长沙铁道学院

1981届研究生毕业论文汇编

一九八二年十月

前　　言

我院一九七八年招收的三年制研究生九名和一九七九年招收的二年制研究生二名共十一名已于一九八一年十二月廿四日毕业。这届研究生入学前都经过一定时间的实际工作锻炼，有较强的独立工作能力。入学后经过三年（或二年）的学习、研究，都修完了计划规定的全部课程，并撰写了毕业论文。他们的课程学习均合格，多数研究生的毕业论文有新的见解，有的论文已在本院学报上发表，有的论文在国内学术会议上交流，有的论文拟在实践中应用，受到了有关单位和专家的好评。经过评审和答辨，他们的毕业论文均获得通过，多数由答辨委员会建议授予硕士学位。经我院学位评定委员会审查，于一九八二年四月廿日决定对其中八名研究生授予硕士学位。李政华获国防科技大学硕士学位。现将研究生毕业论文汇编成集（按答辨先后顺序汇编，在院学报上发表过的论文只登摘要，取得硕士学位论文用*表示），以便进行学术交流，请批评指正。

长沙铁道学院

一九八二年十月

目　　录

有 势 Q 过 程（摘要）*

陈 安 岳

（基础课部应用数学专业研究生）

§1. 引 言

有关齐次可列马氏过程、Q过程、Q矩阵等的定义及基础知识参见文献[2][3]。这里不再赘述。我们仅叙述一下有势Q过程及可逆Q过程的定义。

定义 1.1：称Q过程 $P(t)=(p_{ij}(t),\ i、j\in E)$，这里 $E=(1,2,3,\cdots)$，是有势的，如果存在$\Pi=(\pi_i;\ i\in E)$使得 $\pi_i>0(i\in E)$

且 $\pi_i p_{ij}(t)=\pi_j p_{ji}(t)$ （$\forall i、j\in E、\forall t>0$）成立。

此时称Π为$P(t)$的配称列

如果还有$\sum\limits_{i\in E}\pi_i=1$，则称$P(t)$可配称，并称$\Pi=(\pi_i)$为$P(t)$的配称分布。

定义 1.2：称Q过程$P(t)=(p_{ij}(t)、i、j\in E)$可逆，

如果存在正分布 $\Pi=(\pi_i;\ i\in E)$ $\pi_i>0\ (i\in E)\sum\limits_{i\in E}\pi_i=1$

使得条件：（i） $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t)=\pi_j$ （$\forall i\in E$）

（ii） $P(t)$ 关于Π可配称

同时成立。

定义 1.3：设 $Q=(q_{ij})$是一个Q矩阵，如果存在 $\Pi=(\pi_i)$ $\pi_i>0(i\in E)$

使得 $\pi_i q_{ij}=\pi_j q_{ji}(i、j\in E)$ 成立

则称Q是弱可配称Q矩阵，$\Pi=(\pi_i)$称为Q的配称列。

若 $\Pi=(\pi_i)$ 还满足$\sum\limits_{i\in E}\pi_i=1$，则称Q是可配称矩阵，$\Pi$称为$Q$的配称分布。

在有势Q过程及可逆Q过程的研究中，需要回答下面三个基本问题：

（1）对任给的Q矩阵，存在有势（可逆）Q过程的充要条件是什么？

（2）在有势（可逆）Q过程存在的条件下，有势（可逆）Q过程唯一的充要条件是什么？

（3）若有势（可逆）Q过程不唯一，如何构造全部有势（可逆）Q过程？

---

* 本文为毕业论文，全文较长，故摘要发表。答辩委员会一致认为：此文已达到博士论文水平。[redacted]。

以上三个问题的研究，已经取得了丰富的成果，见［1］［4］［5］等。但迄今为止的讨论主要是在Q保守的条件下进行的。

本文则将重点讨论Q非保守时，有势（可逆）Q过程的存在，唯一及全部构造问题：

在§2中，给出了Q有限流出，有限非保守时全部有势（可逆）Q过程的构造。§3及§4分别讨论Q有限流出，有限非保守时，不断有势（可逆）Q过程的存在性准则和唯一性准则。这三节的内容合在一起，使Q有限流出，有限非保守的情况得以彻底解决。

在随后的两节中，我们没有限于Q有限流出，有限非保守的情况。在§5中，对任意的Q，讨论并构造了一类有势Q过程，它主要是为§6服务的，但其本身也有独立存在的价值，§6在此基础上讨论了Q任意时，不断有势Q过程及可逆Q过程的存在问题，给出了一些充分条件及必要条件。

为节省篇幅，我们一般只限于陈述已得的结果，详细证明都略去了。为查阅方便，文中的定理、引理、推论等采取统一编号。

本文自始至终是在侯振挺老师的亲切关怀和具体、深入的指导下完成的，同时还得到了北师大陈木法同志的热情帮助，在此向侯老师及陈木法同志表示最衷心的感谢！

§2. 有限流出、有限非保守有势Q过程的构造

本节将给出Q有限流出、有限非保守时，全部有势Q过程的构造。根据［1］，在讨论构造问题时，需假设Q是弱可配称的。

我们将主要采用［3］中的术语和记号。对这些术语、记号的意义及内容，本文不再重复。在记号有所区别的时候，将随处予以说明。

以B代表Q导出的$Martin$流出边界，$H=\{i;\ d_i\equiv q_i-\sum_{j\in I} q_{ij}>0\}$为非保守状态集。

当$G=H\cup B$为有限集时，称Q为有限流出、有限非保守的。

为明确化起见，除非另有说明，我们总认为Q是m流出的，有$n-m$个非保守状态，且总默认$B=(1,2,\cdots,m)$，$H=(m+1,\cdots,n)$从而$G=B\cup H=(1,2,\cdots,n)$。为理解与书写的方便，将同时采用B与$(1,2,\cdots,m)$等等这两种符号，有时并互相换用。一个$n\times n$矩阵R在例如前m行，后$n-m$列上的限制将记为$[R]_{B\times H}$或$R_{B\times H}$。

以$\{X^a(\lambda)\}_1^n$表示$\{X^1(\lambda),X^2(\lambda),\cdots,X^n(\lambda)\}$这个单行"向量"，其中每个"分量"$X^a(\lambda)$本身是$E$上的列向量。以$[\eta^a(\lambda)]_1^n$表示$\begin{bmatrix}\eta^1(\lambda)\\ \vdots\\ \eta^n(\lambda)\end{bmatrix}$这个单列"向量"，其中每个"分量"$\eta^a(\lambda)$本身是$E$上的行向量。$e_i$记$E$上的单位列向量，$\varepsilon_i$记$E$上的单位行向量。$\langle\alpha,\beta\rangle$表示向量$\alpha$与$\beta$的内积，即$\langle\alpha,\beta\rangle=\sum_i \alpha_i\beta_i$，上标"T"表示转置。

