代数知识

一百个为什么

湖南省常德师范学校

第二章　数　的　运　算

第三章　代　数　式

第四章　方　　程

第五章 不 等 式

第六章　函　　数

第七章　数　　列

第八章 复 数

第一章　数的概念

什么是科学记数？

在初中代数中讲有理数的乘方时有这样一个问题：

伟大领袖毛主席在无产阶级文化大革命中，先后八次接见红卫兵和其他革命群众达13000000人。试用带一位整数的小数和１０的幂的积表示这个数。

其答案是$13000000 = 1.3\times10^{7}$

这种用带一位整数的小数和１０的整数次幂的积来表示一个数，是简化数字运算的好方法，我们把这种记数方法，叫做科学记数。

现在我们就来研究这个问题。先用１０的幂作为例子，找出这种记数的规律。

负整数次幂	正整数次幂
$1 = 1\times10^{0}$	
$0.1 = 1\times10^{-1}$	$10 = 1\times10^{1}$
$0.01 = 1\times10^{-2}$	$100 = 1\times10^{2}$
$0.001 = 1\times10^{-3}$	$1000 = 1\times10^{3}$
………	………
$0.\underbrace{0\cdots0}_{n\text{个零}}1 = 1\times10^{-n}$	$1\underbrace{0\cdots0}_{n\text{个零}} = 1\times10^{n}$

推广到一般的数，例如：

通常的写法	科学记数
8070000	8.07×10^6
0.0034	3.4×10^{-3}
46.327	4.6327×10
0.000068	6.8×10^{-5}
5.85	5.85×10^0

由上可知，一个纯小数实行科学记数，其幂指数等于这个纯小数从左至右第一个非零数字前面的零的个数的相反数；一个整数或带小数实行科学记数，其幂指数比原数的位数少1。

科学记数在工程计算和科学研究中应用很广，这主要是它有很多好处：第一，书写简明，节约篇幅；第二，便于辨认一个数的准确度，因为现存的数字无疑都是有效数字；第三，计算也很方便，无论是笔算也好，用计算尺也好，用数字计算机也好。对于计算尺来说，由于计算尺上无法显示答数的小数点位置，如果用科学记数，确定小数点的位置，就方便得多。用数字计算机运算，采用科学记数也有类似的好处。

下面的几个例子可以说明，在数的运算中，应用科学记数有什么益处。

例1　用科学记数将下式化简并算出结果：

$$\frac{10000\times4600\times0.006}{200\times0.03}$$

解：$$\frac{10000\times4600\times0.006}{200\times0.03}=\frac{10^4\times4.6\times10^3\times\cancel{6}\times10^{-3}}{\cancel{2}\times10^2\times\cancel{3}\times10^{-2}}$$

$$=10^4\times4.6=46000$$

可见科学记数便于约分。

例2　计算：$5\times10^{-4}+2\times10^{-6}$

解：先将 5×10^{-4} 化为 500×10^{-6}，然后相加：

$$5\times10^{-4}=500\times10^{-6}$$

$$2\times10^{-6}=\underline{\ \ 2\times10^{-6}\ (+}$$

$$502\times10^{-6}$$

即 $5\times10^{-4}+2\times10^{-6}=502\times10^{-6}$

可见用科学记数同样可以进行加减运算。

例3　1970年4月24日，我国发射了第一颗人造地球卫星。这是毛主席革命路线的伟大胜利。它的近地点 $h_1=439$ 公里，远地点 $h_2=2384$ 公里，求运转周期。

解：运转周期就是绕地球一圈所用的时间，为 T（秒），它的计算公式是：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(1+\frac{h_1+h_2}{2R}\right)^{\frac{3}{2}}$$

