

高安版学速成深化复习十六讲

序 言

黄庆祥等三位同志的这本书问世了，作者要我写几句话，作为一个多年来教过类似课程的人，谈一点意见。

高等数学无疑是极其重要的基础课，是高等学校学生（非数学专业）数学训练最主要的一部分。因此，是否能教得好，学得好，对于学生能否适应今后的工作关系极大。同时，这门课又是非常难教、难学的，因为材料太多，内容涉及各个方面。要想不是依样画葫芦，不是只按一本标准的教材照本宣科，要使学生能对其精髓有所体会，当然就要花极大的精力。黄庆祥等同志的这本书，注意到了学生平时没有注意到的一些方面，注意到了各部分之间的联系以及各种常用而又在教科书上言之不详的方法，自然是很有意义的，它可以引导学生深入牢固地掌握这门课的基本内容。本书又对一些例题作了比较详细的分析，自然也有助于学生掌握这门课的基本方法。因此，对于解决前面提出的问题，是很有益的，仅在此对作者付出的精力和取得的成效表示钦佩与感谢。是为序。

齐 民 友

1988年5月29日

前 言

《高等数学速成深化复习十六讲》一书，是我们长期教学经验的积累与总结。它不仅是高等数学和工程数学重点内容的系统复习与深化，而且较好地解决了目前在高等数学、工程数学的教学、评估与统考中出现的纵向深、横向广、方法灵活技巧性强等问题，是一本理想的“高等数学”速成深化复习参考书。

全书共十六讲，第一至十三讲为“高等数学的重要内容”，第十四、十五和十六讲分别为“线性代数”、“概率论”和“复变函数”的主要内容。该书通俗简炼，重点突出，难点分散，内容少而精。书中不但对有关基本概念的含义、基本定理的运用、方法的引进和演算技巧等作了精辟的阐述与系统的总结，而且还选择了不少极富有解剖、思考价值的典型例题。每讲后面附有适量的习题，并配有提示与答案；书的最后附有近几年全国硕士研究生的统考试题，可供读者参考与自检。

本书是大学（包括大、函大等成人大学）学生学习高等数学的参考教材，特别是大学进行高等数学教学评估、会考和参加研究生入学考试的难得的复习课本，同时还是高等数学自学者的“良师益友”。

该书各讲编写者，黄庆祥：第一、九、十、十一、十二和十四讲；何灿芝：第五、六、七、八和十五讲；张杰恒：

第二、三、四、十三和十六讲。全书由黄庆祥统稿。限于水平，错误难免，恳请读者惠予指正。

承蒙著名数学家武汉大学教授齐民友作序，谨致谢忱。

编者

1988年9月

目 录

序 言	(VI)
前 言	(VII)
第一讲 巧用微积分学知识解决函数的 极限、连续问题	(1)
一、不容忽视的几个函数方面的问题	(1)
二、求极限方法大全	(7)
三、有关函数连续性的综合问题	(30)
习题一	(36)
答案与提示	(37)
第二讲 导数概论	(40)
一、巧用导数定义	(40)
二、单侧导数的若干注意	(45)
三、链式法则再论	(49)
四、细说 $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$	(55)
五、各式函数求导问题列论	(59)
六、对数求导法简述	(77)
七、高阶导数的全面回顾	(78)
八、函数性态略述	(84)
九、最大最小值简论	(90)
习题二	(93)

答案与提示	(101)
第三讲 微分中值定理	(113)
一、微分中值定理系列	(113)
二、涉及导数的极限问题	(119)
三、涉及导数的等式问题	(124)
四、涉及导数的不等式问题	(130)
五、函数的零点问题	(138)
习题三	(144)
答案与提示	(149)
第四讲 多元函数微分法	(157)
一、基本概念提要	(157)
二、两种微分法	(175)
三、极值理论	(191)
习题四	(198)
答案与提示	(203)
第五讲 不定积分的技巧与例题分析	(208)
一、原函数与不定积分	(208)
二、积分法	(210)
三、常见的几类函数的积分	(222)
习题五	(238)
答案与提示	(240)
第六讲 微积分学基本定理剖析与	
定积分的计算	(243)
一、定积分的概念与性质	(243)
二、微积分学基本定理	(246)
三、定积分的计算	(247)
四、典型例题分析	(250)

