結果，即合同式　$1\equiv 0(f_1,\cdots,f_r)$.

詳言之：當$K[x_1,\cdots,x_n]$之多項式$f_1,\cdots,f_r$在關于K之任何代數體內皆無一公零點時，在$K[x_1,\cdots,x_n]$中有次一關係成立：

$$1=A_1f_1+\cdots\cdots+A_rf_r.$$

證明可關於變數個數上用完全歸納法以行之．對於常數之f_i或對于

一變數多項式，主張自明．茲視之爲對 $n-1$ 個變數之多項式亦成立者在 n 個變數時，其最初出現之終結式 $d_1,\cdots,d_l$ 乃 $n-1$ 個變數之多項式，又無公因子；故在 $\mathsf{K}(u)[x_2',\cdots,x_n']$ 中，

$$1=B_1d_1+\cdots+B_ld_l.$$

據(2)，由是便有 $$1=A_1'f_1'+\cdots\cdots+A_r'f_r'.$$

茲對 x_i' 由(1)入以其值；於是 f_i' 變爲 f_i．右邊式就 u 言爲有理的；若乘以其分母 $g(u)$，得：$g(u)=A_1(u)\cdot f_1+\cdots\cdots+A_r(u)\cdot f_r$.

比較 u 之某一冪積之係數，其在左邊之係數不爲零，故主張：

$$1=A_1f_1+\cdots\cdots+A_rf_r$$

出焉，是爲證．

問題．多項式 $A_1,\cdots,A_r$ 之次數，若 f_i 之次數爲有界，亦爲有界．

§79. Hilbert 氏零點定理

前節末所證定理之一般化者，乃次之 Hilbert 氏零點定理：

若 f 爲 $\mathsf{K}[x_1,\cdots,x_n]$ 中一多項式，其於多項式 $f_1,\cdots,f_r$ 之所有公零點皆爲零，則一合同式 $$f^\rho\equiv 0(f_1,\cdots,f_r)$$

對一自然數 ρ 爲成立．逆亦眞．

證：對 $f=0$，主張自明．若 $f\neq 0$，試導入一新變數 z．於是，$\mathsf{K}[x_1,\cdots,x_n,z]$ 中之多項式 $$f_1,\cdots,f_r,1-zf$$

不能有公零點;因 $f_1,\cdots f_r$ 之每公零點卽爲 f 之零點,隨而非 $1-zf$ 之零點故.由是,據前節定理,

$$1=A_1f_1+\cdots\cdots+A_rf_r+A(1-zf).$$

在此恆等式中,施以置換 $z=\frac{1}{f}$,並以一冪 f^{ϱ} 之相乘,使消去由是所成之分數,卽得
$$f^{\varrho}=B_1f_1+\cdots\cdots+B_rf_r.$$
是爲證.

逆自明.

【注:參照A.Rabinowitsch: Math. Ann. Bd.102(1929)S.518.】

由此證與§78問題,可知對冪指數 ϱ 在 $f_1,\cdots,f_r$ 與 f 之次數爲所與時能予以一限界.實際對 ϱ,§95 中將見有一僅與 $f_1,\cdots,f_r$ 有關之限界在也.

零點定理之擴張.當多項式 $h_1,\cdots,h_k$ 在 $f_1,\cdots,f_r$ 所有公零點皆有値零時,一合同式
$$(h_1,\cdots,h_k)^{\sigma}\equiv 0(f_1,\cdots,f_r)$$
成立.換言之:h_i 之每冪積之有冪指數和 σ 者屬于「伊德耶」$(f_1,\cdots,f_r)$.逆亦眞.

證:
$$h_i^{\varrho_i}\equiv 0(f_1,\cdots,f_r)$$
勿論成立,乃令
$$\sigma=(\varrho_1-1)+(\varrho_2-1)+\cdots\cdots+(\varrho_k-1)+1.$$
於是每冪積 $h_1^{l_1}\cdots h_k^{l_k}$ 之有 $l_1+\cdots+l_k=\sigma$ 者含至少一因子 $h_i^{\varrho_i}$,否則 $l_1+\cdots+l_k$ 至高只能等於 $(\varrho_1-1)+\cdots+(\varrho_k-1)=\sigma-1$ 故.由是而主張生焉.

逆自明.

