

译文 80-002

厦门水产学院	
渔业机械资料专用章	
总号	分号
	1-U-3/2

厦门水产学院	
渔业机械资料专用章	
总号	分号
15-4	0150

船舶操纵性译文集

(四)

操纵性基础流体力学

0150

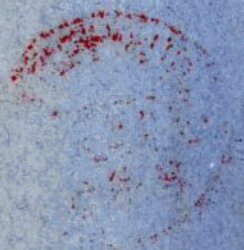
53

第六机械工业部 第七研究院第七〇二研究所

一九八〇年二月

目 录

操纵性基础流体力学(Ⅰ).....	(1)
操纵性基础流体力学(Ⅱ).....	(18)
操纵性基础流体力学(Ⅲ).....	(33)



MA 24/08

操纵性基础流体力学 (I)

日本船舶技术研究所流体力学教研组*

1. 前 言

研究操纵性运动,即需要有运动方程,而且还要知道构成运动方程式各项的流体动力。本文拟就确定运动方程式及流体动力所用到的部分流体力学基础知识加以总结归纳,重点放在推导的方法、所含的意义,以及应用时必须注意的那些假设、条件等等。

船在流体中航行,使流体扰动,其结果是船体受到流体的作用力。若为理想流体,则船体只受到由兴波和附加质量而产生的力,但在操纵运动中,由粘性所产生的涡是起着重要作用的。

通常,沿船体发展起来的边界层,在船体后部分离而形成伴流。同时,在船首尾的艏部也引起局部分离而形成三元分离。如果船体呈斜航状态,就产生更大范围的分离,当攻角一超过某个角度,在艏部下游附近,约沿整个船长都产生分离。分离边界层所引起的涡片立即卷合在一起,形成大的三元分离涡。在斜航状态时所产生的这种强烈的三元分离涡,一般认为其形状随雷诺数的变化是不大的,与其说它是取决于局部的曲率,毋宁说是由于船体的总姿态整体地产生的,而作用于船体上的升力的大部分,是由这些涡片所产生的环流所形成的。这时,流体可分为存在涡量的边界层和自由涡的部分,以及不存在涡量的、作为势流处理的部分,这就成为满足如下条件的流场问题。假设流体是作为不可压缩的。

(A1) 具势流体

1. 连续性方程式(拉普拉斯方程式)

2. 运动方程式(欧拉方程式)

3. 边界条件或初始条件

与旋涡流体分界处的条件, 远处的条件

(A2) 旋涡流体

1. 连续性方程式(拉普拉斯方程式)

2. 运动方程式(纳维尔-斯托克斯方程式)

3. 边界条件或初始条件

与具势流体分界处的条件

物体表面的条件

(A3) 自由表面条件

1. 运动条件(自由表面与流线重合)

2. 动力条件(在自由表面处的压力一定)

* 本文执笔人:野中晃二。

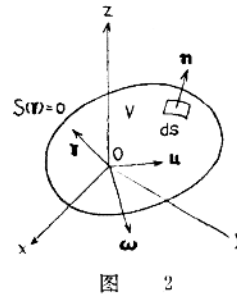
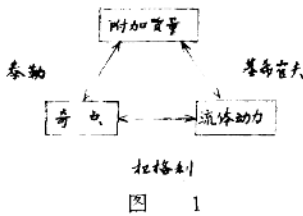
3. 辐射条件(在初值问题中不需要)

船舶摇摆及兴波阻力的计算是解(A1)+(A3)的问题, 操纵性主要是解(A1)+(A2)的问题, 这就成为一个在无限流体中绕映象模型的流动问题, 但若傅氏数是大的话, 则必须考虑(A3)的条件。在操纵性方面通常所用的方法是: 把旋涡流体的运动、涡量的扩散看成很小, 把边界层及自由涡看成无厚度的涡片或看成许多涡线, 并且适当地给出分离条件。

只要知道了由附加质量、升力和外扰动所引起的力的分布, 则运动方程式就确定了, 就能预报运动。先不考虑外扰动, 附加质量几乎是不受粘性影响的, 而升力则相反, 几乎全是由于粘性而产生的。在以下各节中, 首先从(A1)来阐述运动方程式, 其次从(A1)+(A3)来叙述附加质量, 最后根据(A1)+(A2)来谈谈涡的一般性质及升力的发生。