下面设Q为有限流出，有限非保守，弱可配称Q矩阵，$\Pi=(\pi_i)$是Q的一个配称列，我们也用Π表示$diag(\pi_1,\ \pi_2,\ \cdots)$这并不会造成混淆。

引理 2.1：设Q有限流出，有限非保守，关于$\Pi=(\pi_i)$弱可配称，记

$$\eta^a(\lambda)=(\Pi X^a(\lambda))^T=(X^a(\lambda))^T\cdot\Pi\quad(a\in G)$$

这里$X^a(\lambda)$表示［3］中第七章§2所选取的线性无关的列协调族。

则：（i）$\eta^a(\lambda)$非负，且$\eta^a(\lambda)A(\lambda,\mu)=\eta^a(\mu)$　$(a\in G)$

(ii) 对于 $a\in H$ $\eta^a(\lambda)=\pi_a d_a \Phi_{a\cdot}(\lambda)$ 从而 $\langle\eta^a(\lambda),1\rangle<\infty$

(iii) 令 $J=\{a;\ a\in B$ 且 $\langle\eta^a(\lambda)\ 1\rangle=\infty\}$

那么 J 与 λ 无关，且每一个有势 Q 过程必定形如

$$\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)+\sum_{a\in G-J}X^a(\lambda)F^a(\lambda)$$

根据引理2.5，我们今后只须对集合 $G^*=G-J$ 进行讨论。为避免记号繁杂，不妨仍记 G^* 为 G，换言之，今后当局限于考虑全部有势 Q 过程的构造时，有理由约定：$\forall a\in G$，$\sum\limits_{i\in E}\pi_i X_i^a(\lambda)<\infty$，本节将恒作此约定。

引理 2.2：$\eta^a(\lambda)(a\in G)$ 如上引理所定义。

又令 $\eta^a=(\Pi X^a)^T=(X^a)^T\Pi$ $(a\in G)$

则：(i) $\eta^a(\lambda)(a\in G)$ 是线性无关的行协调族，$\eta^a(a\in G)$ 是其标准映象

(ii) 当 $a\in B$ 时，$\eta^a(\lambda)\in L_\lambda^+$；当 $a\in H$ 时，$\eta^a(\lambda)=\pi_a d_a\phi_{a\cdot}(\lambda)$

从而当 $\lambda\uparrow\infty$ 时 $\eta^a(\lambda)\downarrow 0$ $\quad\lambda\eta^a(\lambda)\to 0$ $\quad(a\in B)$

$\eta^a(\lambda)\downarrow 0$ $\quad\lambda\eta^a(\lambda)\to\pi_a d_a\varepsilon_a$ $\quad(a\in H)$

且 $\lambda\eta^a\phi(\lambda)=\eta^a-\eta^a(\lambda)$ $(a\in G)$

引理 2.3：对于行协调族 $\eta^a(\lambda)=(X^a(\lambda))^T\Pi$ $(a\in G)$

记 $W_\lambda^{ab}=\lambda\langle\eta^a(\lambda)\ X^b\rangle$ $\qquad\sigma^a=\lambda\langle\eta^a(\lambda)\ X^0\rangle$

则：(i) $\sigma^a<\infty$ 与 $\lambda>0$ 无关

(ii) $W_\lambda^{ab}\uparrow W^{ab}$ $(\lambda\uparrow\infty)$ $\qquad$ 当 $b\in H$ 时 $W^{ab}<\infty$

且有 $(\lambda-\mu)\langle\eta^a(\lambda)\ X^b(\mu)\rangle=W_\lambda^{ab}-W_\mu^{ab}$

(iii) $W_\lambda^{ab}=W_\lambda^{ba}$ $\qquad$ 从而 $W^{ab}=W^{ba}$

下面给出有势 Q 过程的表现定理，它是今后讨论构造问题的基础。

定理 2.4：设 Q 有限流出，有限非保守，弱可配称，Π 为其一个配称列，

则 $\Psi(\lambda)$ 是有势 Q 过程的充要条件是：

$\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)+\{X^a(\lambda)\}_1^n R_\lambda[\eta^a(\lambda)]_1^n$ $\qquad\eta^a(\lambda)=(X^a(\lambda))^T\Pi$

且 R_λ 满足以下四条件：

(a) R_λ 是非负，对称 $n\times n$ 方阵

(b) $R_\lambda[\sigma]_1^n+R_\lambda W_\lambda[1]_1^n\leqslant[1]_1^n$

(c) R_λ 满足矩阵方程 $R_\lambda-R_\mu=R_\lambda(W_\mu-W_\lambda)R_\mu$

从而 $\lambda\uparrow\infty$ 时 R_λ 极限存在，设为 R

(d) 极限矩阵 R 对称，且满足 $[R]_{H\times H}=0$

前已述及，当 $\lambda\uparrow\infty$ 时，$W_\lambda\uparrow W$，假若 $W<\infty$（即 W 矩阵的每个元都有限），那么有势 Q 过程的构造十分简捷。

定理 2.5：设 Q 有限流出，有限非保守，弱可配称，$\Pi=(\pi_i)$ 为任一配称列，且满足 $W<\infty$

则 任选一个非负，对称的 $n\times n$ 矩阵 R，满足条件

(i) $[R]_{H\times H}=0$

(ii) $RW[1]_1^n+R[\sigma]_1^n\leqslant[1]_1^n$

令 $R_\lambda=(I-RW+RW_\lambda)^{-1}R$

那么 $\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)+\{X^{a}(\lambda)\}_{1}^{n}R_{\lambda}[X^{aT}(\lambda)\Pi]_{1}^{n}$ 是一个有势 Q 过程。

反之，任何一个有势 Q 过程可用这种方式得到。

过程不中断的充要条件是(ii)中取等号。

在条件 $W<\infty$ 未必满足时的一般情况，问题要复杂得多。为叙述方便，先说明两个概念。

定义 2.1：设 $V_1,V_2,\cdots,V_n$ 是 $n\times m$ 矩阵 V 的 n 个行向量，若存在一组数 b_i，满足 $b_i\geqslant 0$

$\sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}b_i\leqslant 1$ 使得 $V_k=\sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}b_iV_i$