地球半径$R=6371$公里，重力加速度$g=9.8\times10^{-3}$ 公里/秒^2，代入数据，得：

$$T=2\times3.1416\times\sqrt{\frac{6371}{9.8\times10^{-3}}}\left(1+\frac{439+2384}{2\times6371}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=2\times3.1416\left(\frac{6371\times10^{3}}{9.8}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{15565}{12742}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\approx6.283\left(\frac{6.371\times10^{6}}{9.8}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1.557\times10^{4}}{1.274\times10^{4}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=6.283\left(\frac{6.371\times10^{6}}{9.8}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1.557}{1.274}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$lgT=lg6.283+\frac{1}{2}(lg6.371+lg10^{6}-lg9.8)$$

$$+\frac{3}{2}(lg1.557-lg1.274)$$

$$=0.7982+2.9065+0.1307$$

$$=3.8354$$

$\therefore\quad T\approx6845$（秒）$\approx114.0$（分）

由上可知，在对数计算中，运用科学记数既便于查表，又便于对数尾数的计算，可以避免出现对数首数为负整数的情形，从而有利于简化计算。

请读者用科学记数解下面的题：

①$8\times10^{-12}+64\times10^{-15}$

②$\dfrac{12000\times9200\times0.0003}{100\times0.003}$

③$\dfrac{24000\ (0.0002+5\times10^{-6})}{0.080}$

④ $\frac{\sqrt{0.064\times 22600}}{1100}$

⑤我国第一颗科学实验人造地球卫星的近地点 $h_1=266$ 公里，远地点 $h_2=1826$ 公里，求运行周期T。

为什么从一张数字表上能算出你的年龄？

首先，我们给这个游戏取个名字，就叫做“猜年龄”吧。

这个游戏是这样：在下表中，只要你说出你的年龄在哪几行有，我可以不看这张数字表，马上“猜”出你的年龄来。

譬如，你今年19岁，从表上看，“19”这个数在第一、二、五行都有，只要你说出“一、二、五行有就行了，我马上就可以回答出你的年龄来。

第一行	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	…	63
第二行	2	3	6	7	10	11	14	15	18	19	22	23	26	27	30	31	…	63
第三行	4	5	6	7	12	13	14	15	20	21	22	23	28	29	30	31	…	63
第四行	8	9	10	11	12	13	14	15	24	25	26	27	28	29	30	31	…	63
第五行	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	…	63
第六行	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	…	63

当然，这些数字也可以换成其他的同一类元素，譬如说换成63个不同的姓（张、李、王、刘……）只要记住这些姓的排列顺序，用同样的方法也可以“猜”出你的姓来。

这是怎样“猜”出来的？方法很简单，读者只要记住左边

第一列的数字（1、2、4、8、16、32……它是通常说的等比数列）就可以了，对方说出哪几行，你就把哪几行左起第一个数字相加，其和就是答案，不妨，读者可以自己试一试。为什么会是这样呢？那就与这张数字表是怎样编制出来的有关，而这张数字表的编制又与不同的记数制有关，因此还得从不同的记数制谈起。

我们通常使用的记数制是“十进制”，即逢十进一，这种进位制使用十个阿拉伯数字：1、2、3、4、5、6、7、8、9、0，在十进制中，任何一个自然数A都可以用下面的式子来表示：

$$A=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\cdots\cdots+a_110+a_0$$

其中a_n、a_{n-1}……a_1、a_0是对应数位上的数字，10叫做底数，$n\geq0$为整数。

如，十进制中的23456可以表示为：

$$23456=2\times10^4+3\times10^3+4\times10^2+5\times10+6$$

一般来说，所有K进制的数都可以表示为：

$$a_nk^n+a_{n-1}k^{n-1}+\cdots\cdots+a_1k+a_0$$

其中a_n、a_{n-1}、……a_1、a_0是对应数位上的数字，$k>1$为整数。

当$k=2$时，就叫二进制（即逢二进一），二进制中只使用两个数字1和0，关于二进制的理论这里不作详细讨论，下面仅举例说明十进制和二进制中的数的相互转化。

为了简便，我们约定十进制中的数仍用通常的表示法或在右下角注小10，二进制中的数一律在右下角注小2。

例　把十进制中的21化成二进制中的数。即由$21=x_2$，求x。

竖式：

$$
\begin{array}{rll}
2\,| & 21 & \\
2\,| & 10 & \cdots\cdots \text{余} 1 \ (\text{即二进制中的个位数字}) \\
2\,| & 5 & \cdots\cdots \text{余} 0 \ (\text{即二进制中的十位数字}) \\
2\,| & 2 & \cdots\cdots \text{余} 1 \ (\text{即二进制中的百位数字}) \\
2\,| & 1 & \cdots\cdots \text{余} 0 \ (\text{即二进制中的千位数字}) \\
 & 0 & \cdots\cdots \text{余} 1 \ (\text{即二进制中的万位数字})
\end{array}
$$

