

代数知识

# 一百个为什么

湖南省常德师范学校

- 1、什么是子级？ ..... (1)
- 2、为什么从一张数字表上能够算出你的年龄？ ..... (5)
- 3、为什么四个连续的自然数相乘再加1，就是一个完全平方数？ ..... (9)
- 4、分数的个数比整数的个数多些吗？ ..... (10)
- 5、 $\sqrt{2}$  为什么是无理数？ ..... (14)
- 6、为什么实数具有连续性？ ..... (17)

## 第二章 数的运算

- 7、为什么“同号相乘得正，异号相乘得负”？ ..... (21)
- 8、为什么两个十位数字相同而个位数字互补的二位数相乘可以速算？ ..... (24)
- 9、你能速算一个四位数的平方吗？ ..... (26)

- 10、为什么在开平方时要用初商乘以20去试除 第一 余数? ..... (29)
- 11、平方根表中的修正值是怎么计算出来的? ..... (32)
- 12、怎样用牛顿二项式定理求一个数的任意精确度的任意次方根? ..... (35)
- 13、指数运算有哪些简便方法? ..... (38)
- 14、 $\log_1 1 = 0$  和  $\log_1 1 = 1$  哪个对? ..... (40)
- 15、为什么对数计算尺可以用来进行乘除计算? ..... (41)
- 16、为什么有的人在计算中会出现“ $2 > 4$ ”的错误? ... (47)
- 17、为什么任何整数都可以用三个2来表示? ..... (50)

### 第三章 代 数 式

- 18、十字相乘法是分解 $ax^2 + bx + c$ 的因式的快速方法吗? ..... (54)
- 19、究竟 $x^2 - 2$ 和 $x^2 + 1$ 是否还能进行因式分解? ..... (57)
- 20、怎样用分组法分解高次多项式的因式? ..... (58)
- 21、“分离系数除法”和“综合除法”是不是一回事? (66)
- 22、怎样判断二元非齐次二项式能不能分解因式? ..... (73)
- 23、 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 成立的条件是什么? ..... (77)
- 24、怎样分解轮换对称多项式? ..... (79)
- 25、怎样用演段法解某些代数问题? ..... (84)
- 26、怎样用一个多项式的各次幂来表示另一个多项式? (89)
- 27、怎样把一个分式化成几个分式的和? ..... (94)

- 28、在根式运算中，为什么要限定只取算术根？…… (100)
- 29、“方根”和“根式”是不是一回事？…… (103)
- 30、“根式”和“无理式”是不是一回事？…… (107)
- 31、 $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ 的有理化因式是什么？… (108)
- 32、怎样求 $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{\dots}}}}}}$ 的值？…… (113)

## 第四章 方 程

- 33、怎样用顺序消去法解线性方程组？…… (117)
- 34、不用配方法也能得到一元二次方程的求根公式吗？ (125)
- 35、怎样用对数计算尺解一元二次方程？…… (127)
- 36、怎样解关于 $|X|$ 的二次方程？…… (132)
- 37、怎样利用根与系数的关系研究方程？…… (136)
- 38、一元三次方程有求根公式吗？…… (143)
- 39、在什么条件下，一元四次方程可以化成 $a(x^2 + kx)^2 + m(x^2 + kx) + n = 0$ 的形式求解？…… (146)
- 40、在什么条件下，一元四次方程可以化成 $A\left(x + \frac{k}{x}\right)^2 + B\left(x + \frac{k}{x}\right) + C = 0$ 的形式求解？ (148)
- 41、怎样迅速地求出整系数的整式方程的有理数根？ (151)
- 42、解方程时，为什么有时会出现增根和遗根？…… (156)
- 43、用合分比定理解分式方程为什么有时会产生增根？…… (160)

- 44、怎样用“一次除法”解只含二次根式的无理方程？ (163)
- 45、怎样用因式分解法解某些只含二次根式的无理方程？ ..... (167)
- 46、方程  $\sqrt{x+3} - 4\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} - 6\sqrt{x-1} = 1$  的解是什么？ ..... (169)
- 47、解三次根式方程产生增根的原因是什么？ ..... (171)
- 48、解对数方程是否一定要验根？ ..... (174)
- 49、怎样利用换底公式解对数方程？ ..... (179)
- 50、怎样解较复杂的对数方程？ ..... (182)
- 51、解某些指数方程为什么可以省略验根步骤？ ..... (186)
- 52、怎样解指数方程  $x^x = x$ ？ ..... (192)
- 53、已知  $x^8 = 3$ ，怎样求  $x$ ？ ..... (194)
- 54、怎样解形如  $x^{f(x)} = x^{\phi(x)}$  的指数方程？ ..... (194)
- 55、为什么利用方程能算出你的生日？ ..... (196)
- 56、怎样求二元一次方程的整数解？ ..... (198)
- 57、怎样求方程  $x^2 - y^2 = z$  的正整数解？ ..... (205)
- 58、怎样求出方程  $x^2 + y^2 = z^2$  的所有正整数解？ ..... (210)