则称 V_k 可经 $V_1,\cdots,V_{k-1},V_{k+1}\cdots,V_n$ 凸线性表出，$\{b_i\}$ 称为凸表出系数。

若 $V_1,V_2,\cdots,V_n$ 中任何一个均不能被其他行向量凸线性表出，则称 $V_1,\cdots,V_n$ 是凸线性无关的，此时称矩阵 V 是满极矩阵（或 n 极矩阵），约定单行矩阵为满极阵。

定义 2.2：设 A_1,B_1 分别是矩阵 A,B 的子矩阵，若 A_1 在 A 中所占的行与 B_1 在 B 中所占的行完全相同，则称 A_1,B_1 为 A,B 的行对应子阵。不会混淆时，简称 A_1,B_1 是行对应子阵。

引理 2.6：设 $\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)+\{X^{a}(\lambda)\}_{1}^{n}R_{\lambda}[\eta^{a}(\lambda)]_{1}^{n}$ 是一个有势 Q 过程。则，必定存在一个与 λ 无关的 $n\times k(n\geqslant k)$ 准随机矩阵 P，P 中含有单位子阵 $I_{k\times k}$，使对所有的 $\lambda>0$ 成立 $R_\lambda=P\widetilde{R}_\lambda P^T$。其中 $\widetilde{R}_\lambda$ 满足：

① $\widetilde{R}_\lambda$ 是 R_λ 的 $k\times k$ 阶主子阵

② $\widetilde{R}_\lambda$ 是满极矩阵（k 极矩阵）

③ $\widetilde{R}_\lambda$ 与 $I_{k\times k}$ 为 R_λ 与 P 的行对应子阵

为称呼方便，当 R_λ 为满极矩阵时，相应的有势 Q 过程 $\Psi(\lambda)$ 也称为满极的。当引理 2.6 中的 $\widetilde{R}_\lambda$ 为 $k\times k$ 矩阵时，相应的有势 Q 过程称为 k 极有势 Q 过程。我们先给出满极有势 Q 过程的构造定理。

定理 2.7：设 Q 有限流出（$|B|=m$）有限非保守（$|H|=n-m$）弱可配称。

那么，取 $n\times n$ 随机矩阵 N，满足条件 $[N]_{H\times H}=0$

取 $n\times n$ 有限矩阵 S，满足。

(i) $\forall a,c\in G\ a\neq c$ 时有 $+\infty>-S^{ac}\geqslant\sum\limits_{t\in G}N^{at}W^{tc}$（约定 $0\cdot\infty=0$）

若 W 的第 c 列全有限，则上式取等号。特别 $c\in H$ 时，上式取等号。

(ii) $S[1]_{1}^{n}\geqslant N[\sigma]_{1}^{n}$

(iii) $NS^T=SN^T$

(iv) $T_{H\times B}(T_{B\times B})^{-1}diag\left(\frac{1}{l^{aa}}\right)_{B\times B}\cdot N_{B\times H}=0$

其中 $l^{aa}=S^{aa}+\sum\limits_{t\in G}N^{at}W^{ta}\quad(a\in B)$

而 $n\times n$ 矩阵 T 如下定义：

$$T^{aa}=1\quad T^{ac}=\frac{S^{ac}+\sum\limits_{t\in G}N^{at}W^{tc}}{l^{aa}}\quad(a\in G\quad a\neq c)$$

最后取 $R_\lambda=(NW_\lambda+S)^{-1}N$

则 $\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)+\{X^{a}(\lambda)\}_{1}^{n}R_{\lambda}[X^{aT}(\lambda)\Pi]_{1}^{n}$ 是一个有势 Q 过程

且每一个满极有势Q过程可如此得到。

过程不中断的充要条件是 $S[1]_1^n = N[\sigma]_1^n$，

最后，给出完整的构造定理。

定理 2.8：设Q有限流出（$|B| = m$）有限非保守（$|H| = n-m$）弱可配称

则 任取 $n\times k(n\geqslant k\geqslant 1)$ 阶的准随机矩阵 P。P 中含有单位子阵 $I_{k\times k}$

再取 $k\times k$ 阶随机矩阵N及 $k\times k$ 阶有限矩阵S。满足以下条件：

（i） $\forall a\in K, a\neq c$ 时 $+\infty > -S^{ac} \geqslant \sum_{t\in K} N^{at}\widetilde{W}^{tc}$（约定$0\cdot\infty = 0$）

这里$\widetilde{W} = P^T W P$（即：$\widetilde{W}^{tc} = \sum_{l\in G}\sum_{j\in G} p^{lt}W^{lj}p^{jc}$）

若$\widetilde{W}$的第C列全有限，则上述取等号

（ii） $S[1]_1^k \geqslant NP^T[\sigma]_1^n + NP^T W([1]_1^n - P[1]_1^k)$

（iii） $NS^T = SN^T$

（iv） $[PT^{-1}diag\left(\frac{1}{l^{aa}}\right)NP^T]_{H\times H} = 0$

其中 $diag\left(\frac{1}{l^{aa}}\right)$是 $k\times k$ 阶对角矩阵。T 是 $k\times k$ 阶矩阵。如下定义：

$$l^{aa} = S^{aa} + \sum_{t\in k} N^{at}\widetilde{W}^{ta}$$

$$T^{aa} = 1 \quad T^{ac} = \frac{S^{ac} + \sum_{t\in k} N^{at}\widetilde{W}^{tc}}{l^{aa}} \ (a\neq c)$$

最后取 $R_\lambda = P(NP^T W_\lambda P + S)^{-1}NP^T$

那么 $\Psi(\lambda) = \Phi(\lambda) + \{X^a(\lambda)\}_1^n R_\lambda [X^{aT}(\lambda)\Pi]_1^n$ 是一个有势Q过程。

反之，每一个有势Q过程可如上得到。

过程不中断的充要条件是：$P[1]_1^k = [1]_1^n$ 及 $S[1]_1^k = NP^T[\sigma]_1^n$ 同时成立。

当Q可配称时，将定理 2.7，定理 2.8，中的“有势”换成可配称，就得到可配称Q过程的构造定理。我们略去了。

下面给出可逆Q过程的构造定理。

定理 2.9：设Q有限流出，有限非保守，可配称，且$W<\infty$

则任选一个非负。对称的 $n\times n$ 矩阵，满足条件

（i） $[R]_{H\times H} = 0$

（ii） $RW[1]_1^n + R[\sigma]_1^n = [1]_1^n$

令 $R_\lambda = (I - RW + RW_\lambda)^{-1}R \quad \Psi(\lambda) = \Phi(\lambda) + \{X^a(\lambda)\}_1^n R_\lambda [X^{aT}(\lambda)\Pi]_1^n$

