系统工程普及讲座汇编

（下）

中国科协普及部

1980年

任何一个学科，[illegible]的趣谈，[illegible]
发现在我国先秦[illegible]的运筹思想。我不[illegible]
代的情况。[illegible]这个名字，在1[illegible]
英[illegible]search，1942年美国开始从[illegible]
为Ope[illegible]年代后期，英国从事雷达的研制，[illegible]
[illegible]一些研制设计工作之后，他们[illegible]
[illegible]用的问题。对于这些问题的研究内容，[illegible]
[illegible]绝大多数是自然科学家，以英国第一个运[illegible]
[illegible]学家，其小组的成员组成如下：两位数学家，[illegible]
[illegible]一位天体物理学家，一位测量员，三位生理学[illegible]
[illegible]成立的美国运筹小组，领导人也是一位物理学家，其[illegible]
[illegible]人中，绝大多数也是物理学家。

[illegible]运筹学的早期的著名工作之一就是深水炸弹的起爆深[illegible]
[illegible]潜水艇战，所使用的武器，是飞机侦察到潜水艇后，投掷深水[illegible]
[illegible]研究搜索方法，还需探讨深水炸弹的有效使用。当时的深水[illegible]
[illegible]击沉已潜入水中的潜艇，所以起爆深度为100呎。现在方[illegible]
[illegible]如何有效使用，自应进行探讨。运筹工作者，在对一些统计数[illegible]
以下的决策：1.仅当潜艇浮在水面、或刚开始下潜时，方投弹攻击[illegible]
[illegible]当时炸弹所允许的最浅起爆点。在这决策执行以后，被击沉的[illegible]
[illegible]运筹学初步赢得了声誉。

这个问题，解决的方法极为浅显，而收效卓著。第二次世界大[illegible]
作都具有效果成两倍或三倍增加的特点，而所使用的工具最多是一[illegible]
[illegible]取得成效的原因，今天看来，可能是：1.开始认识到武器系统的[illegible]
必须进行探讨的问题，2.通常自然科学家研究问题时所习用的方法，[illegible]
效。诸如强调量化，建立模型等等。

在五十年代初期才提出了运筹学的一些分支[illegible]，排队论孕育于本世纪初期，而博奕论则创始于[illegible]之际。在毛尔思和金勃尔所著的"运筹学方法"一书中，[illegible]，也曾经将排队论应用于港口船舶等待、拥挤的问题。但当时[illegible]作为解决实际运筹工作的工具，并没有把这些学科作为运筹学[illegible]它们之间的内在联系。

[illegible]渊源于迥然不同的实际问题，联系于性质[illegible]。[illegible]哥本哈根电话公司的工程师爱尔朗(Erlang)探讨了[illegible]，[illegible]一个呼叫到达时，也就是一个人拿起话筒，拨了[illegible]则电话立即接通，否则，打电话的人就得等待，[illegible]排在那个人之后。这种现象可以归结于这样的模型：[illegible]一[illegible]，如果服务台前已经有顾客，则需排队等待[illegible]在港口等待停泊码头，病人到医院等待医生诊治，[illegible]等修理。显然，在这些情况中，如果占用服务台[illegible]控制的话，排队是可以避免的。但通常无论是[illegible]的[illegible]占用服务台的时间长短都是一个随机变量，从理论[illegible]于[illegible]队的长度、等待时间、服务台的忙闲情况，就成为[illegible]的[illegible]理论。

[illegible]，数学家冯·诺意曼由于经济问题的启发，研究了[illegible]，人们都会想到掷骰子与下棋。然而这两种[illegible]依赖于机遇，而一局棋的胜负则取决于双方[illegible]是纯粹人为的，正是这种依赖于策略的博奕，[illegible]于策略的博奕绝不局限于下棋，例如飞机侦察[illegible]探讨，兰军的潜艇要通过运河区，红军的飞机[illegible]中人一样，这里也有两个局中人，飞机与潜艇，一方[illegible]在何处潜入水中，在何处浮出水面，这就是它可[illegible]，这就是飞机所可采取的策略。当然，最后的结局[illegible]

