

解边界值问题的边界元素法

邵 京 栋

(上海计算技术研究所)

摘 要

许多描述物理问题的偏微分方程可以化归边界积分方程, 然后用边界元方法求解, 本文讨论两类边界边定问题——弹性接触问题和自由边界问题的边界元解法。

§ 1. 弹性接触问题

弹性接触问题是一个接触边界待定的非线性问题, 常用有限元增量法求出近似解〔1〕,〔2〕, 但运算量相当大。本文从弹性力学基本方程出发导出接触问题的边界积分方程, 再用边界元得到一个求解有摩擦接触问题的快速算法, 为简单起见, 我们以平面问题为例, 并假定接触面充分光滑而变形为小变形。

设接触系统由 Ω_1, Ω_2 组成, Γ_1 为可能接触边界 (图 1), 在一定接触状态下应成立如下的方程〔1〕:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(k)}}{\partial x_j} + b_i^{(k)} = 0, \quad \Omega_k \text{ 中}, \quad i, j, k=1, 2 \quad (1)$$

$$P_i^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} n_j^{(k)} = P_i^{(k)}, \quad \Gamma_2^{(k)} \text{ 上}, \quad i, j, k=1, 2 \quad (2)$$

$$u_i^{(k)} = \bar{u}_i^{(k)}, \quad \Gamma_1^{(k)} \text{ 上}, \quad i, k=1, 2 \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} u_i^{(1)} &= u_i^{(2)} = u_i \\ P_i^{(1)} &= -P_i^{(2)} = P_i \end{aligned} \right\} \text{接触段 } \Gamma_c \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} u_n^{(1)} &= u_n^{(2)} \\ P_t &= -\text{sign}(P_n) \theta P_n \end{aligned} \right\} \text{滑动接触段上} \quad (5)$$

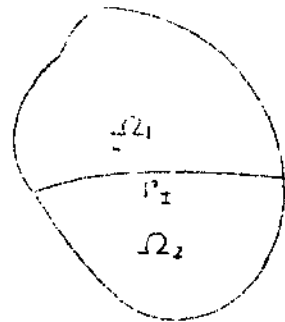


图 1.

$\theta > 0$ 为摩擦系数, t, n 表切向、法向分量。 Ω_k 的实际边界为:

$$\Gamma^{(k)} = \Gamma_1^{(k)} + \Gamma_2^{(k)} + \Gamma_c^{(k)} + \Gamma_e$$

其中 $\Gamma_e^{(k)}$ 为 Γ_1 中分离段属 Ω_k 的部分, 故 $\Gamma_1 = \Gamma_c + \Gamma_e^{(1)} + \Gamma_e^{(2)}$ 。

设 δ_s^* 为沿 s 方向作用于 s 点的单位荷载, $\sigma_{ij}^{*(k)}$ 为取

$b_i^{(k)} = \delta_{is}^i$, $i, k=1, 2$ 时方程(1)的解; 又设 P_{sL}^* , u_{sL}^* 为在 δ_{sL}^i 作用下弹性体在 L 方向的引力和位移[4], 则平面弹性问题

$$u_{sL}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} [(3-4\nu)\ln \frac{1}{r} \cdot \delta_{sL} + \gamma_{sL} \gamma_{L1}]$$

$$P_{sL}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)\gamma} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial n} ((1-2\nu)\delta_{sL} + 2\gamma_{sL}\gamma_{L1} + (1-2\nu)(\gamma_{sL}n_L - \gamma_{L1}n_s) \right]$$

μ 为 Lamé 常数, ν 为泊松比, γ 为 L 至弹性体其余质点的距离。

以 P_{sL}^* , u_{sL}^* 为权函数, 对(1)~(3)用加权剩余法得

$$\int_{\Omega^{(k)}} \left(\frac{\partial \sigma_{sL}^{(k)}}{\partial x_j} + b_L^{(k)} \right) u_{sL}^{*(k)} d\Omega = \int_{\Gamma_1^{(k)} - \Gamma_1^{(k)}} (P_L^{(k)} - \tilde{P}_L^{(k)}) u_{sL}^{*(k)} d\Gamma + \int_{\Gamma_1^{(k)}} (\tilde{u}_L^{(k)} - u_L^{(k)}) P_{sL}^{*(k)} d\Gamma$$