只要 $\Psi(\lambda) > 0$，则上述的$\Psi(\lambda)$就是一个可逆Q过程

且每一个 $W<\infty$ 的可逆Q过程可如上得到。

定理2.10：设Q有限流出，有限非保守，可配称。

则 任取 $n\times k(n\geqslant k\geqslant 1)$阶的随机矩阵$P$，$P$ 中含有单位子阵 $I_{k\times k}$

再取 $k\times k$ 阶随机矩阵N及有限矩阵 S，满足条件：

（i） $\forall a\in k$，$a\neq c$ 有 $+\infty > -S^{ac} \geqslant \sum_{t\in k} N^{at}\widetilde{W}^{tc}$（约定$0\cdot\infty = 0$）

这里$\widetilde{W}=P^TWP$，当$\widetilde{W}$的第C列全有限时，上式取等号

(ii) $S[1]_1^k=NP^T[\sigma]_1^n$

(iii) $NS^T=SN^T$

(iv) $[PT^{-1}diag\left(\frac{1}{l^{aa}}\right)NP^T]_{H\ H}=0$

其中 $diag\left(\frac{1}{l^{aa}}\right)$是 $k\times k$ 阶对角矩阵，T 是 $k\times k$ 矩阵。

$$l^{aa}=S^{aa}+\sum_{t\leq k}N^{at}\widetilde{W}^{ta}$$

$$T^{aa}=1 \quad T^{ac}=\frac{S^{ac}+\sum\limits_{t\leq k}N^{at}\widetilde{W}^{tc}}{l^{aa}} \quad (a\neq c)$$

取 $R_\lambda=P(NP^TW_\lambda P+S)^{-1}NP$

$$\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)+\{X^a(\lambda)\}_1^n R_\lambda[X^{aT}(\lambda)\Pi]_1^n$$

只要 $\Psi(\lambda)>0$ 上述的$\Psi(\lambda)$就是一个可逆Q过程，

且每一个可逆Q过程可如此得到。

§3. 不断有势Q过程存在准则(有限流出、有限非保守情况)

当Q保守时，可逆Q过程的存在性问题及Q保守、有限流出时，不断有势Q过程的存在性问题均已解决，见［1］［4］。但在Q非保守时，还没有什么结果。在本节中，我们将给出Q有限流出、有限非保守时，不断有势Q过程及可逆Q过程的存在性准则。

现设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是已知常数。称 $X=[x_{ij}]_{n\times n}$ 是线性方程组 $X[f]_1^n=[1]_1^n$ 的一组可行解，若X满足条件：

(i) $x_{ij}\geq 0 \quad (1\leq i\leq n \qquad 1\leq j\leq n)$

(ii) $x_{ij}=x_{ji} \quad (1\leq i\leq n \qquad 1\leq j\leq n)$

(iii) $x_{ij}=0 \quad (m+1\leq i\leq n \quad m+1\leq j\leq n)$

这里当然要求 $0<m\leq n$

引理 3.1：若$f_i\geq 0(\forall i)$则 $X[f]_1^n=[1]_1^n$存在可行解的充分必要条件为

$$\sum_{i=1}^m f_i>0 \quad 且 \quad \sum_{i=1}^m f_i\geq\sum_{i=m+1}^n f_i$$

现仍设Q有限流出($|B|=m$)，有限非保守($|H|=n-m$)

本节中总记：$f_i=\sigma^i+\sum\limits_{k=1}^n W^{ik} \quad (i=1,2,\cdots,n)$

$$\tau=\sum_{i=1}^m f_i-\sum_{i=m+1}^n f_i$$

显然，我们恒可假设 $f_i>0(\forall i)$成立，同时易知 $0<\sum\limits_{i=1}^m f_i\leq+\infty \quad 0<\sum\limits_{i=m+1}^n f_i<+\infty$

从而 $0\leq\tau\leq+\infty$ 意味着：或者 $\sum\limits_{i=1}^m f_i=+\infty$ 或者 $\sum\limits_{i=m+1}^n f_i\leq\sum\limits_{i=1}^m f_i<+\infty$

定理 3.2：设Q有限流出，有限非保守，则存在不断有势Q过程的充分必要条件为：Q弱可配称，且存在某个配称列(π_k)，使得

$$\sum_k \pi_k Z_k(\lambda) < +\infty \text{ 及 } 0 \leqslant \tau \leqslant +\infty \text{ 同时成立。}$$

定理 3.3：设Q有限流出、有限非保守，则存在不断可配称Q过程的充分必要条件为：Q可配称，且存在某个配称分布(π_k)使 $0 \leqslant \tau \leqslant +\infty$ 成立。

最后给出可逆Q过程的存在性准则。

定理 3.4：设Q有限流出、有限非保守，则存在可逆Q过程的充分必要条件为下列三条同时成立：

① Q可配称；

② 或者Q既约，或者Q可约，但每个零流出子块至少含有一个非保守状态；

③ 存在某个配称分布(π_k)使得 $0 \leqslant \tau \leqslant +\infty$。

§4. 不断有势Q过程唯一性准则（有限流出、有限非保守情况）

本节讨论Q有限流出、有限非保守时，不断有势Q过程的唯一性问题。

鉴于Q保守有限流出时的唯一性问题已解决[4]，故我们假定$H \neq \Phi$。此外，由于Q零流出，有限非保守时唯一性问题平凡，因而我们亦假定 $B \neq \Phi$，从而

$$|G| = |B \cup H| = n \geqslant 2。$$

先考虑两个特殊情况：

定理 4.1：设Q为单流出，有限非保守Q矩阵，那么不断有势Q过程若存在，则必唯一。

定理 4.2：设Q为双流出，有限非保守Q矩阵，满足关于$\Pi = (\pi_i)$的不断有势Q过程的存在性条件，则关于$\Pi = (\pi_i)$的不断有势Q过程或唯一，或者有无穷多个，详言之：

若 （i） $\tau = 0$ 且Q单非保守

（ii） $W^{11} = W^{12} = W^{21} = +\infty$ 或者 $W^{22} = W^{12} = W^{21} = +\infty$

两条件之一成立，则不断有势Q过程唯一。

在其他情况下，存在无穷多个不断有势Q过程。

现给出Q是一般的有限流出，有限非保守Q矩阵时的不断有势Q过程的唯一性准则：

定理 4.3：设Q有限流出$(|B| = m)$，有限非保守 $(|H| = n - m)$，弱可配称，且满足关于$\Pi = (\pi_i)$的不断有势Q过程的存在性条件。