习题六	(267)
答案与提示	(270)
第七讲 重积分的定限与换元	(274)
一、重积分与定积分概念、性质的比较	(274)
二、二重积分的定限	(279)
三、二重积分的换元法	(290)
四、三重积分的定限与换元	(302)
习题七	(314)
答案与提示	(316)
第八讲 涉及积分的等式与不等式	(320)
一、涉及积分的等式	(320)
二、涉及积分的不等式	(334)
习题八	(346)
答案与提示	(349)
第九讲 广义积分与含参变量积分问题的解法综述	(355)
一、广义积分的敛散性与有关综合题	(355)
二、含参变量积分的解题技巧	(364)
习题九	(371)
答案与提示	(372)
第十讲 如何灵活应用格林公式与奥、高公式	(374)
一、化曲线的一般式为参数式的技巧	(374)
二、格林公式及曲线积分与路径无关等问题	(379)
三、曲面积分与奥、高公式, 斯托克斯公式	(390)
四、与曲面积分有关的解题方法	(394)

习题十	(403)
略解与提示	(405)
第十一讲 积分应用小结	(409)
一、平面图形的面积	(409)
二、求体积的重要公式与方法	(414)
三、弧长与曲面面积	(420)
四、变力作功问题	(424)
五、质量、重心和转动惯量	(429)
六、在其他方面的应用	(435)
习题十一	(439)
答案与提示	(441)
第十二讲 无穷级数敛散性与求和问题剖析	(445)
一、常数项级数敛散性的解题方法	(445)
二、特殊函数项级数的若干范例	(458)
三、幂级数的几个引人注目的问题	(466)
四、级数求和的几种典型方法	(484)
习题十二	(499)
答案与提示	(501)
第十三讲 微分方程解法集锦	(507)
一、微分方程的各种基本类型概括	(507)
二、解法选讲	(512)
三、常系数线性微分方程组	(543)
应用略述	(547)
习题十三	(551)
答案与提示	(555)
第十四讲 线性代数	(561)
一、高阶行列式的解题技巧	(561)

二、矩阵的理论与运算	(567)
三、线性方程组的相容性与解法	(582)
四、线性空间与线性变换	(597)
五、二次型	(604)
习题十四	(615)
答案与提示	(618)
第十五讲 概率论要点与试题选讲	(624)
一、基本概念	(624)
二、一维随机变量及其分布	(629)
三、多维随机变量及其分布	(631)
四、随机变量的函数及其分布	(634)
五、随机变量的数字特征	(636)
六、大数定律与中心极限定理	(639)
七、试题选讲	(642)
习题十五	(654)
答案与提示	(658)
第十六讲 解析函数及其积分	(659)
一、复数略述	(659)
二、解析函数	(663)
三、积分	(669)
四、附录——四个常用的初等函数	(976)
习题十六	(678)
答案与提示	(679)

第一讲 巧用微积分知识解决 函数的极限、连续问题

一、不容忽视的几个函数方面的问题

毫无疑问，读者们对函数及其有关特性的定义几乎都能逐字逐句地述出。然而，遇到有一定难度的题目时就不一定能顺利地解出。这一方面是对概念理解不透，另一方面也有技巧上的问题。本节先引述几个定义，再举若干范例，以期对读者进一步理解函数方面的几个定义及有关概念和掌握解题技巧有所裨益。