利用应力应变关系, 分部积分后可化为

$$\frac{1}{2} u_s^{(k)} = - \int_{\Gamma_1^{(k)}} \tilde{u}_L^{(k)} P_{sL}^{*(k)} d\Gamma + \int_{\Gamma_1^{(k)}} \tilde{P}_L^{(k)} u_{sL}^{*(k)} d\Gamma + \int_{\Omega^{(k)}} b_L^{(k)} u_{sL}^{*(k)} d\Omega \quad k=1, 2 \quad (6)$$

表示 s 点在 s 方向移动, 而

$$\tilde{P}_L^{(k)} = \begin{cases} \tilde{P}_L^{(k)} & \text{在 } \Gamma_2^{(k)} \text{ 上} \\ 0 & \text{在 } \Gamma_e^{(k)} \text{ 上} \end{cases}, \quad \tilde{u}_L^{(k)} = \begin{cases} \tilde{u}_L^{(k)} & \text{在 } \Gamma_1^{(k)} \text{ 上} \\ u_L & \text{在 } \Gamma_e^{(k)} \text{ 上} \end{cases}$$

$$\tilde{P}_L^{(1)} = -\tilde{P}_L^{(2)} = P_L \quad \text{在 } \Gamma_e \text{ 上}$$

有摩擦时, 在 Γ_e 滑动接触段还应满足(5), 方程(6)、(5)组成弹性接触问题的边值积分方程。

见在讨论解法, 将 $\Gamma^{(k)}$ 划分若一段, 每段用一直线逼近之, 直线端点为结点, 在 Γ_1 上的结点必须使上属 $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$ 上的点构成一一对应的可能接触点对(图2), 结点编号按逆时针方向, 依次为 $\Gamma^{(1)} - \Gamma_1$ 段、 $\Gamma^{(2)} - \Gamma_1$ 段、 Γ_1 上 Ω_1 一侧、 Γ_1 上 Ω_2 一侧。设直线段 l_j 端点为 (x_1^j, x_2^j) , (x_1^{j+1}, x_2^{j+1}) 则 l_j 可表示为 $(-1 \leq \xi \leq 1)$:

$$x_i = \phi_1(\xi)x_i^j + \phi_2(\xi)x_i^{j+1} \quad i=1, 2$$

$$\phi_1 = (1-\xi)/2, \quad \phi_2 = (1+\xi)/2$$

在 l_j 上位移和引力插值如下:

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^j \\ u_1^{j+1} \\ u_2^j \\ u_2^{j+1} \end{Bmatrix} = \Phi^T u^j$$

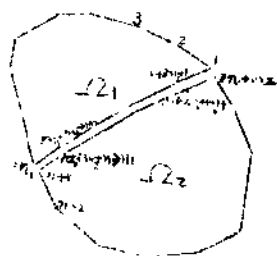


图 2

$$F = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{1j+1}^j \\ p_{1j+1}^j \\ p_{2j+1}^j \\ p_{2j+1}^j \end{Bmatrix} = \Phi^T P^j$$

其中 $u_i^j, p_i^j, i=1, 2$ 为 j 点的位移和引力分量, 代入(6)式得

$$\frac{1}{2} u^{(k)} + \sum_{j=1}^{m+n} \left\{ \int_{\Omega_j} P^{(k)} \Phi^T d\Gamma \right\} u^{(k)} = \sum_{j=1}^{m+n} \left\{ \int_{\Omega_j} u^{(k)} \Phi^T d\Gamma \right\} P^{(k)} + \sum_{k=1}^m \int_{\Omega_k} u^{(k)} b^{(k)} d\Omega \quad k=1, 2 \quad (7)$$

$$P^{*(k)} = \begin{bmatrix} P_{11}^{*(k)} & P_{12}^{*(k)} \\ P_{21}^{*(k)} & P_{22}^{*(k)} \end{bmatrix}, \quad U^{*(k)} = \begin{bmatrix} u_{11}^{*(k)} & u_{12}^{*(k)} \\ u_{21}^{*(k)} & u_{22}^{*(k)} \end{bmatrix}$$