[illegible]注意到，早在1939年，数学家康特罗维奇研究一些问题，提出象一

……研究一下。上述三个……的对象……
……类活动，它的特征是具有……研究的是……
运输问题可以看作是产品的……，下料问题是原材料的配置等等，……
按照某种目标取得最优，例如要求……量最小，或用料最省等等，……

——物理学是研究物质运动（motion）的规律。事有常规，物有定……
（activity），也有其规律，也必须进行研究。这种规律可以总称为“事……
……地研究了具有拥挤性的活动，依赖于策略的竞争性活动，以及可……
动。如果把“事理”看作是运筹学的研究对象，那末运筹学具有这些分……

五十年代末期，计算机科学与计算机技术的发展，以及计算机工……
学的发展起着绝大的推动作用。虽然运筹学一开始就强调量化，然而……
扯的计算量很小。当线性规划出现后，它能应用于许多实际问题，但……
牵扯到大量的计算。今天线性规划所解决的大规模问题，其变量已多……
当然这样大的问题，也不是今天任何计算机的容量所能允许的，它的……
解理论”的发展。然而无论如何，没有计算机，线性规划在很多问题上……
践。对于运筹学说来，计算机不仅是一个计算工具，而且是一种实验……
奕论，对于许多实际问题的建立模型提供了思路，然而对于这些模型……
析方法倘无能为力，此时在计算机上进行模拟实为一种行之有效的方……

五十年代的另一个科技发展，就是管理问题向量化的方面迈进，……
何一个企业都包含着六种要素。人当然是第一主要的因素，其他可分……
在“物”的要素中有，物资、设备和资金，而“事”则包含着信息与决策。……
理，无非是……、运输、存储、使用、分配。线性规划对于这些活动……
而排队论的一个姊妹学科存储论为企业的库存问题提供了很好的计量方……
素中，决策当然是一个极为重要的因素，而博奕论的发展为决策提供了……
讨的基础，这样看到，有时运筹和管理竟成为同意语。

三、运筹与系统

早期的运筹学除掉解决了许多实际问题之外，也积累了一些经验，……
的一般步骤，今天习惯称之为方法论。他们强调在从事一项工作之先，……

[illegible]的推动力，[illegible]

[illegible]经济问题[illegible]

[illegible]他们认为经济效率的要求可以[illegible]的

[illegible]系统工程与兰德公司的系统分析，有其共同[illegible]他们

[illegible]系统工程[illegible]为一大类工程技术的总称，[illegible]兰德公司

[illegible]可以[illegible]为系统工程的一个分支，而[illegible]

[illegible]体系分析，[illegible]。

一、什么是线性规划

先给大家看两个简单的例子。

例1 某造纸厂用废布、废纸、木材纸浆作原料，生产甲、乙两种纸。甲种纸每吨产值50元，乙种纸每吨产值70元，生产每一种纸1吨所需原料的数量由下表所示。

生产1吨	废布	废纸	木材纸浆
甲种纸	4吨	18吨	3吨
乙种纸	1吨	15吨	9吨

现在有废布100吨、废纸660吨、木材纸浆270吨，该厂应如何安排两种纸的生产，使产值最大？

现在用代数形式表达这一问题。设该厂将生产 x 吨甲种纸，生产 y 吨乙种纸。

生产 x 吨甲种纸所需要原料：

废布 $4x$ 吨　废纸 $18x$ 吨　木材纸浆 $3x$ 吨

生产 y 吨乙种纸所需要原料：

废布 y 吨　废纸 $15y$ 吨　木材纸浆 $9y$ 吨

生产两种纸共需要原料：

废布　$4x+y$　吨

废纸　$18x+15y$　吨

木材纸浆　$3x+9y$　吨

但是这些原料数量不能超过现有的废布、废纸、木材纸浆数量，因此 x 和 y 要满足不等式

$$4x+y \leqslant 100$$
$$18x+15y \leqslant 660$$
$$3x+9y \leqslant 270$$

两种纸的生产数量 x 和 y 不可能是负数，因此 x 和 y 还要满足

$$x \geqslant 0 \qquad y \geqslant 0$$

x 和 y 要满足的这些不等式，统称为问题的约束条件。

生产 x 吨甲种纸和 y 吨乙种纸总产值是 $(50x+70y)$ 元，我们的目标是使总产值最大，因此

$$50x+70y$$

这一个代数式，称为问题的目标函数。

综合起来，我们的问题是，在现有的原料限制下，使生产的两种纸总产值最大。它的代数形式是

[illegible]甲、乙、丙三种不同尺寸的[illegible]