则：关于 $\Pi = (\pi_i)$的不断有势Q过程唯一的充要条件是下列三条之一成立：

（1） $m \leqslant 1$

（2） $m \geqslant 2$ 且 $\tau = 0$，Q单非保守

（3） $m \geqslant 2$ 且对任意含有 $I_{2\times 2}$ 单位子阵的 $m \times 2$ 阶随机矩阵P，

定义 $\widetilde{W} = P^{\mathrm{T}} \overline{W} P$，必有$\widetilde{W}$的某一行的元素全为$\infty$。（约定 $0 \cdot \infty = 0$）

这里 $\overline{W} = [W]_{B \times B}$ 即W在$m \times m$ 上的限制。

而在不断有势Q过程非唯一的情况时，必然有无穷多个不断有势Q过程。

条件（2）中 $\tau=0$ 的意思，当然是指 $\sum_{i=1}^{m} f_i = \sum_{i=m+1}^{n} f_i < \infty$。

定理4.3中的条件（3）不太便于直接判断，但可以看出，条件（3）是否成立，完全决定于$\overline{W}$矩阵中无穷元的分布情况。据此，下面我们给出条件（3）的一个等价条件，它比条件（3）简单、明确。

我们借用谢邦杰《线性代数》一书中关于矩阵子块的符号。

设B是一个可能含有无穷元的矩阵。令 $\{B\}=\begin{cases} 1 & \text{若 } B \text{中含有无穷元} \\ 0 & \text{若 } B \text{中不含无穷元} \end{cases}$

再设A是 $n\times n$ 阶矩阵，

$B=A\begin{bmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_r \\ i_1,i_2,\cdots,i_r \end{bmatrix}$ 是A的任意一个主子阵，$(i_1,\cdots,i_r)$与$(i_1',\cdots,i_{n-r}')$构成$(1,2,\cdots,n)$的一个完全足数组。

则记 $B^c=A\begin{bmatrix} i_1',i_2',\cdots,i_{n-r}' \\ i_1',i_2',\cdots,i_{n-r}' \end{bmatrix}$ $\qquad B^u=A\begin{bmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_r, \\ i_1',i_2',\cdots,i_{n-r}' \end{bmatrix}$

$B^d=A\begin{bmatrix} i_1',i_2',\cdots i_{n-r}' \\ i_1,i_2,\cdots i_r \end{bmatrix}$

$\delta(B)=\{B\}+\{B^c\}+\{B^u\}+\{B^d\}$

当主子阵B给定后，$\delta(B)$的数值是一目了然的。注意：我们不把A本身看成A的一个主子阵。

引理 4.4：定理4.3中条件（3）成立的充要条件是：对$\overline{W}$的任意主子阵V，均有 $\delta(V)\geqslant 3$。

有了引理4.4，定理4.3可改写为：

定理 4.5：设Q有限流出（$|B|=m$），有限非保守（$|H|=n-m$）弱可配称，且满足关于$\Pi=(\pi_i)$的不断有势Q过程的存在性条件。

则 关于$\Pi=(\pi_i)$的不断有势Q过程唯一的充要条件是下列三条之一成立：

（1） $m\leqslant 1$

（2） $m\geqslant 2$ 且 $\tau=0$，Q单非保守

（3） 对于$\overline{W}$的任意主子阵V，均有 $\delta(V)\geqslant 3$ 这里$\overline{W}=[W]_{B\times B}$

而在不断有势Q过程非唯一时，必有无穷多个不断有势Q过程。

将本节定理的陈述略加改动，可得到不中断可配称Q过程及可逆Q过程的相应结论，这里不再赘述。

§5. 一类有势Q过程

本节及下节我们去掉Q有限流出、有限非保守的条件，而对一般的Q矩阵进行某些讨论。

对于任意给定的Q矩阵，记 $H_i(\lambda)=\sum_{a\in H}\Phi_{ia}(\lambda)d_a$ $\quad Z_i(\lambda)=1-\lambda\sum_j\Phi_{ij}(\lambda)$

周知 $Z_i(\lambda)=H_i(\lambda)+\overline{X}_i(\lambda)$ 这里 $\overline{X}(\lambda)$ 是方程 $\begin{cases}(\lambda I-Q)U=0\\ 0\leqslant U\leqslant 1\end{cases}$ 的最大解。

现设 $\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)+\overline{X}(\lambda)F^1(\lambda)+H(\lambda)F^2(\lambda)$ (*)

形如(*)的 $\Psi(\lambda)$ 何时是有势 Q 过程？何时是不中断的有势 Q 过程？这就是本节的讨论目标。当 $\overline{X}(\lambda)=0$ 或 $H(\lambda)=0$ 时。形如(*)的 $\Psi(\lambda)$ 的有势性已有过讨论[5]。故在本节中，进一步假定 $\overline{X}(\lambda)\neq 0$ 且 $H(\lambda)\neq 0$

记 $\eta(\lambda)=\overline{X}^T(\lambda)\Pi$ $\theta(\lambda)=H^T(\lambda)\Pi$ $h=\sum\limits_{a\in H}\Gamma_{\cdot a}d_a$

再记 $\sigma^1=\lambda\langle\eta(\lambda),X^0\rangle$。 $\sigma^2=\lambda\langle\theta(\lambda),X^0\rangle$

$W_\lambda^{11}=\lambda\langle\eta(\lambda),\overline{X}\rangle$ $W_\lambda^{12}=\lambda\langle\eta(\lambda),h\rangle$

$W_\lambda^{21}=\lambda\langle\theta(\lambda),\overline{X}\rangle$ $W_\lambda^{22}=\lambda\langle\theta(\lambda),h\rangle$

易知 $\sigma^i<\infty$ 且与 $\lambda>0$ 无关 $(i=1,2)$

$W_\lambda^{ab}\uparrow W^{ab}(\lambda\uparrow\infty)$ $(a=1,2,\ b=1,2)$

且 $W_\lambda^{12}=W_\lambda^{21}$ 从而 $W^{12}=W^{21}$

下面我们要将形如(*)的全部有势 Q 过程构造出来，构造依赖于 W^{11}，$W^{12}=W^{21}$，W^{22} 的性态，即它们是否无穷。

先考虑 $W^{11}+W^{12}+W^{21}+W^{22}<+\infty$ 的情况。

定理 5.1：设 Q 弱可配称，且 $W^{11}+W^{12}+W^{21}+W^{22}<+\infty$

则：任选一个形如 $\begin{bmatrix} r_1 & r_2\\ r_2 & 0\end{bmatrix}$ 的非负二阶方阵 R，满足条件：

$\begin{cases} r_1\widetilde{f}_1+r_2\widetilde{f}_2\leqslant 1\\ r_1\widetilde{f}_1\leqslant 1\end{cases}$ 这里 $\begin{array}{l}\widetilde{f}_1=\sigma^1+W^{11}+W^{12}\\ \widetilde{f}_2=\sigma^2+W^{21}+W^{22}\end{array}$