2. 无限流体中刚体的运动

在无粘性、不可压缩的无限流体中运动的物体受到因由附加质量产生的流体动力。在流体中运动的物体, 可用奇点分布来表示, 奇点、附加质量和流体动力三者之间有密切的关系, 阐述附加质量与流体动力关系的是用基希霍夫(Kirchhoff)公式所得到的运动方程式; 论述流体动力与奇点关系的是拉格利(Lagally)定理; 而阐述奇点和附加质量关系的是泰勒(Taylor)定理。



拉格利, 泰勒定理都是对于孤立奇点的定常运动的, 卡明斯(Cummins)把拉格利定理推广到非定常运动场合, 兰德韦贝尔(Landweber)和易(Yih)更进一步把拉格利、泰勒两定理推广到连续奇点分布的非定常运动的场合。

本章用基希霍夫公式来论述由流体物体系的动能所导出的运动方程式, 以及由兰德韦贝尔和易氏一般化了的关于拉格利及泰勒的定理, 再进一步简述流体动力和奇点关系的近似式——契尔托克(Chercock)公式。

2.1 运动方程式

假设在静止无限流体中静止的物体, 在有限时间内, 受到有限的力而开始运动, 也就是说, 所考察流体的运动, 完全是由于物体的运动而引起的情况, 这时的流动是无旋的, 有满足如下条件的单值速度势 ϕ 存在。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= \text{物体表面的法向速度} \\ \nabla \phi &\rightarrow 0 \text{ 在无限远处} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.1)$$

考虑固连于物体的坐标系 $O-xyz$, 设 \mathbf{r} 为由原点 O 开始的位置向量, \mathbf{n} 为物体表面 $S(\mathbf{r})=0$ 上的单位法线向量, 并假定物体是以速度 $\mathbf{u}(t)$, 角速度 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 而运动着。

当流体和物体在物体表面法线方向上的相对速度为 0 时, 式(2.1.1)的第二式可以写成如下的形式

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial\phi}{\partial n} &= \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \\ &\text{在 } S(\mathbf{r})=0 \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.2)$$

在这里 ϕ 若取如下的形式, 就成为满足(2.1.1)式的速度势

$$\phi = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{X} \quad (2.1.3)$$

式中 $\nabla^2 \boldsymbol{\varphi} = 0$, 在无限远处 $\nabla \boldsymbol{\varphi} \rightarrow 0$, 在 $S(\mathbf{r})=0$ 上 $-\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial n} = \mathbf{n}$

$\nabla^2 \mathbf{X} = 0$, 在无限远处 $\nabla \mathbf{X} \rightarrow 0$, 在 $S(\mathbf{r})=0$ 上, $-\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial n} = \mathbf{r} \times \mathbf{n}$, 由上式, 显然可见, $\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{X}$ 仅取决于物体的形状, 而与物体的运动无关。

这时, 流体的动能—— T_L , 可由下式表示,

$$\begin{aligned} T_L &= -\frac{\rho}{2} \int_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \frac{\rho}{2} \int_S (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{X}) [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] dS \\ &= Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2A'vw + 2B'wu + 2C'uv + Pp^2 + Qq^2 + Rr^2 + 2P'qr \\ &\quad + 2Q'r p + 2R'p q + 2p(Fu + Gv + Hw) + 2q(F'u + G'v + H'w) \\ &\quad + 2r(F''u + G''v + H''w) \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

式中,

$$\mathbf{u} = (u, v, w), \quad \boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$$

T_L 中所出现的 21 个系数 A, B, \dots, H'' , 仅取决于物体的形状。物体的动能—— T_S 以下式表示

$$\begin{aligned} T_S &= -\frac{1}{2} \int_V \sigma (\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) d\tau = \frac{M}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2} (I_{xx}p^2 + I_{yy}q^2 + I_{zz}r^2) \\ &\quad - (I_{yz}qr + I_{zx}rp + I_{xy}pq) + M[\bar{x}(vr - wq) + \bar{y}(wp - ur) + \bar{z}(uq - vp)] \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

