高考数学速成深化复习十六讲

序 言

黄庆祥等三位同志的这本书问世了，作者要我写几句话，作为一个多年来教过类似课程的人，谈一点意见。

高等数学无疑是极其重要的基础课，是高等学校学生（非数学专业）数学训练最主要的一部分。因此，是否能教得好，学得好，对于学生能否适应今后的工作关系极大。同时，这门课又是非常难教、难学的，因为材料太多，内容涉及各个方面。要想不是依样画葫芦，不是只按一本标准的教材照本宣科，要使学生能对其精髓有所体会，当然就要花极大的精力。黄庆祥等同志的这本书，注意到了学生平时没有注意到的一些方面，注意到了各部分之间的联系以及各种常用而又在教科书上言之不详的方法，自然是很有意义的，它可以引导学生深入牢固地掌握这门课的基本内容。本书又对一些例题作了比较详细的分析，自然也有助于学生掌握这门课的基本方法。因此，对于解决前面提出的问题，是很有益的，仅在此对作者付出的精力和取得的成效表示钦佩与感谢。是为序。

齐 民 友

1988年5月29日

前　言

《高等数学速成深化复习十六讲》一书，是我们长期教学经验的积累与总结。它不仅是高等数学和工程数学重点内容的系统复习与深化，而且较好地解决了目前在高等数学、工程数学的教学、评估与统考中出现的纵向深、横向广、方法灵活技巧性强等问题，是一本理想的“高等数学”速成深化复习参考书。

全书共十六讲，第一至十三讲为“高等数学的重要内容，第十四、十五和十六讲分别为“线性代数”、“概率论”和“复变函数”的主要内容。该书通俗简炼，重点突出，难点分散，内容少而精。书中不但对有关基本概念的含义、基本定理的运用、方法的引进和演算技巧等作了精辟的阐述与系统的总结，而且还选择了不少极富有解剖、思考价值的典型例题。每讲后面附有适量的习题，并配有提示与答案；书的最后附有近几年全国硕士研究生的统考试题，可供读者参考与自检。

本书是大学（包括大、函大等成人大学）学生学习高等数学的参考教材，特别是大学进行高等数学教学评估、会考和参加研究生入学考试的难得的复习课本，同时还是高等数学自学者的“良师益友”。

该书各讲编写者，黄庆祥：第一、九、十、十一、十二和十四讲；何灿芝：第五、六、七、八和十五讲；张杰恒：

第二、三、四、十三和十六讲。全书由黄庆祥统稿。限于水平，错误难免，恳请读者惠予指正。

承蒙著名数学家武汉大学教授齐民友作序，谨致谢忱。

编　者

1688年9月

目　　录

第一讲　巧用微积分知识解决函数的极限、连续问题

一、不容忽视的几个函数方面的问题

毫无疑问，读者们对函数及其有关特性的定义几乎都能逐字逐句地述出。然而，遇到有一定难度的题目时就不一定能顺利地解出。这一方面是对概念理解不透，另一方面也有技巧上的问题。本节先引述几个定义，再举若干范例，以期对读者进一步理解函数方面的几个定义及有关概念和掌握解题技巧有所俾益。

1． 函数及其特性概述

定义1　设S为某一实数的集合。若当变量 x 取S中一值时，变量y就有完全确定的值与之对应，则称y为x的函数，记为

$$y=f(x), \quad x\in s.$$

S称为函数$f(x)$的定义域。所有函数值（y值）的集合叫函数的值域。

在函数问题的讨论中，除定义域外，经常碰到的是下列函数的几个基本特性的问题。

1）函数的有界性

设函数$f(x)$的定义域为S。若存在正数M，使得对S上的任意一点x，有$|f(x)|\leqslant M$，则称$f(x)$是有界的，否

则，称$f(x)$是无界的。

2）函数的单调性

设$f(x)$定义于区间(a, b)内。若对于任意的$x_1<x_2$，$x_1\in(a,b)$，$x_2\in a,b)$，有$f(x_1)<f(x_2)$（$f(x_1)>f(x_2)$，则称$f(x)$在(a,b)内是（严格）单调增加（减少）的。如果是$f(x_1)\leqslant f(x_2)$（$f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称$f(x)$在(a,b)内是非减（增）的。

3）函数的奇偶性

若函数$f(x)$在对称区间$(-a,a)$内有定义且$f(-x)=f(x)$（$f(-x)=-f(x)$则称$f(x)$在$(-a,a)$内为偶（奇）函数。

4）函数的周期性

给出函数$f(x)$，若存在一个非零的数T，使得对于定义域内的任何x，均有$f(x+T)=f(x)$，则称$f(x)$为周期函数，T叫$f(x)$的周期。通常T是指最小正周期。

2. 范例

例1 设$f_n(x)=\underbrace{f\{f[f\cdots f}_{n个f}(x)]\}$且$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

求$f_n(x)$。

解 $f_2(x)=\{f(x)\}=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big/\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$f_3(x)=f\{f_2(x)\}=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\Bigg/\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)^2}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