## 第五章 不 等 式

- 59、怎样用“去分母”的方法解分式不等式？ ..... (217)
- 60、怎样用列表法解一元高次不等式？ ..... (220)
- 61、证明不等式有哪些基本方法？ ..... (224)

- 62、设 $a > 1$ ，怎样证明 $\lg a + \lg_a 10 \geq 2$ ? ..... (230)
- 63、为什么说两个正数的算术平均值总不小于它们的几何平均值? ..... (231)
- 64、为什么有盖的搪瓷杯都是做成等边圆柱形的? ... (237)
- 65、怎样确定电灯的高度，才能使桌子的边缘最亮? (241)
- 66、怎样才能使水槽的容积最大? ..... (245)
- 67、怎样用矩形的铁皮做成容积最大的盒子? ..... (248)
- 68、怎样的木梁强度最大? ..... (252)
- 69、把一个正整数分成多少等份时积最大? ..... (254)

## 第六章 函 数

- 70、为什么说“变量是可以取不同数值的量”这句话是不科学的? ..... (258)
- 71、怎样求代数函数的值域? ..... (261)
- 72、 $y = 2 \lg x$ 与 $y = \lg x^2$ 是一回事吗? ..... (264)
- 73、为什么说二次函数的图象是抛物线? ..... (266)
- 74、怎样计算炮弹的最大高度和最远的水平射程? ... (270)
- 75、修筑人孔洞形的地道，为什么洞高要与底宽相等? (273)
- 76、怎样确定转运站的位置? ..... (276)
- 77、怎样用导数来求极值? ..... (280)

## 第七章 数 列

- 78、为什么用数学归纳法证明的数学命题是可靠的? (286)

- 79、等差数列和定号等比数列的特征是什么? ..... (290)
- 80、堆垛怎样计数快些? ..... (292)
- 81、怎样求前 $n$ 个自然数 $k$ 次方的和(一)? ..... (295)
- 82、怎样求前 $n$ 个自然数 $k$ 次方的和(二)? ..... (300)
- 83、怎样求数列 $1 \cdot 2 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 4, 3 \cdot 4 \cdot 5, \dots$   
前 $n$ 项的和? ..... (304)
- 84、怎样求 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots$   
 $+ n(n+1)(n+2)(n+3)?$  ..... (308)
- 85、怎样求数列 $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5}, \dots$   
前 $n$ 项的和? ..... (311)
- 86、怎样求 $\frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \dots$   
 $+ \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}?$  ..... (314)
- 87、怎样求数列 $1, 22, 333, \dots$ 前 $n$ 项的和? ..... (318)
- 88、怎样求数列 $5, 55, 555, \dots$ 前 $n$ 项的和? ..... (321)
- 89、杨辉三角有哪些基本性质? ..... (325)
- 90、怎样写出高阶等差数列的通项公式? ..... (331)
- 91、怎样求高阶等差数列前 $n$ 项的和? ..... (336)
- 92、怎样求 $S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}}$   
的整数部分? ..... (340)
- 93、为什么 $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$ ? ..... (343)
- 94、阿溪里永远追不上龟吗? ..... (344)

## 第八章 复 数

|                                           |       |
|-------------------------------------------|-------|
| 95、复数是怎样被认识的？ .....                       | (349) |
| 96、为什么可以把复数写成实数对？ .....                   | (350) |
| 97、为什么在有关一元二次方程的问题中不能忽视共轭<br>虚数的作用？ ..... | (353) |
| 98、1 的立方根就是等于 1 吗？ .....                  | (357) |
| 99、 $e$ 是一个什么数？ .....                     | (359) |
| 100、为什么说 $e$ 是一个无理数？ .....                | (362) |
| 101、为什么复数可以写成 $Pe^{j\theta}$ 的形式？ .....   | (364) |
| 102、为什么 $e$ 是一个很重要的常数？ .....              | (369) |
| 编 后 .....                                 | (371) |