式中, σ 是密度, M 是质量, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 是重心的位置, I_{xx}, \dots, I_{xy} 等表示惯性矩及惯性积。

在以 $\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}$ 运动的坐标系中, 表示某体系的动能与加于该系的力和力矩之间关系的基希霍夫公式, 可写成如下式

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}} &= \mathbf{F} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{u} \times \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}} &= \mathbf{M} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.6)$$

这里, 把流体物体体系所具有的动能—— $T_L + T_S$ 作为 T 来代入, 即得

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_S}{\partial \mathbf{u}} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial T_S}{\partial \mathbf{u}} &= \mathbf{F} + \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_L}{\partial \mathbf{u}} \right) - \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial T_L}{\partial \mathbf{u}} \right] \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_S}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial T_S}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{u} \times \frac{\partial T_S}{\partial \mathbf{u}} &= \mathbf{M} + \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right) - \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial T_L}{\partial \boldsymbol{\omega}} - \mathbf{u} \times \frac{\partial T_L}{\partial \mathbf{u}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.1.7)$$

上式右边〔 〕号内的式子表示流体对物体的作用力 \mathbf{F}_L 及力矩 \mathbf{M}_L 。

通常操纵运动是作为水平面内的运动来处理的，因而来考察 xy 平面内的如下二元运动

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= (u, v, 0) & \boldsymbol{\omega} &= (0, 0, r) \\ \mathbf{F} &= (x, y, 0) & \mathbf{M} &= (0, 0, N) \\ \mathbf{n} &= (n_1, n_2, n_3) & \mathbf{r} &= (x, y, z) \\ \boldsymbol{\varphi} &= (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) & \boldsymbol{\chi} &= (X_1, X_2, X_3) \end{aligned} \right\} \quad (2.1.8)$$

在这个情况下，流体及物体之动能写成如下形式

$$\left. \begin{aligned} T_L &= Au^2 + Bv^2 + 2C'uv + Rr^2 + 2r(F''u + G''v) \\ T_s &= \frac{M}{2}(u^2 + v^2) + \frac{I_{zz}}{2}r^2 + Mr(\bar{x}v - \bar{y}u) \end{aligned} \right\} \quad (2.1.9) \textcircled{1}$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{\rho}{2} \int_s n_1 \varphi_1 dS = \frac{\rho}{2} \int_s \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS \\ B &= -\frac{\rho}{2} \int_s n_2 \varphi_2 dS = \frac{\rho}{2} \int_s \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} dS \\ C' &= -\frac{\rho}{4} \int_s (n_2 \varphi_1 + n_1 \varphi_2) dS = \frac{\rho}{4} \int_s \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \varphi_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \varphi_2 \right) dS \\ R &= -\frac{\rho}{2} \int_s (n_2 x - n_1 y) X_3 dS = \frac{\rho}{2} \int_s X_3 \frac{\partial X_3}{\partial n} dS \\ F'' &= -\frac{\rho}{4} \int_s [(n_2 x - n_1 y) \varphi_1 + n_1 X_3] dS = \frac{\rho}{4} \int_s \left(\varphi_1 \frac{\partial X_3}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} X_3 \right) dS \\ G'' &= -\frac{\rho}{4} \int_s [(n_2 x - n_1 y) \varphi_2 + n_2 X_3] dS = \frac{\rho}{4} \int_s \left(\varphi_2 \frac{\partial X_3}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} X_3 \right) dS \end{aligned} \right\} \quad (2.1.10) \textcircled{2}$$

如果物体对于 xz 平面左右呈对称，则 $C' = F'' = 0$ ，而且把座标原点取在物体的重心， $\bar{x} = \bar{y} = 0$ ，把式(2.1.9)代入式(2.1.7)即得下式。

$$\left. \begin{aligned} (M + 2A)\dot{u} - (M + 2B)vr &= X + 2G''r^2 \\ (M + 2B)\dot{v} + (M + 2A)ur &= Y + 2G''r^2 \\ (I_{zz} + 2R)\dot{r} &= N - 2(B - A)uv + 2G''(\dot{v} - ur) \end{aligned} \right\} \quad (2.1.11) \textcircled{3}$$