现设$n=k$时，$f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$，则当$n=k+1$时，有

$$f_{k+1}(x)=f\{f_k(x)\}=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\Bigg/\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\right)^2}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

故由数学归纳法知，$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

例 2 设$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求$f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$及其定义域

解 $\because$ $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，$x\neq 1$，

$$\therefore\quad f[f(x)]=\frac{1}{1-f(x)},\text{（此时}f(x)\neq 1,\text{即}x\neq 0\text{）}$$

$$=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}\qquad (x\neq 0,1)$$

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{1}{1-f[f(x)]}=\frac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}=x\text{（此时}x\neq 0,1\text{）}$$

故$f[f(x)]$及$f\{f[f(x)]\}$的定义域均是$x\neq 0,1$的一切实数。

例 3 设函数$f(x)$满足关系式

$$f^2(\ln x)-2xf(\ln x)+x^2\ln x=0$$

且$f(0)=0$，求$f(x)$。

解 由所给方程解得

$$f(\ln x)=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2-4x^2\ln x}}{2}=x(1\pm\sqrt{1-\ln x})。$$

令$x=1$，由$f(0)=0$，有

$f(0)=1\pm\sqrt{1-0}=0$，故应取

$$f(\ln x)=x(1-\sqrt{1-\ln x})。$$

令$\ln x=t$，则$x=e^t$，于是得

$f(t)=e^t(1-\sqrt{1-t})$。

故所求函数为

$f(x)=e^x(1-\sqrt{1-x})$。

√**例 4** 设$f(x)$的定义域为$-\infty<x<+\infty$，已知$f'(0)$存在且对任何x,ξ，恒有$f(x+\xi)=f(x)+f(\xi)+2x\xi$，求$f(x)$。

解 ∵ $f'(0)=\lim\limits_{\xi\to 0}\dfrac{f(0+\xi)-f(0)}{\xi}$，由

$f(0+\xi)=f(0)+f(\xi)$，得

$f(0)=0$。

$$\therefore\quad f'(0)=\lim_{\xi\to 0}\frac{f(\xi)}{\xi}.$$

又由 $f(x+\xi)=f(x)+f(\xi)+2x\xi$，得

$$\frac{f(x+\xi)-f(x)}{\xi}=\frac{f(\xi)}{\xi}+2x$$

$$\therefore\quad \lim_{\xi\to 0}\frac{f(x+\xi)-f(x)}{\xi}=\lim_{\xi\to 0}\left[\frac{f(\xi)}{\xi}+2x\right]$$

$$=f'(0)+2x$$

故 $f'(x)$存在且$f'(x)=f'(0)+2x$，

$\therefore\quad f(x)=f'(0)x+x^2+c$。

由 $f(0)=0$，得$c=0$

$\therefore\quad f(x)=f'(0)x+x^2$

例 5 证明可导的偶（奇）函数的导数为奇（偶）函数

证 设$f(x)$可导且为偶函数，则$f(-x)=f(x)$。且

$$f'(x)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$$

$$=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f[-(x+\triangle x)]-f(-x)}{\triangle x}$$

$$=-\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(-x-\triangle x)-f(-x)}{(-\triangle x)}$$

$$=-f'(-x)\text{。即}\quad f'(-x)=-f'(x)$$

故 $f'(x)$为奇函数。

同理可证可导的奇函数的导数为偶函数。

另解 应用复合函数的求导法则，由

$f(x)=f(-x)$ （$f(x)=-f(-x)$） 两边求导，结论即得证。

~~**例 6** 设$\varphi(x)$，$\psi(x)$和$f(x)$为单调非减函数，证明~~

若 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$，

则 $\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)]$

证 由于$\varphi(x)$，$\psi(x)$，$f(x)$均为单调非减函数，且

$$\varphi(u)\leqslant f(u)\leqslant\psi(u),$$

故 $\varphi[\varphi(x)]\leqslant\varphi[f(x)]\leqslant f[f(x)]$

$\leqslant f[\psi(x)]\leqslant\psi[\psi(x)]$。

例 7 函数 $f(x)=\sin^2 x$及$\varphi(x)=\sin x^2$是否为周期函数，若是，并求最小正周期。

解 1） $f(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$，

故$f(x)$为周期函数，其最小正周期为$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$。

2） $\varphi(x)=\sin x^2$不是周期函数，证明如下：

用反证法。不妨设$T>0$是$\varphi(x)$的周期（对$T<0$的情况可用类似方法证明，则有

$$\sin(x+T)^2=\sin x^2 \quad ,x\in R \qquad ①$$

在①中令$x=0$，得$\sin T^2=0$，

$\therefore \quad T^2=k\pi$，即$T=\sqrt{k\pi} \quad (k\in N)$，

代入①，得

$$\sin(x+\sqrt{k\pi})^2=\sin x^2 \qquad ②$$

在②中令$x=\sqrt{2}T=\sqrt{2k\pi}$，得

$\sin[(\sqrt{2}+1)^2k\pi]=\sin 2k\pi=0$，

$\therefore \quad (\sqrt{2}+1)^2k\pi=l\pi \quad (l\in N)$，即

$$(\sqrt{2}+1)^2=\frac{l}{k} \qquad (k,l\in N)$$

由于$(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}$是无理数，而$\frac{l}{k}$是有理数，故上述等式不能成立。因此$\varphi(x)=\sin x^2$不是周期函数。