[illegible]	每台机床所需件数
[illegible]	1
[illegible]	2
[illegible]	4

这些轴要用同一种圆钢来做，这种圆钢的长度是5.5米。现在问，如果要[illegible]100台机床，最少要用多少根圆钢[illegible]这些轴？

容易算出，一根圆钢原材料截成所需的甲、乙、丙三种轴的毛坯有下表所列出的不同截法：

[illegible]	截3.1米的根数（甲）	截2.1米的根数（乙）	截1.2米的根数（丙）	剩下料头的尺寸（米）
[illegible]	1	1	0	0.3
[illegible]	1	0	2	0
[illegible]	0	2	1	0.1
[illegible]	0	1	2	1
[illegible]	0	0	4	0.7

[illegible]用这五种方式各截几根才能配成100套，并使花费的原材料总根数最少？

[illegible]①截取的根数为 x_1；用方式②截取的根数为 x_2；用方式③截取的根数为[illegible]④截取的根数为 x_4；用方式⑤截取的根数为 x_5，从上面表中可以看出，总[illegible]乙、丙各根轴的毛坯数是：

$$3.1\text{米的根数}=x_1+x_2$$

$$2.1\text{米的根数}=x_1+2x_3+x_4$$

$$1.2\text{米的根数}=2x_1+x_3+2x_4+4x_5$$

[illegible]100套（每一台机床一套），3.1米的根数至少要100根，2.1米的根数至少要[illegible]1.2米的根数至少要400根，换句话说，x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 要满足等式

$$x_1+x_2=100$$

$$x_1+2x_3+x_4=200$$

$$2x_1+x_3+2x_4+4x_5=400$$

[illegible]这些表示根数的未知数不能是负数，因此还要满足

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0,\ x_5\geqslant 0$$

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_nx_n=b$$

称为线性方程，相应的不等式

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_nx_n\leqslant b$$

或

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_nx_n\geqslant b$$

称为线性不等式。通常，我们将线性方程和线性不等式统称为线性约束。引入辅助变量后，不等式可以转化成方程。例如，右面大于左面的不等式，左边加上辅助变量s，就可以转化为方程