1. 函数及其特性概述

定义1 设 S 为某一实数的集合。若当变量 x 取 S 中一值时，变量 y 就有完全确定的值与之对应，则称 y 为 x 的函数，记为

$$y = f(x), x \in S.$$

S 称为函数 $f(x)$ 的定义域。所有函数值（ y 值）的集合叫函数的值域。

在函数问题的讨论中，除定义域外，经常碰到的是下列函数的几个基本特性的问题。

1) 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 S 。若存在正数 M ，使得对 S 上的任意一点 x ，有 $|f(x)| \leq M$ ，则称 $f(x)$ 是有界的，否

则,称 $f(x)$ 是无界的。

2) 函数的单调性

设 $f(x)$ 定义于区间 (a, b) 内。若对于任意的 $x_1 < x_2$, $x_1 \in (a, b)$, $x_2 \in (a, b)$, 有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内是(严格)单调增加(减少)的。如果是 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内是非减(增)的。

3) 函数的奇偶性

若函数 $f(x)$ 在对称区间 $(-a, a)$ 内有定义且 $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$)则称 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内为偶(奇)函数。

4) 函数的周期性

给出函数 $f(x)$, 若存在一个非零的数 T , 使得对于定义域内的任何 x , 均有 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 叫 $f(x)$ 的周期。通常 T 是指最小正周期。

2. 范例

例1 设 $f_n(x) = \underbrace{f\{f[f \cdots f(x)]\}}_{n \text{ 个 } f}$ 且 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

求 $f_n(x)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解 } f_2(x) &= \{f(x)\} = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} / \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} \end{aligned}$$

$$f_3(x) = f\{f_2(x)\} = \frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} / \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} \right)^2} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

现设 $n=k$ 时, $f_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$, 则当 $n=k+1$ 时, 有

$$f_{k+1}(x) = f\{f_k(x)\} = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}} / \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}} \right)^2} \\ = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

故由数学归纳法知, $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

例 2 设 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 求 $f[f(x)]$ 及 $f[f[f(x)]]$ 及其定义域.

解 $\because f(x) = \frac{1}{1-x}, x \neq 1,$

$$\therefore f[f(x)] = \frac{1}{1-f(x)}, (\text{此时 } f(x) \neq 1, \text{ 即 } x \neq 0)$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x} \quad (x \neq 0, 1)$$

$$f[f[f(x)]] = \frac{1}{1-f[f(x)]} = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = x \quad (\text{此时 } x \neq 0, 1)$$

故 $f[f(x)]$ 及 $f[f[f(x)]]$ 的定义域均是 $x \neq 0, 1$ 的一切实数.

例 3 设函数 $f(x)$ 满足关系式

$$f^2(\ln x) - 2xf(\ln x) + x^2 \ln x = 0$$

且 $f(0) = 0$, 求 $f(x)$.

解 由所给方程解得

$$f(\ln x) = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4x^2 \ln x}}{2} = x(1 \pm \sqrt{1 - \ln x}).$$

令 $x=1$, 由 $f(0)=0$, 有

$$f(0) = 1 \pm \sqrt{1-0} = 0, \text{ 故应取}$$

$$f(\ln x) = x(1 - \sqrt{1 - \ln x}).$$

令 $\ln x = t$, 则 $x = e^t$, 于是得

$$f(t) = e^t(1 - \sqrt{1-t}).$$

故所求函数为

$$f(x) = e^x(1 - \sqrt{1-x}).$$

例 4 设 $f(x)$ 的定义域为 $-\infty < x < +\infty$, 已知 $f'(0)$ 存在且对任何 x, ξ , 恒有 $f(x+\xi) = f(x) + f(\xi) + 2x\xi$, 求 $f(x)$.