然后令 $R_\lambda^{11}=\dfrac{1}{\varDelta}[r_1+r_2^2(W^{22}-W_\lambda^{22})]$

$$R_\lambda^{12}=R_\lambda^{21}=\frac{r_2}{\varDelta}[1-r_2(W^{12}-W_\lambda^{12})]$$

$$R_\lambda^{22}=\frac{r_2^2}{\varDelta}(W^{11}-W_\lambda^{11})$$

这里 $\varDelta=[1-r_2(W^{12}-W_\lambda^{12})]^2+r_2^2(W^{11}-W_\lambda^{11})(W^{22}-W_\lambda^{22})-r_1(W^{11}-W_\lambda^{11})$

然后令 $\Psi_{ij}(\lambda)=\Phi_{ij}(\lambda)+R_\lambda^{11}\overline{X}_i(\lambda)\ \pi_j\overline{X}_j(\lambda)+R_\lambda^{12}[\overline{X}_i(\lambda)\pi_j\ H_j(\lambda)+\overline{X}_j(\lambda)\pi_jH_i(\lambda)]+$
$+R_\lambda^{22}H_i(\lambda)\pi_jH_j(\lambda)$

则 $\Psi(\lambda)$ 是一个有势 Q 过程，

反之，形如(*)的每一个有势 Q 过程都可如上得到。

当 $\widetilde{f}_1\geqslant\widetilde{f}_2$ 时，在上述有势 Q 过程中，有且仅有一个不中断的有势 Q 过程。

这个不中断的有势 Q 过程，令 $r_2=\dfrac{1}{\widetilde{f}_1}$， $r_1=\dfrac{\widetilde{f}_1-\widetilde{f}_2}{\widetilde{f}_1}$ 即可得到

当 $\widetilde{f}_1<\widetilde{f}_2$ 时，不存在形如(*)的不断有势 Q 过程。

下面考虑 $W^{11}+W^{12}+W^{21}+W^{22}=+\infty$ 的情况。

为方便起见，将形如(*)的有势 Q 过程分为两类，分别称为“二度”及“一度”有势 Q 过程，只要这两部分分别构造清楚了，全部的构造也就得到了。

定理 5.2： 设Q弱可配称且 $W^{11}+W^{12}+W^{21}+W^{22}=+\infty$

则：（i） 若 $W^{11}=+\infty$ $W^{12}=W^{21}<+\infty$ $W^{22}=+\infty$ 时

取常数 $b\geqslant W^{12}$

再取常数 $p.q.$ 使 $p\geqslant\sigma^1+b$ $q\geqslant\sigma^2+b$

然后令 $R_\lambda=\frac{1}{\varDelta}\begin{bmatrix} q+W^{22}_\lambda & b-W^{12}_\lambda \\ b-W^{12}_\lambda & p+W^{11}_\lambda \end{bmatrix}$

这里 $\varDelta=(p+W^{11}_\lambda)(q+W^{22}_\lambda)-(b-W^{12}_\lambda)^2$

则 $\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)+[\overline{X}(\lambda)\ \ H(\lambda)]\begin{bmatrix} R^{11}_\lambda & R^{12}_\lambda \\ R^{21}_\lambda & R^{22}_\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta(\lambda) \\ \theta(\lambda) \end{bmatrix}$ 就是一个二度有势Q过程。反之，形如(＊)的每一个二度有势Q过程都可这样构造出来。

这中间有无穷多个不中断的有势Q过程，只要任取常数$b\geqslant W^{12}$，然后令$p=\sigma^1+b$ $q=\sigma^2+b$，则上面构造的就是不中断有势Q过程，且每一个形如（＊）的二度不中断有势Q过程都可这样构造出来。

（ii） 若 $W^{11}<+\infty$ $W^{12}=W^{21}<+\infty$ $W^{22}=+\infty$ 时

取常数 $b\geqslant W^{12}$ 再取常数 $p\geqslant\sigma^1+b$

令 $t=\dfrac{W^{11}+p}{W^{11}+p+b-W^{12}}$ $\qquad r=\dfrac{W^{11}b+W^{12}p}{W^{11}+p+b-W^{12}}$

再取常数 $q\geqslant(1-t)\sigma^1+t\sigma^2+r$

然后令 $R_\lambda=\frac{1}{\varDelta}\begin{bmatrix} tW^{22}_\lambda+q+b(1-t) & t(b-W^{12}_\lambda) \\ t(b-W^{12}_\lambda) & t(p+W^{11}_\lambda) \end{bmatrix}$

这里 $\varDelta=t(W^{11}_\lambda W^{22}_\lambda-W^{12}_\lambda W^{12}_\lambda)+pq-br+W^{11}_\lambda(q+b-tb)+tpW^{22}_\lambda+2tbW^{12}_\lambda$

则 $\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)+[\overline{X}(\lambda)\quad H(\lambda)]\begin{bmatrix} R^{11}_\lambda & R^{12}_\lambda \\ R^{21}_\lambda & R^{22}_\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta(\lambda) \\ \theta(\lambda) \end{bmatrix}$ 就是一个二度有势Q过程

反之，形如(＊)的每一个二度有势Q过程都可这样得到。

这中间有无穷多个不中断的有势Q过程

只要取常数 $b\geqslant W^{12}$ 然后令 $p=\sigma^1+b$ $t=\dfrac{W^{11}+p}{W^{11}+p+b-W^{12}}$

$r=\dfrac{W^{11}b+W^{12}p}{W^{11}+p+b-W^{12}}$ $\qquad q=(1-t)\sigma^1+t\sigma^2+r$ 则得到不中断有势Q过程

且每一个形如(＊)的二度不中断有势Q过程都可这样得到。

（iii） 若$W^{11}<+\infty$ $W^{12}=W^{21}=+\infty$ $W^{22}<+\infty$ 时

取常数 $b\geqslant W^{22}$， $p\geqslant W^{11}$， $q\geqslant max\{\sigma^2+b,\ \ \sigma^1+p\}$，

然后令 $R_\lambda=\frac{1}{\varDelta}\begin{bmatrix} b-W^{22}_\lambda & q+W^{12}_\lambda \\ q+W^{12}_\lambda & p-W^{11}_\lambda \end{bmatrix}$

其中 $\varDelta=(q+W^{12}_\lambda)^2-(b-W^{22}_\lambda)(p-W^{11}_\lambda)$

则 $\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)+[\overline{X}(\lambda)H(\lambda)]\begin{bmatrix} R^{11}_\lambda & R^{12}_\lambda \\ R^{21}_\lambda & R^{22}_\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta(\lambda) \\ \theta(\lambda) \end{bmatrix}$ 就是一个二度的有势Q过程，