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_nx_n+s=b$$

同样，左面大于右面的不等式，左边减去辅助变量s，就可以转化成方程

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_nx_n-s=b$$

引入的变量s，称为松驰变量，它也不能取负值。进行计算时，总是要将不等式化为方程。

一次函数

$$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

称为线性函数。

我们考虑的变量总是不能取负值，因此称为非负变量。

前面两个例子中提出了两个不同的生产安排问题，可是转化成代数问题后，

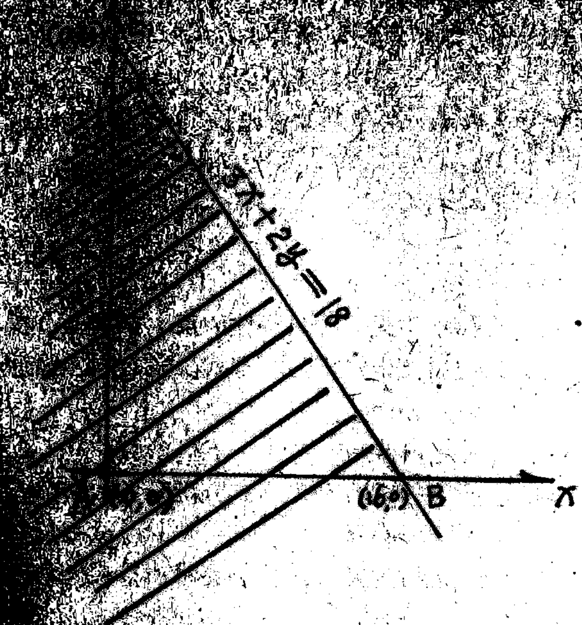
……非负的变量，它们要满足某些线性方程或者线性不等式，并使一……（或最小值）。

……称为线性规划。

二、解线性规划的方法简介

1947年美国数学家但泽克(Dantzig)首先提出了解线性规划的方法——单纯形法。这是一个非常有效的计算方法，因而使线性规划的技术在交通、工业、农业、……得到了广泛的应用。国外许多科学家认为，但泽克提出线性规划的一般解法，是二十世纪后半世纪在应用数学领域中最重要的开创性工作之一。由于但泽克这一杰出贡献，他被选为美国科学院的院士。

单纯形方法的数学原理并不高深，一个大学二年级的学生就完全可以弄懂，但……

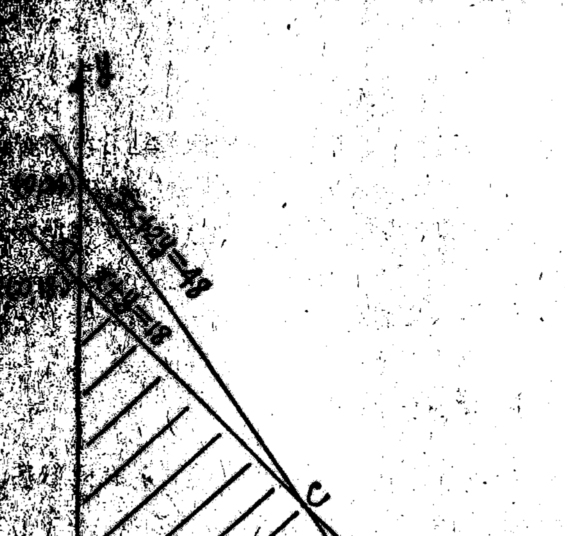


$$x + y \leqslant 18$$

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$$

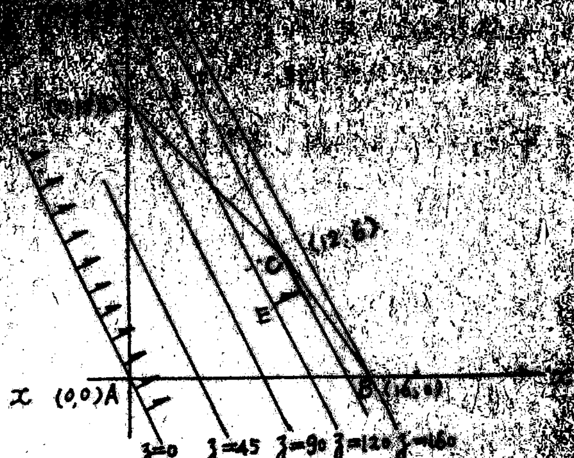
$$10x + 5y = \max$$

在座标平面上，直线 BE 上的点，满足方程 $3x + 2y = 48$。而满足不等式 $3x + 2y \leqslant 48$ 的点，是这条直线下的半平面（图上阴影线部分）上所有的点。$x \geqslant 0$ 是 y 轴右面的半平面，$y \geqslant 0$ 是 x 轴上面的半平面。因此，满足问题约束条件的所有容许解 (x,y)，都在座标平面上，就是四边形 $ABCD$ 所围成区域中所有的点。显然，这个区域内有无穷多个点，由此可见，一个线性规划[illegible]有无穷多个容许解。那么哪一个点是最优解呢？



我们考察一下目标函数的变化。设目标函数 $10x + 5y$，取值是 z。直线 $10x + 5y = z$ 上每一点 (x,y)，将使目标函数取值为 z。如果让 z 取不同的值，例如，$z = 0$，45，90，120，150，160 等等，那末方程 $10x + 5y = z$ 就在座标平面上产生了许多平行的直线。换一句话说，这些平行直线中，不同的直线上的点，将使目标函数取不同的值。从图上可以看出，离座标原点 A 距离越远的直线上的点，使目标函数取值越大。因此我们将直线 $10x + 5y = 0$，沿着箭头所示的方向平行移动，直至它与容许解区域的接触处于临界状态（也就是直线再平行移动就要与容许解区域接触不上），这个临界点（图上是 B），便是最优解。由此就可以断定，最优解一定是容许解区