# 第一章 数的概念

## 什么是科学记数？

在初中代数中讲有理数的乘方时有这样一个问题：

伟大领袖毛主席在无产阶级文化大革命中，先后八次接见红卫兵和其他革命群众达13000000人。试用带一位整数的小数和10的幂的积表示这个数。

其答案是 $13000000 = 1.3 \times 10^7$

这种用带一位整数的小数和10的整数次幂的积来表示一个数，是简化数字运算的好方法，我们把这种记数方法，叫做科学记数。

现在我们就来研究这个问题。先用10的幂作为例子，找出这种记数的规律。

| 负 整 数 次 幂                                                                                                                      | 正 整 数 次 幂                                                                                                                 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $1 = 1 \times 10^0$                                                                                                            |                                                                                                                           |
| $0.1 = 1 \times 10^{-1}$                                                                                                       | $10 = 1 \times 10^1$                                                                                                      |
| $0.01 = 1 \times 10^{-2}$                                                                                                      | $100 = 1 \times 10^2$                                                                                                     |
| $0.001 = 1 \times 10^{-3}$                                                                                                     | $1000 = 1 \times 10^3$                                                                                                    |
| .....                                                                                                                          | .....                                                                                                                     |
| $0.0\cdots01 = 1 \times 10^{-n}$<br><br>n个零 | $10\cdots0 = 1 \times 10^n$<br><br>n个零 |

推广到一般的数，例如，

| 通 常 的 写 法 | 科 学 记 数              |
|-----------|----------------------|
| 8070000   | $8.07 \times 10^6$   |
| 0.0034    | $3.4 \times 10^{-3}$ |
| 46.327    | $4.6327 \times 10$   |
| 0.000068  | $6.8 \times 10^{-5}$ |
| 5.85      | $5.85 \times 10^0$   |

由上可知，一个纯小数实行科学记数，其幂指数等于这个纯小数从左至右第一个非零数字前面的零的个数的相反数；一个整数或带小数实行科学记数，其幂指数比原数的位数少1。

科学记数在工程计算和科学研究中应用很广，这主要是它有很多好处：第一，书写简明，节约篇幅；第二，便于辨认一个数的准确度，因为现存的数字无疑都是有效数字；第三，计算也很方便，无论是笔算也好，用计算尺也好，用数字计算机也好。对于计算尺来说，由于计算尺上无法显示答数的小数点位置，如果用科学记数，确定小数点的位置，就方便得多。用数字计算机运算，采用科学记数也有类似的好处。

下面的几个例子可以说明，在数的运算中，应用科学记数有什么益处。

例1 用科学记数将下式化简并算出结果：

$$\frac{10000 \times 4600 \times 0.006}{200 \times 0.03}$$

解: 
$$\frac{10000 \times 4600 \times 0.006}{200 \times 0.03} = \frac{10^4 \times 4.6 \times 10^3 \times 6 \times 10^{-3}}{2 \times 10^2 \times 3 \times 10^{-2}}$$

$$= 10^4 \times 4.6 = 46000$$

可见科学记数便于约分。

例2 计算:  $5 \times 10^{-4} + 2 \times 10^{-6}$

解: 先将  $5 \times 10^{-4}$  化为  $500 \times 10^{-6}$ , 然后相加,

$$5 \times 10^{-4} = 500 \times 10^{-6}$$

$$2 \times 10^{-6} = \frac{2 \times 10^{-6}}{502 \times 10^{-6}} (+)$$

$$\text{即 } 5 \times 10^{-4} + 2 \times 10^{-6} = 502 \times 10^{-6}$$

可见用科学记数同样可以进行加减运算。

例3 1970年4月24日,我国发射了第一颗人造地球卫星。这是毛主席革命路线的伟大胜利。它的近地点  $h_1 = 439$  公里,远地点  $h_2 = 2384$  公里,求运转周期。

解: 运转周期就是绕地球一圈所用的时间,为  $T$  (秒), 它的计算公式是:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \left( 1 + \frac{h_1 + h_2}{2R} \right)^{\frac{3}{2}}$$

地球半径  $R = 6371$  公里, 重力加速度  $g = 9.8 \times 10^{-8}$  公里/秒<sup>2</sup>, 代入数据, 得:

$$\begin{aligned}
 T &= 2 \times 3.1416 \times \sqrt{\frac{6371}{9.8 \times 10^{-8}}} \left(1 + \frac{439 + 2384}{2 \times 6371}\right)^{\frac{3}{2}} \\
 &= 2 \times 3.1416 \left(\frac{6371 \times 10^8}{9.8}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{15565}{12742}\right)^{\frac{3}{2}} \\
 &\approx 6.283 \left(\frac{6.371 \times 10^8}{9.8}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1.557 \times 10^4}{1.274 \times 10^4}\right)^{\frac{3}{2}} \\
 &= 6.283 \left(\frac{6.371 \times 10^8}{9.8}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1.557}{1.274}\right)^{\frac{3}{2}} \\
 \lg T &= \lg 6.283 + \frac{1}{2} (\lg 6.371 + \lg 10^8 - \lg 9.8) \\
 &\quad + \frac{3}{2} (\lg 1.557 - \lg 1.274) \\
 &= 0.7982 + 2.9065 + 0.1307 \\
 &= 3.8354
 \end{aligned}$$