反之，形如(＊)的每一个二度有势Q过程都可这样构造出来。

这中间有无穷多个不中断的有势Q过程。

只要取常数 $b\geqslant max\{W^{22}, W^{11}+\sigma^1-\sigma^2\}$，然后令：

$p=\sigma^2-\sigma^1+b \quad q=\sigma^2+b$ 则得到不中断有势Q过程。

且每一个形如(＊)的二度不断有势Q过程都可这样构造。

(iv) 在其他情况下，不存在形如(＊)的二度有势Q过程。

定理 5.3： 设Q弱可配称，且 $W^{11}+W^{12}+W^{21}+W^{22}=+\infty$

则：(i) 若 $W^{11}=+\infty \quad W^{12}=W^{21}<+\infty \quad W^{22}=+\infty$ 时，

(a) 或者取常数 $c\geqslant\sigma^1+\sigma^2$

然后令 $R_\lambda^{11}=R_\lambda^{12}=R_\lambda^{21}=R_\lambda^{22}=(W_\lambda^{11}+W_\lambda^{12}+W_\lambda^{21}+W_\lambda^{22}+c)^{-1}$

(b) 或者取常数 $c\geqslant\sigma^1+W^{12}$

然后令 $R_\lambda^{11}=(W_\lambda^{11}+c)^{-1} \quad R_\lambda^{12}=R_\lambda^{21}=R_\lambda^{22}=0$

(c) 或者取常数 $c\geqslant\sigma^2+W^{12}$

然后令 $R_\lambda^{22}=(W_\lambda^{22}+c)^{-1} \quad R_\lambda^{11}=R_\lambda^{12}=R_\lambda^{21}=0$

则 $\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)+[\overline{X}(\lambda) \quad H(\lambda)]\begin{bmatrix} R_\lambda^{11} & R_\lambda^{12} \\ R_\lambda^{21} & R_\lambda^{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta(\lambda)\\ \theta(\lambda)\end{bmatrix}$ 是一个一度有势Q过程，

且每一个形如(＊)的一度有势Q过程都可这样构造出来。

(ii) 若$W^{11}<+\infty \quad W^{12}=W^{21}<+\infty \quad W^{22}=+\infty$ 时，

(a) 或者取常数 g 满足 $0\leqslant g\leqslant 1$

再取常数 c 满足 $c\geqslant g\sigma^1+\sigma^2+g(1-g)W^{11}+(1-g)W^{12}$

然后令 $R_\lambda^{22}=(g^2W_\lambda^{11}+gW_\lambda^{12}+gW_\lambda^{21}+W_\lambda^{22}+c)^{-1}$

$R_\lambda^{12}=R_\lambda^{21}=gR_\lambda^{22} \quad R_\lambda^{11}=g^2R_\lambda^{22}$

(b) 或者取常数 c，满足 $c\geqslant\sigma^1+W^{12}$

然后令 $R_\lambda^{11}=(W_\lambda^{11}+c)^{-1} \quad R_\lambda^{12}=R_\lambda^{21}=R_\lambda^{22}=0$

则 $\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)+[\overline{X}(\lambda) \quad H(\lambda)]\begin{bmatrix} R_\lambda^{11} & R_\lambda^{12} \\ R_\lambda^{21} & R_\lambda^{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta(\lambda)\\ \theta(\lambda)\end{bmatrix}$ 是一个一度有势Q过程，

且每一个形如(＊)的一度有势Q过程都可这样构造出来。

(iii) 若 $W^{11}=+\infty \quad W^{12}=W^{21}<+\infty \quad W^{22}<+\infty$ 时

任取常数 g，使满足 $0\leqslant g\leqslant 1$

再取常数 c，使满足 $c\geqslant\sigma^1+g\sigma^2+(1-g)W^{12}+g(1-g)W^{22}$

然后令 $R_\lambda^{11}=(W_\lambda^{11}+gW_\lambda^{12}+gW_\lambda^{21}+g^2W_\lambda^{22}+c)^{-1}$

$R_\lambda^{12}=R_\lambda^{21}=gR_\lambda^{11} \qquad R_\lambda^{22}=g^2R_\lambda^{11}$

则 $\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)+[\overline{X}(\lambda)H(\lambda)]\begin{bmatrix} R_\lambda^{11} & R_\lambda^{12} \\ R_\lambda^{21} & R_\lambda^{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta(\lambda)\\ \theta(\lambda)\end{bmatrix}$ 是一个一度有势Q过程，

且每一个形如(＊)的一度有势Q过程都可这样构造出来。

(iv) 在其他情况下，取常数 $c\geqslant\sigma^1+\sigma^2$

然后令 $R_\lambda^{11}=R_\lambda^{12}=R_\lambda^{21}=R_\lambda^{22}=(W_\lambda^{11}+W_\lambda^{12}+W_\lambda^{21}+W_\lambda^{22}+c)^{-1}$

则 $\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)+[\overline{X}(\lambda) \quad H(\lambda)]\begin{bmatrix} R_\lambda^{11} & R_\lambda^{12} \\ R_\lambda^{21} & R_\lambda^{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta(\lambda)\\ \theta(\lambda)\end{bmatrix}$ 是一个一度有势Q过程，

且每一个形如(＊)的一度有势Q过程都可这样构造出来。

(v) 在所有的情况下，不中断的一度有势Q过程都存在而且唯一，只要在上面各种

情况的构造中，令 $g=1 \quad c=\sigma^1+\sigma^2$

即得到这个唯一的不中断一度有势Q过程为

$$\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)+Z(\lambda)\cdot M_\lambda\cdot(\Pi Z(\lambda))^T$$

这里 $M_\lambda=(W_\lambda^{11}+W_\lambda^{12}+W_\lambda^{21}+W_\lambda^{22}+\sigma^1+\sigma^2)^{-1}=(\lambda\sum_k \pi_k Z_k(\lambda))^{-1}$

§6．存在性问题（Q任意的情况）

在§3中曾给出了Q有限流出，有限非保守时，不断有势Q过程及可逆Q过程的存在性准则。本节对任意的Q来讨论这一存在性问题。

引理 6.1：设Q关于$\Pi=(\pi_k)$弱可配称

则有：$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sum\limits_k\lambda\pi_k Z_k(\lambda)=\sum\limits_{a\in H}\pi_a d_a+\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sum\limits_k\lambda\pi_k\overline{X}_k(\lambda)$