[illegible]，[illegible]函数值更大。根据上面[illegible]可以在 A、B、C、D [illegible]点中去挑选。这样我们[illegible]四点的座标标出来，然后[illegible]一点目标函数取值最大，[illegible]便是最优解。具体计算如下[illegible]示。



点	座标(x,y)	目标函数取值
A	(0,0)	$10\times0+5\times0=0$
B	(16,0)	$10\times16+5\times0=160$
C	(12,6)	$10\times12+5\times6=150$
D	(0,18)	$10\times0+5\times24=190$

因此，最优解是 $x=16$，$y=0$，目标函数[illegible]大值为 160。

图解法对于多于两个变量的线性规划[illegible]求解是不适用的，当变量较多时，[illegible]所有边界点的座标也极其困难。但是“可以从边界点找最优解”这一论断，给多变量线性[illegible]求解的一般方法，提供了理论依据。但泽克提出的单纯形方法可以粗略地叙述如[illegible]

“从一个边界点开始，通过代数运算转到另一个边界点，这个点使目标函数取值上[illegible]（如果是求最小值问题，将使目标函数取值下降）。从一个边界点到另一个边界点的[illegible]称为迭代，通过逐次迭代，最后找出最优解。”

[illegible]们通过上述例题，说明“迭代”是如何进行的。为了运算的方便，要将约束条件中的不等式转化成方程，只要增加一个新变量（称为松驰变量），就能将一个不等式转化成一个等式。对不等式 $3x+2y\leqslant48$，引入新变量 s（$\geqslant0$），就可转化成方程

$$3x+2y+s=48$$

对不等式 $x+y\leqslant18$，引入另一个变量 t（$\geqslant0$），就可以转化成方程

$$x+y+t=18$$

如果将这二个方程中变量 s 和 t 解出，原问题改写成

$$s=48-3x-2y$$
$$t=18-x-y$$
$$z=\quad10x+5y$$

这样一来，变量 s 和 t 以及目标函数的取值 z 都由 x 和 y 确定。如果让 $x=0$，$y=0$，就有 $s=48$、$t=18$。这是问题的一个容许解，在座标平面上就是边界 A。以它作为迭代开始的边界点。

下面说说如何进行迭代。从目标函数表达式看，如果能使 x 和 y 取值从零增大，

[illegible]

$$t=2-\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}s,$$

$$z=160-\frac{5}{3}y-\frac{10}{3}s.$$

[illegible]$=0$，$s=0$，就有 $x=16$，$t=2$，就得另一容许解，在座标平面上就是边界点 B，目[illegible]值 $z=160$。现在再来考察一下目标函数是否还能增加，现在 z 是由 y 和 s 取值[illegible]表达式中，y 和 s 的系数都是负数，如果要使 y 或者 s 从零增值，只会使 z 减[illegible]可以断定 z 不能增值，这说明容许解：$x=16$、$y=0$、$s=0$、$t=2$ 就是最优解，[illegible]值是 160。迭代过程就可以终止。

[illegible]说的"迭代"，就是表达式的变换。从一个表达式，可以算容许解区域的一个边[illegible]表达式的变换，就从一个边界点转到另一个边界点。从上面例子可以看出，[illegible]一个边界点都要迭代到的。我们通过目标函数表达式中变量的系数，可以判断[illegible]，如果不是，也能确定应如何迭代。但泽克单纯形法方法就是这样[illegible]不过它有一些程序式的步骤。

[illegible]的线性规划问题，可能要进行许多迭代，因此人工计算是做不到，必须[illegible]计算。一般的计算机，算几百个约束条件，上千个变量的线性规划问题是[illegible]，国外最先进的计算机，可以算上千个约束条件、上万个变量的线性规划。[illegible]已编制了线性规划计算程序。对生产企业部门来说，只要把问题提清[illegible]出必须的原始数据，提供给专门的计算部门，一般来说，就能很快计算出需要的[illegible]。