$\therefore \quad x = 10101$

横式：　$21 = 2^4 + 0 + 2^2 + 0 + 1$

$= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 \times 2^0$

$= 10101_2$

反之，可由$10101_2 = x_{10}$，求x。

$x = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 \times 2^0$

$= 21$

下面我们把十进制中的1、2、3……63分别化成二进制中的数（等号左边是十进制中的数，右边是二进制中的数）。

1 = 1，　2 = 10，　3 = 11，　4 = 100

5 = 101，　6 = 110，　7 = 111，　8 = 1000

9 = 1001，　10 = 1010，　11 = 1011，　……，

63 = 111111

现在可以编制前面的数字表了，表中十进制中的数是这样排列的：在上列二进制的数中，右起第一位是1的二进制的数所对应的十进制的数都依次排列在第一行，右起第二位是1的二进制中的数所对应的十进制的数都依次排列在第二行，……，依此类推，根据需要还可以排出第七行，第八行等等。

从上面编制表的规律来看，为什么说出几个行数就能算出十进制中的数呢？实际上，说“第几行有”就是说在二进制中右起第几位有“单位”（这个“单位”就是1），没有说出的行就说明相应的数位上一个“单位”也没有，当然应该用0表示，若说出的是“第一、三、五行有”，（第二、四行未说），那么这个二进制中的数，它的右起第一、三、五位上是1，而第二、四位上是0，即是10101_2，转化成十进制中的数就是$2^4+0+2^2+0+1=21$，若只说出“第二、五行有”，就等于给出10010_2，把它转化成十进制中的数就是：

$$2^4+0+0+2+0=18。$$

前面已经说过，实际作游戏的时候并不需要这样转化，只需要把第一列的对应于某几行的数（十进制的数）相加就可以了。

最后，我们以下面的小节目作为这个游戏的闭幕。

$$2\times2=11$$

这是为什么？我们只见过$2\times2=4$，其实，$2\times2=4$并不是绝对的无条件的等式，而是相对的有条件的等式，它只有在底数$K\geq5$的进位制中才成立，当然在十进制中也成立，而在二进制中，$2\times2=100$，在三进制中，$2\times2=11$，这正如恩格斯所说的：“在二进位记数法和三进位记数法中，2×2不$=4$而$=100$或$=11$”。（《自然辩证法》第237页）。

为什么四个连续的自然数相乘再加1，就是一个完全平方数？

任你挑选哪四个连续的自然数，把它们乘起来，然后再加1，不问其结果如何，但可以断定，那个数一定是个完全平方数。例如：

$$1\cdot2\cdot3\cdot4+1=25\ (=5^2);$$
$$2\cdot3\cdot4\cdot5+1=121\ (=11^2);$$
$$3\cdot4\cdot5\cdot6+1=361\ (=19^2);$$
$$\cdots\cdots$$

越往后，计算越繁。但不管怎样，我们可以断定，算出来的结果一定也是一个完全平方数。这并不是因为看了前面几个特殊的情形都有这个规律，因而就这么推想下去了。不是的，这样做是不可靠的！那么，可以这样下结论的理由又是什么呢？在四个连续的自然数中，设最小的一个是a，那么我们来研究下面的数究竟是不是一个完全平方数。

$$a(a+1)(a+2)(a+3)+1$$

我们知道，
$$\begin{aligned}a(a+1)(a+2)(a+3)+1&=a(a+3)\cdot(a+1)(a+2)+1\\&=(a^2+3a)\cdot(a^2+3a+2)+1\\&=(a^2+3a)^2+2(a^2+3a)+1\\&=(a^2+3a+1)^2\end{aligned}$$

好了，a是一个自然数，$(a^2+3a+1)^2$不就是一个自然数的完全平方么？

通过上面的粗略分析，不仅知道$a(a+1)(a+2)(a+3)+1$