我们令 $\widetilde{f}_1=\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sum\limits_k\lambda\pi_k\overline{X}_k(\lambda) \qquad \widetilde{f}_2=\sum\limits_{a\in H}\pi_a d_a$

当$\widetilde{f}_1$及$\widetilde{f}_2$均有限时，令 $\tau=\widetilde{f}_1-\widetilde{f}_2$ 当$\widetilde{f}_1$与$\widetilde{f}_2$中至少有一个为∞时，规定 $\tau=\infty$ 从而必有 $-\infty<\tau\leqslant+\infty$

故若有 $0\leqslant\tau\leqslant+\infty$，则意味着：或者 $\widetilde{f}_1=+\infty$ 或者 $\widetilde{f}_2=+\infty$ 或者 $\widetilde{f}_2\leqslant\widetilde{f}_1<+\infty$

注意，这里定义的$\widetilde{f}_1$及$\widetilde{f}_2$与§5及§3中的定义是一致的。

定理 6.2：设Q是任给的一个Q矩阵。

则存在不断有势Q过程的充分条件为：Q弱可配称，且存在某个配称列 $\Pi=(\pi_k)$ 使条件 $\sum\limits_k\pi_k Z_k(\lambda)<\infty$ 及 $0\leqslant\tau\leqslant+\infty$ 同时成立。

对此定理3.2，可知当Q有限流出，有限非保守时，上述的充分条件也是必要条件。

定理 6.3：设Q是任给的一个Q矩阵。

则存在不断可配称Q过程的充分条件为：Q可配称，且存在某个配称分布$\Pi=(\pi_k)$使 $0\leqslant\tau\leqslant+\infty$成立。

最后，考虑可逆Q过程。

定理 6.4：设Q是任给的一个Q矩阵

则存在可逆Q过程的充分条件为：

(1) Q可配称

(2) 或者Q既约，或者Q可约，但每个零流出子块至少含有一个非保守状态

(3) 存在某个配称分布$\Pi=(\pi_k)$使满足 $0\leqslant\tau\leqslant+\infty$

三条件同时成立。

定理 6.5：设Q是任给的一个Q矩阵

则存在可逆Q过程的必要条件为下列两条成立：

(1) Q可配称

(2) 或者Q既约，或者Q可约，但每个零流出子块至少含有一个非保守状态。

对比定理6.4及6.5可见这里给出的充分性条件与必要性条件是很接近的。而且我们业已证明：当Q有限流出，有限非保守时，定理6.4中的充分条件也是必要条件。（见定理3.4）

参 考 文 献

[1] 侯振挺、钱敏等著《可逆马尔可夫过程》 湖南科学技术出版社 1979

[2] 侯振挺、郭青峰《齐次可列马尔可夫过程》 科学出版社 1978

[3] 杨向群《可列马尔可夫过程构造论》 湖南科学技术出版社 1981

[4] 陈木法《有限流出有势Q过程》

[5] 侯振挺、陈木法《一类Q过程的有势性》 北京师大学报 1980.三、四期

[6] 陈木法《抽象空间中的可逆马尔可夫过程》 数学年刊 3—4 (1980)

[7] 郑小谷《抽象空间中的有势马尔可夫过程》

[8] 王梓坤《生灭过程与马尔可夫链》 科学出版社 1980

[9] Williams. D. On the construction Problem for Markov chain. Z. Wahrscheinlich keits. Theorie 3. 227—246(1964)

[10] G. E. H. Reuter. Denumerable Markov Processes Ⅱ J. London. Math. Soc. 34(1959)81—91

[11] G. E. H. Reuter. Denumerable Markov. Processes Ⅲ J. London. Math. Soc. 37(1962)64—73

[12] Feller. W. On boundaries and lateral conditions for the Kolmogoroff differential equations Ann of Math. Ⅱ Ser. 65 527—570(1957)

[13] 甘特马赫尔《矩阵论》

[14] 谢邦杰《线性代数》

常返Q过程的定性理论*

概率论与数理统计专业78级研究生　肖果能

§1　引　言

构造理论是齐次可列$Markov$过程论的核心。构造问题的一般提法是：对于任给的一个Q矩阵，i）Q过程是否存在？ii）如果Q过程存在，则Q过程唯一的充要条件是什么？iii）如果Q过程不唯一，则如何构造出全部Q过程？从定性、定量的观点来看，i）ii）是定性问题，iii）是定量问题。关于一般的Q过程的定性问题已经有了完满的结果：$Feller$对任意的Q，构造了最小Q过程，从而证明了Q过程总是存在的；侯振挺教授提出了著名的Q过程唯一性准则，从而解决了问题ii）。更深入地，我们可以研究各种特殊类型的Q过程的定性理论，即对于某类特殊的Q过程，回答问题i）与ii），例如[3]第14章，彻底解决了B型、F型、$B\cup F$型……等二十种类型的Q过程的定性问题，[7]、[8]、[9]讨论了有势（可逆）Q过程的定性理论及构造。

本文讨论常返Q过程的定性理论。常返Q过程是在理论上和应用都十分重要的一类Q过程，物理问题和其它一些实际问题中常见的过程大多是常返甚至遍历的，所以常返Q过程定性理论的讨论无疑是很有意义的。在Q保守的条件下，本文§4彻底解决了各类常返Q过程的存在性、存在的个数及唯一性问题。在Q保守、不规则的条件下，§5在$Doob$过程类$D(Q)$，§6在过程类$S(Q)$中更深入地讨论常返Q过程的定性理论，给出了$D(Q)$及$S(Q)$中的一切过程均为常返，一切过程均为正常返及一切常返过程均为正常返的充要条件，作为推论，我们重新得到了“当$R<\infty$时，一切不中断的生灭过程全为正常返”这一熟知的结果。§7对保守的Q，讨论平稳过程及Q—平稳分布的存在及唯一性问题。§8讨论非保守情形，给出非保守情形下常返Q过程存在性的一些充分条件。不过，非保守情形下常返Q过程定性理论的讨论还只是初步的。

常返Q过程的定性理论紧密联系于状态分类的理论。但是状态分类是对以不同方式构造出来的各种Q过程分别找出状态的常返性或正常返性的判别准则，由于问题iii）即全部Q过程的构造问题还远远没有解决，所以能够给出的这种判别准则毕竟是有限的。尽管如此，本文在Q保守时对于常返Q过程定性理论的讨论却是彻底的，因为我们不是着眼于个别过程和过程的个别状态，而是从整体上考察全体Q过程，讨论过程的常返性。

在写作过程中，作者始终得到导师侯振挺教授的亲切关怀和热情指导，谨致深切的谢忱。