三、一些应用问题

为了说明线性规划应用的广泛性，我们再列举一些具体例子。

(1) 煤的混合问题

有甲、乙、丙三种类型的煤，每种煤的含硫量、能产生的热量以及每吨价格如下表所示：

类 型	含硫量(%)	每公斤产生千卡路里	每吨价格(元)
甲	0.01	20	20
乙	0.05	24	16
丙	0.03	22	18.5

现要将三种混合使用，混合后每公斤煤产生的热量不少于 21 千卡，含硫量不超过 0.025%。问如何混合最省钱？

设每一吨煤混合煤中，甲种煤占 $x\%$，乙种煤占 $y\%$，丙种煤占 $z\%$。上面的问题

[illegible]

[illegible]之一。

[illegible]调运问题

[illegible]、乙两地是食盐的产地，它们要供应 A、B、C、D、E 五个城市的用盐。甲地[illegible]天产盐 260 吨，乙地每天产盐 250 吨，A、B、C、D、E 各城市每天盐的需要量分别[illegible]100 吨、80 吨、110 吨、90 吨、60 吨、140 吨。产地到各城之间的运输距离如下表，

距离（公里）城市 / 产地	A	B	C	D	E
甲	90	70	100	50	120
乙	80	65	80	65	90

问甲、乙两地如何供应各城市用盐，使运输的吨公里数最小？

我们用：x_{11} 表示甲供应城市 A 的数量；x_{12} 表示甲供应城市 B 的数量；x_{13} 表示甲供应城市 C 的数量；x_{14} 表示甲供应城市 D 的数量；x_{15} 表示甲供应城市 E 的数量。类似，用 x_{21}、x_{22}、x_{23}、x_{24}、x_{25} 分别表示乙供应城市 A、B、C、D、E 的数量。由于甲、乙两地总共产量是 $260+250=510$（吨），而五个城市的需要量是 $80+110+90+60+140=480$（吨），因此甲、乙两地产量在满足这个城市需要后还多 30 吨，这样必须存放起来。设甲地存放量是 x_{16}；乙城存放量是 x_{26}。

根据供应必须满足各城市需要，可列出方程：

$$x_{11}+x_{21}=\ 80\ （A\ 需要量）$$
$$x_{12}+x_{22}=110\ （B\ 需要量）$$
$$x_{13}+x_{23}=\ 90\ （C\ 需要量）$$
$$x_{14}+x_{24}=\ 60\ （D\ 需要量）$$
$$x_{15}+x_{25}=140\ （E\ 需要量）$$

甲、乙两地共存放 30 吨，因此

$$x_{16}+x_{26}=30$$

另外，从每一产地的产量还可以列出方程

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}=260$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{26}=250$$

显然，上述方程中的变量必须是非负的数量才有实际意义。根据所设变量，从甲、乙两地调运盐的吨公里总数是

$$90x_{11}+70x_{12}+100x_{13}+50x_{14}+120x_{15}+80x_{21}$$
$$+65x_{22}+80x_{23}+60x_{24}+90x_{25}$$

这就是问题的目标函数。在变量满足约束方程的条件下，要使目标函数达到极小值。

[illegible]

量有两个下标这一特点，变量可以排列成一张方格表如下：

x_{11}	x_{12}	……	x_{1n}
x_{21}	x_{22}	……	x_{2n}
⋮	⋮		⋮
x_{m1}	x_{m2}	……	x_{mn}

如果有 m 个产地和 n 个需要地，这张表[illegible]方格，每一方格代表一个变量。根据单纯形方法的原理，对这一特殊线性规划问题，可以设计出一个较为简便的计算方法，在方格表上进行计算，因此通常称为表上作业法。

当只有两个产地（或者两个需要地），有一个十分简捷的解法。我们用上面例题来说明这一解法。

为了比较每一城市到甲、乙两地的距离远近，算出每一城市到甲地和到乙地的距离差，并从小到大排列如下：

	D	B	存放	A	C	E
到甲地和到乙地	50－65	70－65	0－0	90－80	100－80	120－90
的距离差	＝－15	＝5	＝0	＝10	＝20	＝30