注意到式(2)~(4), 方程(7)只有 $2(n+2m)$ 个未知元, 与方程个数相同, 故只须算出积分, 即可求介(7)得出边界结点 i 未知位移或引力。对 Γ_1 上结点, 我们可以利用坐标变换将变量转换至局部坐标系 (n, τ) 中。

设 $x^{(k)}$ 为 $\Gamma_1^{(k)} + \Gamma_2^{(k)}$ 上结点未知元组 $U^{(1)}, U^{(2)}$ 为 Γ_2 分离段结点未知元组; $U^{o(k)}, P^{o(k)}$ 为 Γ_1 无滑动接触点的未知元组; $U_n^{w(k)}, k=1, 2$

P_n^w 为 Γ_2 滑动接触点的法向分量未知元组; $U_t^{w(k)}, k=1, 2, P_t^w$ 为滑动接触点的切向分量未知元组, 和下列边界条件和协调条件:

对分离点 $P=0$

对非滑动接触点 $U^{o(1)} = U^{o(2)}$

对滑动接触点 $U_n^{w(1)} = U_n^{w(2)}, P_t^w = 0$

可以将坐标变换后的方程(7)表示成一个稀疏线性方程组, 若用部分主元素法解之, 不会产生局部填充。

按增量法将荷载分为 P 级, 设已知某一级的解, 在求下一级增量解时, 需进行若干次迭代, 每次迭代可根据上次接触状态在方程组右端追加荷载增量:

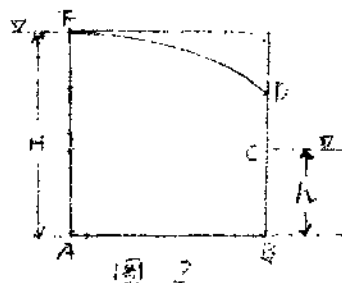
$$\Delta f = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, U^{(1)} - U^{(2)}, U_n^{(1)} - U_n^{(2)}, -\text{sign}(R + \Delta P_t) \theta (P_n + \Delta P_n) - P_t, -P\}^T$$

解得增量后, 修改接触状态^[1], 再进入下次迭代。这样, 若每级荷载平均迭代1次, 我们只须形成和求解 $2(n+3m)$ 阶稀疏线性方程组一次, 再解 P 次, 并分解 $2m \times 6m$ 矩阵 $P \times 1$ 次, 因而运算量很少, 此外因边界元求得的边界应力较精确, 有助于迭代收敛。

§ 2. 自由边界问题

我们考察模型问题 设在两水库间有座土坝(图3, 坝基不透水, 边界 CD 上存在渗流, 我们要确定自由面 FD 及势函数 u 使:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{AB} &= 0 \\ u \Big|_{AF} &= H, \quad u \Big|_{BC} = h, \quad u \Big|_{CD} = y \\ u \Big|_{FD} &= y, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{FD} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$



FD 应为一单调下降的下滑曲线。

用有限元或差分法求解上述问题不仅运算量大且要修改区域网格。如用边界元求解可使方程个数大为降低, 且无修改网格之麻烦。

首先从方程(8)利用 Green 公式及 Laplace 方程的基本解 u^* 容易导出边界积分方程

$$C_i u_i + \int_{\Gamma} u q^* dr = \int_{\Gamma} q u^* dr \quad (9)$$

这里 $q = \frac{\partial u}{\partial n}$, $q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$, Γ 为 Ω 边界, $C_i = \frac{1}{2} (1 + \frac{\beta_i}{\alpha_i})$, β_i 为 $\vec{x}_i$ 处两侧边界法向的夹角, 当 $\vec{x}_i$ 为光滑点时 $C_i = \frac{1}{2}$ 。此外 $u_i = u(\vec{x}_i)$, 对平面问题

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right), \quad r = |\vec{x} - \vec{x}_i|$$

将 Γ 用 N 个分点划分若干段再用折线逼近之, 在每一直线段 Γ_j 上可构造线性插值函数

$$u(\xi) = u_1 \phi_1 + u_2 \phi_2, \quad q(\xi) = q_1 \phi_1 + q_2 \phi_2$$

这里 $\phi_1 = (1 - \xi)/2$, $\phi_2 = (1 + \xi)/2$, 代入(9)式得出

$$C_i u_i + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} [\phi_1 \phi_2] q^* dr \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \right) = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} [\phi_1 \phi_2] u^* dr \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \right) \quad (10)$$