上式是理想流体中的平面运动方程式，物体从流体中所受到的只是由附加质量所引起的力和力矩（若另外还存在物体及奇点时，则将受到后面所讲到的拉格利的力），实际上，还受到粘性所引起的力，在操纵运动方程式中，这些力都是包含在外力 X, Y, N 中来考虑的。

关于操纵运动方程式本身的处理方法，由于它既非本文的目的，且又在《操纵性会议录》等等中作了详细解释，所以只作简单提及。大致有三种区分法：第一种方法是采用缓慢运动的导数 (Slow motion derivatives)，船的运动是缓慢的，而假设流动是准定常状态的，流体动力仅取决于哪一瞬间的状态，把流体动力在定常直线行进状态附近的运动状态作泰勒级数展开的方法。第

① 式(2.1.9) T_s 表达式的第三项原为“ $Mr(\bar{x}u - \bar{y}v)$ ”，应为“ $Mr(\bar{x}v - \bar{y}u)$ ”——译者。

② 式(2.1.10)中的各式，第一个等号右边应为正号，第二个等号右边应加上负号，此处未予更正（可参看 Lamb: 《Hydrodynamics》(1932年) p. 164 § 120)——译者。

③ 公式(2.1.11)的第二式右端原为“ $Y + 2G''r^2$ ”应为“ $Y - 2G''r^2$ ”；第三式的右端原为“ $N - 2(B - A)uv + 2G''(\dot{v} - ur)$ ”，应为“ $N - 2(B - A)uv - 2G''(\dot{v} + ur)$ ”此处均未更正——译者。

二种方法，称为频率响应函数法，即求出在频率域内输入输出的响应函数的方法。第三种是若要考虑自由涡及自由表面的存在，则很明显，流体动力是与所经过的运动过程有关的，例如，用

$$F(t) = \int_{-\infty}^t K[u(\tau), \omega(\tau); \tau - t] d\tau$$

形式的卷积来求此时的流体动力的方法，布拉德(Brad)和卡明斯等人主张要考虑记忆效应(memory effect)，最近毕晓普(Bishop)等人将之用于平面运动机构的分析。第二种方法相当于第三种方法用于最简单的线性系统的情况。

2.2 一般化了的泰勒和拉格利定理

先考虑在无粘性、不可压缩流体中的刚体运动。假设在流体中除此物体之外还存在边界及奇点。因为物体及边界都可以用奇点来表示，所以认为流动是由奇点所引起的，兹就下列三种奇点进行考虑。

m : 源或汇的强度

μ : 偶极子的方向及强度

σ : 连续分布的源或汇的平均单位面积的强度

采用固连于物体的坐标系。假设坐标原点 O 以速度 $u(u_1, u_2, u_3)$ ，角速度 $\omega(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 而运动。以 S 表示物体表面，物体内部的奇点由面 S' 围着，并设面上法线 n 的方向为指向流体方面。

假设速度势为 ϕ ，物体表面边界条件相同于式(2.1.2)。可表示为

$$-\frac{\partial \phi}{\partial n} = (\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = \sum_{\alpha=1}^6 u_{\alpha} n_{\alpha} \quad (2.2.1)$$

式中

$$(u_1, u_2, u_3) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

$$(n_1, n_2, n_3) = (x_2 n_3 - x_3 n_2, x_3 n_1 - x_1 n_3, x_1 n_2 - x_2 n_1)$$

速度势 ϕ 可以认为由以下两部分组成：即(1)在其他边界静止又无外部奇点情况下，只由物体运动而引起的部分 $\sum_{\alpha=1}^6 u_{\alpha} \phi_{\alpha}$ ，和(2)物体静止，由其他边界运动并有外部奇点而引起的部分 ϕ_0 。

$$\phi = \sum_{\alpha=1}^6 u_{\alpha} \phi_{\alpha} + \phi_0 \quad (2.2.2)$$

根据式(2.2.1)、(2.2.2)， $\frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial n} = -n_{\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, 6$)， $\frac{\partial \phi_0}{\partial n} = 0$ ，式(2.2.1)也可再写成如下形式

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 r_i n_i &= (\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \quad \textcircled{2} \\ &= \sum_{i=1}^3 (u_i + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \omega_j x_k) n_i \quad \textcircled{3} \end{aligned}$$