这里，我们把“存放”看作一个虚设的需要地，它到两地的“距离差”是0。很明显，距离差越小这一需要地由甲供应有利；距离差越大，这一需要地由乙供应有利。因此，按照距离差从小到大的次序，优先确定甲供应的需要地。甲的产量是260吨，供应 D 需要量60吨、B 需要量110吨、存放30吨后，还余60吨就供应 A。A 要需80吨，不足的20吨就由乙供应，C 要需90吨和 E 需要140吨也由乙供应。这就是最好的调运方案。容易标出，这一方案的总吨公里数是37500。比较距离差，实质上就是贯彻“就近供应”原则。如果产地多于两个，这一原则一般是不适用的，要用表上作业法才能计算出最好的方案。

对于这一问题，我国粮食部门的同志，根据他们丰富的实践经验，还创造一个“图上作业法”。在运输交通图上，画出物资调运的流向图，在图上消灭“对流”和“迂回”这两种不合理的运输现象，求得最好的调运方案。

实际上，上述线性规划模型不光用于物资调拨，还有其他的应用。例如，车辆调度减少空驶和机床负荷安排等问题。

（3）机床的合理使用

零件 \ 每天加工另件件数 \ 机床	甲	乙	丙	丁
A	8	9	7	6
B	10	12	11	7

某车间有甲、乙、丙、丁四台机床，用它们加工 A、B 两种零件。各台机床每天能加工每种零件的件数如左表：

根据生产上需要，甲、乙两种零件要配套，每一套甲、乙零件各1件。现要生产1000套另件，最少要多少时间？

$$x_{11}+x_{12}=z$$
$$x_{21}+x_{22}=z$$
$$x_{31}+x_{32}=z$$
$$x_{41}+x_{42}=z$$
$$8x_{11}+9x_{21}+7x_{31}+6x_{41}=10x_{12}+12x_{22}+11x_{32}+7x_{42}$$
$$x_{11},\ x_{12},\ x_{21},\ x_{22},\ x_{31},\ x_{32},\ x_{41},\ x_{42}\geqslant 0$$
$$\min z$$

对于这样的变量，有两个下标的特殊线性规划，也可以根据单纯形方法的原理，设计一种比较简便的表格计算法，不过比物资调拨问题要稍复杂些。

对于只有两种另件的情况，也有一个十分简捷的方法。对每一台机床，算出每天生产不同零件数目的比值，例如对甲机床说来，这个比值是 $^8/_{10}$。这个比值表现了甲机床生产两种不同零件的效率之比。这个比值越大，说明这台机床生产零件 A 效率较高，这个比值越小，说明这台机床生产零件 B 效率较高。现将四台机床的这一比值算出，并从大到小排列：

丁	甲	乙	丙
$\frac{6}{7}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{7}{11}$

从这一次序，说明丁机床生产另件 A 效率最高丙机床生产另件 B 效率最高。

为了用最少时间完成任务，我们应该让每一天生产出最多套数另件。因此，一天中，让丁、甲两台机床生产零件 A，让丙机床生产零件 B。丁、甲机床每天生产 A 另件 $6+8=14$（件），丙机床每天能生产 B 另件 11 件，14 与 11 不能配套。于是，让乙机床在一天中用一部分时间生产另件 A、一部分时间生产另件 B。设乙机床在一天内用 x（分数）时间生产零件 A，用 $(1-x)$ 时间生产零件 B。为满足配套要求，x 应满足方程：

$$14+9x=11+12(1-x)$$

解方程得 $x=\frac{3}{7}$。即乙机床一天的 $\frac{3}{7}$ 时间生产 A 另件，一天的 $\frac{4}{7}$ 时间生产 B 另件。这样让每一机床都生产效率较高的另件，因此便使每天生产另件的套数最多。每天能生产

$$14+9\times\frac{3}{7}=17\frac{6}{7}\ （套）$$

7 天最多能够生产 $17\frac{6}{7}\times 7=125$（套），生产 1000 套，就要用 $\frac{1000}{125}\times 7=56$（天），这就是完成这批零件生产任务的最少时间。