§80. 關於一齊次方程式系之可解性判定標準

§78中,已知一方法以判斷每代數方程式系是否有解矣.但此却與對于可解性之「代數的判定標準」有別.所謂代數的判定標準云者,乃係數之整有理函數之一系之謂,其爲零,即對可解性之必要而且充分者也(如§77之在單獨一個未知數時之終結式系,或一個一次齊次方程式系之行列式).若斯一判定標準,一般不能有.【注:此觀乎次例易知:方程式

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3=0,\qquad b_1x_1+b_2x_2+b_3=0$$

「一般」,即在$a_1b_2-a_2b_1\neq0$時爲可解.故若$D_1(a,b)=0,\cdots,D_h(a,b)=0$對于可解性爲必要且充分,則諸$D$對于未定的$a,b$必爲零,因之即恆等的爲零,于是兩方程式遂常爲可解,此不應爾.(又不等式$a_1b_2-a_2b_1\neq0$亦非必要而且充分者.)】但在齊次方程式之特例時有之.茲就此一論.

若$f_1,\cdots,f_r$爲$x_1,\cdots,x_n(n>1)$之齊次非常數的多項式,則其首先常有「當然的」零點$\{0,\cdots,0\}$.今所論在求一判定標準以對于與是異因之即非當然的一零點$\{\eta_1,\cdots,\eta_n\}$者;而由是,復以其齊次性故,必有零點$\{\lambda\eta_1,\cdots,\lambda\eta_n\}$之全然一「束」(Strahl)存在也.【注:零點$\{\lambda\eta_1,\cdots,\lambda\eta_n\}$以定$\eta$及變$\lambda$形成空間$R_n$一自原點$\{0,\cdots,0\}$出發之直線,故因此而得「束」名.此束之射線又可認爲「射影空間」P_{n-1}之「點」,其齊次座標爲η_i.參照§91.】

次導出法,係根源於H. Kapferer氏者.【注:Kapferer, H.:Über Resultanten und Resultantensysteme. Sitzungsber. Bayer. Akad. München 1929, S. 179-200.】此法由Kronecker氏陸續消去法而出,

即以$f_1,\cdots,f_r$諸形式視爲x_1之多項式，而據§77以作終結式系$D_1,\cdots,D_h$(但無§78準備變換(1)). 玆主張:若$f_1,\cdots,f_r$有一非當然的公零點，則$D_1,\cdots,D_h$，當視爲$x_2,\cdots,x_n$之多項式時，亦有一非當然的公零點.逆亦眞.

證明中可分兩款論之.

款1. $f_1,\cdots,f_r$中x_1之純冪之係數不全爲零時.此時，$D_1,\cdots,D_h$之每個非當然的零點$\{\xi_2,\cdots,\xi_n\}$，據終結式系之意義，至少產生$f_1,\cdots,f_r$一零點$\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$，此於此時亦能爲非當然的；反之，$f_\nu$之每個若是零點$\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$則生$D_\nu$一零點$\{\xi_2,\cdots,\xi_n\}$，此亦能爲非當然的，蓋由$\xi_2,\cdots,\xi_n$之爲零，以$f_\lambda=c\xi_1^m+\cdots=0$故，$\xi_1$之爲零卽隨之而來故.

款2. $f_1,\cdots,f_r$中x_1之純冪之係數全爲零時.此時據§77，$D_1,\cdots,D_h$皆恆等爲零，故復有$D_1,\cdots,D_h$之一非當然的零點如$\{1,1,\cdots,1\}$者在，但此際對於$f_1,\cdots,f_r$亦確有一非當然的零點，卽$\{1,0,\cdots,0\}$，因其項之有x_1之最高冪者實常付缺如故.

於是上主張得證.然$D_1,\cdots,D_h$對$x_2,\cdots,x_n$爲齊次的，故得續施消去法，於是消去x_2以及其他，迄於僅餘x_n之形式一系爲止:

$$b_1x_n^{s_1},b_2x_n^{s_2},\cdots,b_kx_n^{s_k}.$$

就此諸形式之一非當然的零點之存在言，凡此係數$b_1,\cdots,b_k$之爲零是所必要而且充分.

此$b_1,\cdots,b_k$諸量，係由確定的且僅與原形式之次數有關而在其係數上之整有理運算而得者，故其爲$f_1,\cdots,f_r$之係數之整值多項式.