解 $\nabla f'(0) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f(0+\xi) - f(0)}{\xi}$, 由

$$f(0+\xi) = f(0) + f(\xi), \text{ 得}$$

$$f(0) = 0.$$

$$\therefore f'(0) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f(\xi)}{\xi}.$$

又由 $f(x+\xi) = f(x) + f(\xi) + 2x\xi$, 得

$$\frac{f(x+\xi) - f(x)}{\xi} = \frac{f(\xi)}{\xi} + 2x$$

$$\therefore \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f(x+\xi) - f(x)}{\xi} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\frac{f(\xi)}{\xi} + 2x \right] = f'(0) + 2x$$

故 $f'(x)$ 存在且 $f'(x) = f'(0) + 2x$,

$$\therefore f(x) = f'(0)x + x^2 + c.$$

由 $f(0)=0$, 得 $c=0$

$$\therefore f(x) = f'(0)x + x^2$$

例 5 证明可导的偶（奇）函数的导数为奇（偶）函数

证 设 $f(x)$ 可导且为偶函数，则 $f(-x) = f(x)$ ，且

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f[-(x + \Delta x)] - f(-x)}{\Delta x} \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-x - \Delta x) - f(-x)}{(-\Delta x)} \\ &= -f'(-x). \text{ 即 } f'(-x) = -f'(x) \end{aligned}$$

故 $f'(x)$ 为奇函数。

同理可证可导的奇函数的导数为偶函数。

另解 应用复合函数的求导法则，由

$f(x) = f(-x)$ ($f(x) = -f(-x)$) 两边求导，结论即得证。

例 6 设 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 和 $f(x)$ 为单调非减函数，证明

若 $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$,

则 $\varphi[\varphi(x)] \leq f[f(x)] \leq \psi[\psi(x)]$

证 由于 $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$ 均为单调非减函数，且

$$\varphi(u) \leq f(u) \leq \psi(u),$$

故 $\varphi[\varphi(x)] \leq \varphi[f(x)] \leq f[f(x)]$
 $\leq f[\psi(x)] \leq \psi[\psi(x)].$

例 7 函数 $f(x) = \sin^2 x$ 及 $\varphi(x) = \sin x^2$ 是否为周期函数，若是，并求最小正周期。

解 1) $f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$,

故 $f(x)$ 为周期函数，其最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ 。

2) $\varphi(x) = \sin x^2$ 不是周期函数，证明如下：

用反证法。不妨设 $T > 0$ 是 $\varphi(x)$ 的周期 (对 $T < 0$ 的情况可用类似方法证明, 则有

$$\sin(x+T)^2 = \sin x^2, x \in R \quad (1)$$

在①中令 $x = 0$, 得 $\sin T^2 = 0$,

$$\therefore T^2 = k\pi, \text{ 即 } T = \sqrt{k\pi} \quad (k \in N),$$

代入①, 得

$$\sin(x + \sqrt{k\pi})^2 = \sin x^2 \quad (2)$$

在②中令 $x = \sqrt{2}T = \sqrt{2k\pi}$, 得

$$\sin[(\sqrt{2}+1)^2 k\pi] = \sin 2k\pi = 0,$$

$$\therefore (\sqrt{2}+1)^2 k\pi = l\pi \quad (l \in N), \text{ 即}$$

$$(\sqrt{2}+1)^2 = \frac{l}{k} \quad (k, l \in N)$$

由于 $(\sqrt{2}+1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ 是无理数, 而 $\frac{l}{k}$ 是有理数, 故上述等式不能成立。因此 $\varphi(x) = \sin x^2$ 不是周期函数。

例 8 求 $f(x) = x - [x]$ 的最小正周期, 其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分 (即若 $x = n + r$, n 为整数且 $0 \leq r < 1$, 则 $[x] = n$)。

解 设 $x = n + r$, m 为整数, 则

$$\begin{aligned} f(m+x) &= f(m+n+r) = m+n+r - [m+n+r] \\ &= m+n+r - m - [n+r] = n+r - [n+r] \\ &= f(n+r) = f(x). \end{aligned}$$

故一切整数 m 都是 $f(x)$ 的周期, 而最小正周期为 1。

例 9 已知函数 $f(x) = 3^x$ $0 \leq x \leq 4$ 。试先将此函数延拓到 $[-4, 4]$ 上, 使它成为偶函数, 再延拓到整个数轴使成为以 8 为周期的函数。