$$\therefore T \approx 6845 \text{ (秒)} \approx 114.0 \text{ (分)}$$

由上可知, 在对数计算中, 运用科学记数既便于查表, 又便于对数尾数的计算, 可以避免出现对数首数为负整数的情形, 从而有利于简化计算。

请读者用科学记数解下面的题:

- ①  $8 \times 10^{-12} + 64 \times 10^{-15}$
- ②  $\frac{12000 \times 9200 \times 0.0003}{100 \times 0.003}$
- ③  $\frac{24000 (0.0002 + 5 \times 10^{-6})}{0.080}$

$$\textcircled{4} \sqrt{0.064 \times 22600}$$

$$1100$$

⑤我国第一颗科学实验人造地球卫星的近地点  $h_1 = 266$  公里，远地点  $h_2 = 1826$  公里，求运行周期  $T$ 。

## 为什么从一张数字表上能算出你的年龄？

首先，我们给这个游戏取个名字，就叫做“猜年龄”吧。

这个游戏是这样：在下表中，只要你说出你的年龄在哪一行有，我可以不看这张数字表，马上“猜”出你的年龄来。

譬如，你今年19岁，从表上看，“19”这个数在第一、二、五行都有，只要你说出“一、二、五行有就行了，我马上就可以回答出你的年龄来。

|     |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |    |
|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|----|
| 第一行 | 1  | 3  | 5  | 7  | 9  | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 31 | … | 63 |
| 第二行 | 2  | 3  | 6  | 7  | 10 | 11 | 14 | 15 | 18 | 19 | 22 | 23 | 26 | 27 | 30 | 31 | … | 63 |
| 第三行 | 4  | 5  | 6  | 7  | 12 | 13 | 14 | 15 | 20 | 21 | 22 | 23 | 28 | 29 | 30 | 31 | … | 63 |
| 第四行 | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | … | 63 |
| 第五行 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | … | 63 |
| 第六行 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | … | 63 |

当然，这些数字也可以换成其他的同一类元素，譬如说换成63个不同的姓（张、李、王、刘……）只要记住这些姓的排列顺序，用同样的方法也可以“猜”出你的姓来。

这是怎样“猜”出来的？方法很简单，读者只要记住左边

第一列的数字（1、2、4、8、16、32……它是通常说的等比数列）就可以了，对方说出哪几行，你就把哪几行左起第一个数字相加，其和就是答案，不妨，读者可以自己试一试。为什么会是这样呢？那就与这张数字表是怎样编制出来的有关，而这张数字表的编制又与不同的记数制有关，因此还得从不同的记数制谈起。

我们通常使用的记数制是“十进制”，即逢十进一，这种进位制使用十个阿拉伯数字：1、2、3、4、5、6、7、8、9、0，在十进制中，任何一个自然数A都可以用下面的式子来表示：

$$A = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0.$$

其中 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 是对应数位上的数字，10叫做底数， $n \geq 0$ 为整数。

如，十进制中的23456可以表示为：

$$23456 = 2 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 5 \times 10 + 6$$

一般来说，所有K进制的数都可以表示为：

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \cdots + a_1 k + a_0$$

其中 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 是对应数位上的数字， $k > 1$ 为整数。

当 $k = 2$ 时，就叫二进制（即逢二进一），二进制中只使用两个数字1和0，关于二进制的理论这里不作详细讨论，下面仅举例说明十进制和二进制中的数的相互转化。

为了简便，我们约定十进制中的数仍用通常的表示法或在右下角注小10，二进制中的数一律在右下角注小2。

例 把十进制中的21化成二进制中的数。即由 $21 = x_2$ ，求 $x_2$ 。

$$\begin{array}{rcl}
 \text{竖式:} & 2 \overline{) 21} & \\
 & 2 \overline{) 10} \cdots \cdots \text{余 } 1 & \text{(即二进制中的个位数字)} \\
 & 2 \overline{) 5} \cdots \cdots \text{余 } 0 & \text{(即二进制中的十位数字)} \\
 & 2 \overline{) 2} \cdots \cdots \text{余 } 1 & \text{(即二进制中的百位数字)} \\
 & 2 \overline{) 1} \cdots \cdots \text{余 } 0 & \text{(即二进制中的千位数字)} \\
 & 0 \cdots \cdots \text{余 } 1 & \text{(即二进制中的万位数字)}
 \end{array}$$

$$\therefore x = 10101$$

$$\begin{aligned}
 \text{横式: } 21 &= 2^4 + 0 + 2^2 + 0 + 1 \\
 &= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 \times 2^0 \\
 &= 10101_2
 \end{aligned}$$