① 式(2.2.1)右端，原文为 $\sum_{\alpha=1}^6 u_{\alpha} \cdot u_{\alpha}$ ——译者。

② 这里引进的符号 \mathbf{x} 未加说明，从含意上看，应即为原来的位置向量 \mathbf{r} ——译者。

③ 原文等号右边第一个连加号写为 $\sum_{i=1}^6$ ——译者

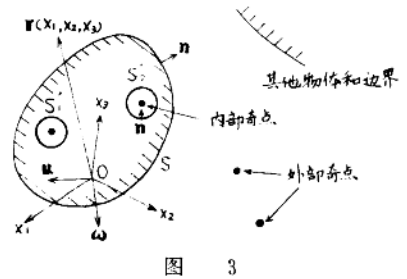


图 3

$v_i \left(= -\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)$ 为流体的速度, 若 i, j, k 之中任意两个相等时, 则 ϵ_{ijk} 为 0; 不相等时, 则其顺序若为顺转, 则取 +1, 若为反转则取 -1.

在固连于物体之坐标系上的伯努利方程式, 可表示如下

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= \frac{\partial \phi}{\partial t} - W \\ W &= \frac{1}{2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \\ &= \sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{2}(v_i^2 + u_i^2) - v_i \left(u_i + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \omega_j x_k \right) \right] \end{aligned} \quad (2.2.3) \textcircled{1}$$

T_B 当作物体排开的流体的动能, 可由下式表示

$$\begin{aligned} T_B &= \frac{\rho}{2} \int (\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^6 \sum_{\beta=1}^6 B_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta \end{aligned} \quad (2.2.4) \textcircled{2}$$

式中

$$\begin{aligned} B_{\alpha\beta} &= B_{\beta\alpha}, \quad B_{ij} = B \cdot \delta_{ij}, \quad B_{i,3+j} = B \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \bar{x}_k \\ B_{3+i,3+j} &= \rho \int \sum_{k=1}^3 (x_k^2 \delta_{ij} - x_i x_j) d\tau \quad \textcircled{3} \\ i, j, k &= 1, 2, 3 \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6 \end{aligned}$$

B 是排开流体的质量, δ_{ij} 是克罗内克尔(Kronecker)符号, \bar{x}_k 表示物体的体积中心位置.

泰勒定理是就边界静止、不存在外部奇点的情况下求得的; 拉格利定理是就边界运动并存在外部奇点的情况下求得的.

首先, 其边界静止且不存在外部奇点的情况下, 仅仅由于物体的运动而引起的流体的动能,

① 式(2.2.3)第一个等号的右端, 似多 “ $\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ ” 一项, 相应的第二个等号右端多 “ $\frac{1}{2} u_i^2$ ” 项, 译时未改——译者。

② 式(2.2.4)第二个等号原文误写为 $\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^6 \sum_{\beta=1}^6 \beta_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta$ ——译者。

③ 此式似应为 $B_{i,3-j} = 2B \sum_{k=1}^3 \epsilon_{jik} \bar{x}_k$, $B_{3+i,3+j} = 2\rho \int \sum_{k=1}^3 (x_k^2 \delta_{ij} - x_i x_j) d\tau$ 译时未改——译者。

可列为下式

$$\partial T = -\rho \int \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \rho \int \left(\sum_{\alpha=1}^6 u_{\alpha} \phi_{\alpha} \right) \left(\sum_{\beta=1}^6 u_{\beta} n_{\beta} \right) dS = \sum_{\alpha=1}^6 \sum_{\beta=1}^6 A_{\alpha\beta} u_{\alpha} u_{\beta} \quad (2.2.5)$$

式中

$$A_{\alpha\beta} = \rho \int \phi_{\alpha} n_{\beta} dS, \quad A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$$

象式(2.2.5)右边那样, 把用速度的二次形式所表示时的流体的动能的系数 $A_{\alpha\beta}$, 称之为由动能所定义的附加质量。试就二元及三元情况来求附加质量 $A_{\alpha\beta}$ 与物体内部奇点的关系。