（4）厂址选择问题

有若干个地区需要某一产品，有若干个地点可以设置生产这一产品的工厂，在不同

[illegible]

[illegible]个消费点需要某一种产品，不妨把消费点从1到n编号，[illegible]$b_1, b_2, \cdots, b_n$。再设有 m 个地点可以设置生产这一产品的工厂。[illegible]费。第 i 地设置厂的费用是 f_i，产量是 a_i。从产地 i 到消费点 j [illegible]问题是，在满足各消费点的需要这一前提下，合理选择一些点设置工厂，使置厂费用与运费之和最小。

对每一地点 i $(i=1, 2\cdots, m)$ 是否在该地置厂，用一个变量 y_i 来描叙。这个变量[illegible]，$y_i=1$ 就表示选择 i 地设置工厂，$y_i=0$ 就表示在 i 地不设置工厂。

[illegible]，设由 i 地工厂供应 j 地消费点的数量是 x_{ij}，因此运费是 $C_{ij}x_{ij}$。

[illegible]消费点需要量 b_j，也就有线性不等式

$$x_{1j}+x_{2j}+\cdots+x_{mj}\geqslant b_j$$

[illegible]量是 a_iy_i，它供应给各地总量不能超过产量，因此有不等式

$$x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{in}\leqslant a_i\, y_i$$

[illegible]费用是

$$f_1\, y_1+f_2\, y_2+\cdots+f_m\, y_m$$

[illegible]记号 $\sum\limits_{i=1}^{m} f_i\, y_i$ 表示。

[illegible]是

$$C_{11}x_{11}+C_{12}x_{12}+\cdots+C_{1n}x_{1n}+C_{21}x_{21}+\cdots+C_{2n}x_{2n}+\cdots+C_{m1}x_{m1}$$
$$+\cdots+C_{mn}x_{mn}$$

[illegible]一来看和，用记号 $\sum\limits_{i=1}^{m}\ \sum\limits_{j=1}^{n} C_{ij}\, x_{ij}$ 表示

因此厂址选择问题的线性规划模型是

$$x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{m1}\geqslant b_1$$
$$x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{m2}\geqslant b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{mn}\geqslant b_n$$
$$x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}\leqslant a_1y_1$$
$$x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}\leqslant a_2y_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn}\leqslant a_my_m$$

$x_{ij}\geqslant 0$，y_1，y_1，$\cdots$，y_m 取值 0 或者 1

在上面约束条件下，求目标函数

[illegible]已定的厂址选择方案，计算出化运费最小的[illegible]方案，就要[illegible]，然后把运费与置厂费用之和进一比较，从[illegible]选择方案中挑出[illegible]。从理论上说，这样做似乎是可以的。可是当 m [illegible]较大，也就是可选择设置工厂的地点较多时，2^m 数值很大，要解 2^m 个运输问题[illegible]计算量非常大，实际上是很困难的。因此还得想别的办法。

这一问题与前面讲过的[illegible]问题比较，有一个实质性不同之处——有一些变量取值只能是 0 和 1 。这给问题求解带来很大困难。

一个线性规划问题，如果全部或者部分变量要求取整数值，就称为整数规划。在已有的整数规划问题中，多半是变量要求取值 0 和 1，因此也称为 0－1 规划。上面问题就是一个特殊的整数规划问题。

整数规划是否有一般性的解法呢？

1958 年美国数学家戈莫里首先提出解整数规划的"割平面方法"，后来又有一些数学家提出一种"分枝估界法"。这两种方法有一个共同点：把一个整数规划的求解，转化成许多次线性规划问题求解。因此，一个线性规划与一个整数规划，如果它们的约束条件与变量数目差不多，计算起来，后者的计算量比前者要多数十倍、甚至上百倍的增加。但是，由于电子计算机技术日新月异的进步，整数规划还是在许多实际部门得到了应用。目前用先进的电子计算机，上千个约束、几千个变量的整数规划，也是可以计算的。