反之，可由  $10101_2 = x_{10}$ ，求  $x$ 。

$$\begin{aligned}
 x &= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 \times 2^0 \\
 &= 21
 \end{aligned}$$

下面我们把十进制中的 1、2、3 …… 63 分别化成二进制中的数（等号左边是十进制中的数，右边是二进制中的数）。

$$\begin{array}{llll}
 1 = 1, & 2 = 10, & 3 = 11, & 4 = 100 \\
 5 = 101, & 6 = 110, & 7 = 111, & 8 = 1000 \\
 9 = 1001, & 10 = 1010, & 11 = 1011, & \cdots, \\
 63 = 111111
 \end{array}$$

现在可以编制前面的数字表了，表中十进制中的数是这样排列的：在上列二进制的数中，右起第一位是 1 的二进制的数所对应的十进制的数都依次排列在第一行，右起第二位是 1 的二进制中的数所对应的十进制的数都依次排列在第二行，……，依此类推，根据需要还可以排出第七行，第八行等等。

从上面编制表的规律来看，为什么说出几个行数就能算出十进制中的数呢？实际上，说“第几行有”就是说在二进制中右起第几位有“单位”（这个“单位”就是1），没有说出的行就说明相应的数位上一个“单位”也没有，当然应该用0表示，若说出的是“第一、三、五行有”，（第二、四行未说），那么这个二进制中的数，它的右起第一、三、五位上是1，而第二、四位上是0，即是 $10101_2$ ，转化成十进制中的数就是 $2^4 + 0 + 2^2 + 0 + 1 = 21$ ，若只说出“第二、五行有”，就等于给出 $10010_2$ ，把它转化成十进制中的数就是：

$$2^4 + 0 + 0 + 2 + 0 = 18。$$

前面已经说过，实际作游戏的时候并不需要这样转化，只需要把第一列的对应于某几行的数（十进制的数）相加就可以了。

最后，我们以下面的小节目作为这个游戏的闭幕。

$$2 \times 2 = 11$$

这是为什么？我们只见过 $2 \times 2 = 4$ ，其实， $2 \times 2 = 4$ 并不是绝对的无条件的等式，而是相对的有条件的等式，它只有在底数 $K \geq 5$ 的进位制中才成立，当然在十进制中也成立，而在二进制中， $2 \times 2 = 100$ ，在三进制中， $2 \times 2 = 11$ ，这正如恩格斯所说的：“在二进位记数法和三进位记数法中， $2 \times 2 \neq 4$ 而 $= 100$ 或 $= 11$ ”。（《自然辩证法》第237页）。

## 为什么四个连续的自然数相乘再加1， 就是一个完全平方数？

任你挑选哪四个连续的自然数，把它们乘起来，然后再加1，不问其结果如何，但可以断定，那个数一定是个完全平方数。例如：

$$\begin{aligned}1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 &= 25 (= 5^2), \\2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 &= 121 (= 11^2), \\3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1 &= 361 (= 19^2), \\&\dots\dots\dots\end{aligned}$$

越往后，计算越繁。但不管怎样，我们可以断定，算出来的结果一定也是一个完全平方数。这并不是因为看了前面几个特殊的情形都有这个规律，因而就这么推想下去了。不是的，这样做是不可靠的！那么，可以这样下结论的理由又是什么呢？

在四个连续的自然数中，设最小的一个是 $a$ ，那么我们来研究下面的数究竟是不是一个完全平方数。

$$a(a+1)(a+2)(a+3)+1$$

$$\begin{aligned}\text{我们知道, } a(a+1)(a+2)(a+3)+1 \\&= a(a+3) \cdot (a+1)(a+2)+1 \\&= (a^2+3a) \cdot (a^2+3a+2)+1 \\&= (a^2+3a)^2+2(a^2+3a)+1 \\&= (a^2+3a+1)^2\end{aligned}$$

好了， $a$ 是一个自然数， $(a^2+3a+1)^2$ 不就是一个自然数的完全平方么？

通过上面的粗略分析，不仅知道 $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$