例 8 求$f(x)=x-[x]$的最小正周期，其中$[x]$表示x的整数部分（即若$x=n+r$，n为整数且$0\leqslant r<1$，则$[x]=n$）。

解 设$x=n+r$，m为整数，则

$$\begin{aligned}f(m+x)&=f(m+n+r)=m+n+r-[m+n+r]\\&=m+n+r-m-[n+r]=n+r-[n+r]\\&=f(n+r)=f(x)。\end{aligned}$$

故一切整数m都是$f(x)$的周期，而最小正周期为1。

例 9 已知函数$f(x)=3^x \quad 0\leqslant x\leqslant 4$。试先将此函数延拓到$[-4,4]$上，使它成为偶函数，再延拓到整个数轴使成为以8为周期的函数。

解 先依$f(-x)=f(x)=3^x$，可知延拓到$[-4,4]$上的偶

函数为

$$\varphi(x)\begin{cases}3^x, & 0\leqslant x\leqslant 4;\\ 3^{-x}, & -4\leqslant x<0.\end{cases}$$

其次因周期 $T=8$，有 $\varphi(x)=\varphi(x+8k)$，k 为 整数。故当 $0\leqslant x+8k\leqslant 4$，即 $-8k\leqslant x\leqslant 4-8k$ 时，有

$$\psi(x)=\varphi(x+8k)=3^{x+8k}.$$

而当 $-4\leqslant x+8k<0$，即 $-8k-4\leqslant x<-8k$ 时，有

$$\psi(x)=\varphi(x+8k)=3^{-(x+8k)}.$$

因此，延拓到整个数轴上的周期为 8 的偶函数为

$$\psi(x)=\begin{cases}3^{x+8k}, & -8k\leqslant x\leqslant 4-8k,\\ 3^{-(x+8k)}, & -8k-4\leqslant x<-8k.\end{cases}$$

例10 证明 若对于函数 $f(x)$（$-\infty<x<+\infty$）有 等式 $f(x+T)=kf(x)$（其中 k 和 T 为正的常数），则

$$f(x)=a^x\varphi(x),$$

其中 a 为常数，而 $\varphi(x)$ 为以 T 为周期的函数。

证 由假设 $k>0$，$T>0$，故可令 $a=k^{\frac{1}{T}}>0$，则 $a^T=k$，于是有 $f(x+T)=a^Tf(x)$。

现定义 $\varphi(x)=a^{-x}f(x)$，则有

$$\varphi(x+T)=a^{-(x+T)}f(x+T)=a^{-x-T}a^Tf(x)$$

$=a^{-x}f(x)=\varphi(x)$，故 $\varphi(x)$ 是周期为 T 的函数，于是有

$f(x)=a^x\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 是周期为 T 的函数。

二、求极限方法大全

求极限通常是用罗必塔法则，但很多题目，特别是关于

数列的极限，用罗必塔法则无法解决，还需掌握更多的方法与技巧。我们将常用的方法整理、分类、归纳成如下十四种

1. 极限定义与柯西准则法

定义 2 设$\{x_n\}$为一数列，A为常数。若对任意给定的正数ε，总存在相应的正整数$N=N(\varepsilon)$，使得当$n>N$时，有

$$|x_n-A|<\varepsilon,$$

则称A为$\{x_n\}$的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$（称$\{x_n\}$收敛于$A$）。

定义 3 设A为常数，若对任意给定的正数ε，总存在相应的正数$\delta=\delta(\varepsilon)$（或正数$X=X(\varepsilon)$），使得当$0<|x-x_0|<\delta$时（或$|x|>X$时）都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称A为函数$f(x)$当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \qquad (\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=A).$$

定理 1 （柯西极限存在准则1） 数列$\{x_n\}$的极限存在的充要条件是：对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在正整数N，使得当$n>N$且P为任何正整数时，都有 $|x_n-x_{n+p}|<\varepsilon$

定理 2 （柯西极限存在准则2） 当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时，函数$f(x)$的极限存在的充要条件是：对于任意给定的$\varepsilon<0$，总存在正数$\delta=\delta(\varepsilon)$（或正数$X=X(\varepsilon)$），使得对满足$0<|x_1-x_0|<\delta$，$0<|x_2-x_0|<\delta$（或$x_2\geqslant x_1>X$）的任何$x_1$与$x_2$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$。

例 1 证明数列$x_n=\dfrac{\cos(1!)}{1\cdot 2}+\dfrac{\cos(2!)}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{\cos(n!)}{n(n+1)}$ $(n=1,2,\cdots)$的极限存在。

证 $|x_{n+p}-x_n|=\left|\dfrac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)}+\dfrac{\cos(n+2)!}{(n+2)(n+3)}\right.$