积分 $\int_{\Gamma_j} \phi_k q^* dr$ 可用数值积分公式算出, 当 $i \in \Gamma_j$ 时积分是奇异的, 必须直接积分以避免过大的误差。于是从(20)我们可导出一个线性方程组

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j, \quad i=1, 2, \dots, N$$

边界条件给定时, 可以由上述方程组求得边界结点上未知的 u 及 q 。

于是解自由边界问题的边界元迭代过程为:

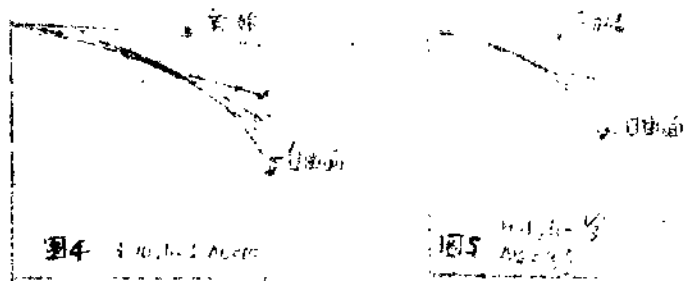
- (1) 选取试插曲线 $\Gamma_1: y = \eta(x)$ 为自由面的初始逼近。
- (2) 在自由面 Γ_1 上取 $\frac{N-1}{2}$ 个结点, 然后结合其余各段边界的已知条件用边界元素法求出 Γ_1 上各结点的 u 值。
- (3) 若对 Γ_1 的全部结点, u 值与该点 y 坐标之差在给定误差范围内, 则 Γ_1 即为所求自由面, 否则取新的自由面逼近曲线 Γ_2 , 使其各结点纵坐标 $y = u$, 回到(2)重复迭代。

出渗点 D 作为第一类边界点参与迭代, 在新的一次迭代开始前, 可以由 Γ_1 上邻近 D 的结点纵坐标值经二次插值推出 D 点的位置, 为了考虑 D 点的奇异性^[3], 我们所用插值公式为

$$y = \sum_{k=1}^3 \left[\left(y_k - \frac{x_k - x_0}{x_1 - x_0} x_0 \right) \frac{\frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_0}}{\frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_0} - 1} \right]$$

这里 x_0 为 D 点横坐标, $(x_i, y_i) i=1, 2, 3$ 为自由面上靠近 D 的三个结点坐标。显然, 这里除了 D 点下方的边界结点需作一定调整外, 一般不必修改结点坐标。

对图 3 中的问题, 我们就 $H=10, h=3, AB=10$ 及 $H=1, h=1/3, AB=2/3$ 两种情况作了计算, 边界上共配置 26 个结点, 其中自由面上只有 6 个结点, 初始自由面取得较粗糙, 使之接近水平位置, 实际计算表明迭代过程相当稳定, 没有振荡现象, 收敛速度相当快, 仅迭代 16 次即达相当好的精度, 初始面取得好时, 一般只须迭代几次。自由面收敛情况分别示于图 4 及图 5 中。



在 $H=10$ 的问题中，出渗点趋于 $y_0=0.4$ ，而在图 5 的问题中，出渗点趋于 $y_0=0.589$ 。

§ 3. 讨论

边界元素法是求解边界特定问题的一个自然而有效的方法，具有一些明显的优点。在弹性接触问题中，由于变形小，网格不变，故线性方程组仅须形成一次，迭代时只处理一个更小的矩阵。而在自由边界问题中，自由面位置变动大，每次迭代都要形成一个线性方程组，但因边界元计算精度高，结点少，收敛快，总运算量仍然比较少。利用本文的方法对实际工程问题的计算分析将另予报导。

文 献

- [1] 崔俊芝等“关于弹性接触问题的分析方法”，见“有限单元法及其应用”（中国科学院计算中心编） 1975, 167-182 页
- [2] 郭仲衡“二维弹性接触问题有限元分析的混合标架——广义子结构法”教育部高校计算结构力学会议文集 1978 年
- [3] J. Aitchison “Numerical treatment of a singularity in a free boundary problem”
Proc. R. Soc. Lond. A. 330, 573-580 (1972)
- [4] C. A. Brebbia “The boundary element method for engineers” 1978