解 先依 $f(-x) = f(x) = 3^x$, 可知延拓到 $[-4, 4]$ 上的偶

函数为

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3^x, & 0 \leq x \leq 4; \\ 3^{-x}, & -4 \leq x < 0. \end{cases}$$

其次因周期 $T = 8$, 有 $\varphi(x) = \varphi(x + 8k)$, k 为整数。
故当 $0 \leq x + 8k \leq 4$, 即 $-8k \leq x \leq 4 - 8k$ 时, 有

$$\psi(x) = \varphi(x + 8k) = 3^{x+8k}.$$

而当 $-4 \leq x + 8k < 0$, 即 $-8k - 4 \leq x < -8k$ 时, 有

$$\psi(x) = \varphi(x + 8k) = 3^{-(x+8k)}.$$

因此, 延拓到整个数轴上的周期为 8 的偶函数为

$$\psi(x) = \begin{cases} 3^{x+8k}, & -8k \leq x \leq 4 - 8k, \\ 3^{-(x+8k)}, & -8k - 4 \leq x < -8k. \end{cases}$$

例10 证明 若对于函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 有等式 $f(x+T) = af(x)$ (其中 k 和 T 为正的常数), 则

$$f(x) = a^x \varphi(x),$$

其中 a 为常数, 而 $\varphi(x)$ 为以 T 为周期的函数。

证 由假设 $k > 0$, $T > 0$, 故可令 $a = k^{\frac{1}{T}} > 0$, 则 $a^T = k$, 于是有 $f(x+T) = a^T f(x)$.

现定义 $\varphi(x) = a^{-x} f(x)$, 则有

$$\begin{aligned} \varphi(x+T) &= a^{-(x+T)} f(x+T) = a^{-x-T} a^T f(x) \\ &= a^{-x} f(x) = \varphi(x), \end{aligned}$$

故 $\varphi(x)$ 是周期为 T 的函数, 于是有 $f(x) = a^x \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 是周期为 T 的函数。

二、求极限方法大全

求极限通常是用罗必塔法则, 但很多题目, 特别是关于

数列的极限, 用罗必塔法则无法解决, 还需掌握更多的方法与技巧。我们将常用的方法整理、分类、归纳成如下十四种

1. 极限定义与柯西准则法

定义 2 设 $\{x_n\}$ 为一数列, A 为常数。若对任意给定的正数 ε , 总存在相应的正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - A| < \varepsilon,$$

则称 A 为 $\{x_n\}$ 的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ (称 $\{x_n\}$ 收敛于 A)。

定义 3 设 A 为常数, 若对任意给定的正数 ε , 总存在相应的正数 $\delta = \delta(\varepsilon)$ (或正数 $X = X(\varepsilon)$), 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 (或 $|x| > X$ 时) 都有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad (\text{或} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A).$$

定理 1 (柯西极限存在准则1) 数列 $\{x_n\}$ 的极限存在的充要条件是: 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 且 P 为任何正整数时, 都有 $|x_n - x_{n+P}| < \varepsilon$

定理 2 (柯西极限存在准则2) 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 函数 $f(x)$ 的极限存在的充要条件是: 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在正数 $\delta = \delta(\varepsilon)$ (或正数 $X = X(\varepsilon)$), 使得对满足 $0 < |x_1 - x_0| < \delta$, $0 < |x_2 - x_0| < \delta$ (或 $x_1 \geq X$) 的任何 x_1 与 x_2 , 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ 。

例 1 证明数列 $x_n = \frac{\cos(1)}{1 \cdot 2} + \frac{\cos(2)}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos(n)}{n(n+1)}$

($n = 1, 2, \dots$) 的极限存在。

$$\text{证 } |x_{n+2} - x_n| = \left| \frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)} + \frac{\cos(n+2)}{(n+2)(n+3)} \right|$$