二元情况

考虑复变数 $z = x_1 + ix_2$, 复速度势 $W_{\alpha} = \phi_{\alpha} + i\psi_{\alpha}$, 把 s 作为沿物体表面的距离

$$\begin{aligned} A_{\alpha 1} + iA_{\alpha 2} &= \rho \int \phi_{\alpha} n_1 ds + i\rho \int \phi_{\alpha} n_2 ds = -i\rho \int \phi_{\alpha} dz \textcircled{1} \\ &= -i\rho \int \omega_{\alpha} dz - \rho \int z n_{\alpha} ds = -i\rho \int \omega_{\alpha} dz - (B_{\alpha 1} + iB_{\alpha 2}) \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

从而

$$\begin{aligned} B_{ij} &= B \cdot \delta_{ij}, & B_{\alpha 1} &= -B \bar{x}_2, & B_{\alpha 2} &= B x_1, & i, j &= 1, 2 \\ & & \omega_{\alpha} & & \int \omega_{\alpha} dz & & & \\ \text{偶极子} & \quad \mu_{\alpha} \rightarrow \frac{\mu_{\alpha}}{z - z_{\alpha}} & & & & & & \rightarrow 2\pi i \mu_{\alpha} \\ \text{源} & \quad m_{\alpha} \rightarrow m_{\alpha} \ln(z - z_{\alpha}) & & & & & & \rightarrow 2\pi i m_{\alpha} z_{\alpha} \\ \text{连续分布源} & \quad \sigma_{\alpha} \rightarrow -\int \sigma_{\alpha} \ln(z - z_s) dA & & & & & & \rightarrow 2\pi i \int \sigma_{\alpha} z_s dA \end{aligned}$$

据此, 二元一般化了的泰勒定理如下

$$A_{\alpha 1} + B_{\alpha 1} + i(A_{\alpha 2} + B_{\alpha 2}) = 2\pi\rho [\int \sigma_{\alpha} z_s dA + \sum(m_{\alpha} z_s + \mu_{\alpha})] \quad (2.2.7)$$

右边的 Σ 表示就物体内部全部偶极子和源所取的总和。对于对应于纯回轮的附加质量(附加惯性力矩) $A_{\alpha\alpha}$, 不存在象式(2.2.7)那样的简单的关系式。

三元情况

$$\begin{aligned} A_{\alpha j} &= A_{j\alpha} = \rho \int \phi_{\alpha} n_j dS = \rho \int \phi_{\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial n} dS \\ &= \rho \int x_j \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial n} dS + 4\pi\rho \int x_j \sigma_{\alpha} d\tau + \rho \int \left(x_j \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial n} - \phi_{\alpha} n_j \right) dS' \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

右边第一项是对于 $j = 1, 2, 3$, $\alpha = 1, 2, 3, \dots, 6$ 的

$$\rho \int x_j \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial n} dS = -\rho \int x_j n_{\alpha} dS = -B_{\alpha j}$$

右边第二项之 σ_{α} 是对应于 ϕ_{α} 的物体内部的源的分布。右边第三项在 S' 上的积分皆为把 ϕ_{α} 分为在 S' 内奇点附近表示奇异性的项及解析的项, 进行把 S' 之半径向 O 逼近的运算。结果作为三元流一般化了的泰勒定理, 即得下式

$$A_{\alpha j} + B_{\alpha j} = 4\pi\rho [\int \sigma_{\alpha} x_j d\tau + \sum(m_{\alpha} x_{js} + \mu_{\alpha j})] \quad (2.2.9)$$

① 原文第二个等号右端少一个负号——译者。

与式(2.2.7)一样, Σ 表示物体内奇点之和, $\sigma_\alpha, m_\alpha, \mu_\alpha$ 是对应于 ϕ_α 的, $\mu_{\alpha j}$ 表示 μ_α 在 j 方向的分量, x_j 表示 m_α 在 j 方向的位置, x_j 表示 σ_α 在 j 方向的位置, $\alpha=1, 2, \dots, 6, j=1, 2, 3$, 与二元情况一样, 对于纯回转来讲, 是得不到式(2.2.9)那样简单的关系式的。

以上所述的奇点强度 $\sigma_\alpha, m_\alpha, \mu_\alpha$ 是对应于 α 方向的单位速度势的, 下面再假设对应于任意速度势 $u_\alpha \phi_\alpha$ 的。

其次, 就边界运动并存在外部奇点的情况, 来求较之泰勒定理更一般的, 求奇点与力的关系的拉格利定理。

作用于物体的力, 根据式(2.2.3), 可由下式得出。

$$F_i = - \int p n_i dS = - \rho \int \left(\frac{\partial \phi}{\partial t'} - W \right) n_i dS = - \rho \frac{d}{dt'} \int \phi n_i dS + \rho \int W n_i dS \quad (2.2.10)$$

这里, t' 表示对固连于物体的动坐标系的相对的时间变化, 用来区别对于空间静止坐标系的时间。

$$\left. \begin{aligned} \int W n_i dS &= \int \frac{\partial W}{\partial x_i} d\tau - \int W n_i dS' \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \omega_k \int \phi n_j dS + \sum_{j=1}^3 \left(-v_j V_j \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \omega_k \right) n_i dS' - \int W n_i dS' \\ &\quad - 4\pi \int \sigma v_i d\tau \\ V_j &= -v_j + u_j + \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl} \omega_k x_l \\ \rho \int \phi n_i dS &= \rho \sum_{\alpha=1}^6 \int u_\alpha \phi_\alpha n_i dS + \rho \int \phi_0 n_i dS \\ &= \sum_{\alpha=1}^6 u_\alpha A_{\alpha i} + \rho \int x_i \frac{\partial \phi_0}{\partial n} dS + 4\pi \int \sigma_0 x_i d\tau \\ &\quad + \int \left(x_i \frac{\partial \phi_0}{\partial n} - \phi_0 n_i \right) dS' \end{aligned} \right\} \quad (2.2.11)$$

在 S 上 $\frac{\partial \phi_0}{\partial n} = 0$, 在 S' 上用导出泰勒定理相同的方法进行积分, 且用 $\left(\frac{d}{dt}\right) = \left(\frac{d}{dt'} + \boldsymbol{\omega} \times\right)$ 把相对的时间微分换算对空间静止坐标系的时间微分, 则式(2.2.10)即成如下形式

$$\begin{aligned} F_i &= - \sum_{\alpha=1}^6 \frac{d}{dt} (u_\alpha A_{\alpha i}) - 4\pi \rho \frac{d}{dt} \left[\int \sigma_0 x_i d\tau + \Sigma (m_\alpha x_i + \mu_{\alpha i}) \right] \\ &\quad - 4\pi \rho \left[\int \sigma v_i d\tau + \Sigma \left(m v_i' - \frac{4}{3} \pi \sigma \mu_i + \sum_{j=1}^3 \mu_j \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

σ_0, m_0, μ_0 : 对应于 ϕ_0 的物体内部的奇点

σ, m, μ : 物体内所有的奇点

v'_i 表示包括由于物体运动, 在物体外部所形成的奇点在内的物体外部所有这些奇点所引起的诱导速度。若以 \bar{u}_i 来表示重心速度在 i 方向的分量, 则 F_i 可变成如下形式

$$F_i = B \frac{d\bar{u}_i}{dt} - 4\pi\rho \frac{d}{dt} \left[\int \sigma x_i d\tau + \sum (m x_i + \mu_i) \right] - 4\pi\rho \left[\int \sigma v_i d\tau + \sum \left(m v'_i - \frac{4}{3}\pi\sigma\mu_i + \sum_{j=1}^3 \mu_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \right] \quad (2.2.13)$$

式(2.2.12)、(2.2.13)是一般化了的拉格利力。

其次, 根据式(2.2.3), 作用于物体的力矩可由下式得出。

$$M_i = - \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \int \rho x_j n_k dS = - \rho \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \left[\frac{d}{dt} \int \phi x_j n_k dS - \int W x_j n_k dS \right] \quad (2.2.14)$$

用和 F_i 情况一样的办法进行演算可得下式

$$\left. \begin{aligned} M_i &= - \rho \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \left[\frac{d}{dt} \int \phi x_j n_k dS + u_j \int \phi n_k dS \right] + M_{iL}(v) \\ M_{iL}(v) &= - 4\pi\rho \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \left[\int \sigma x_j v'_k d\tau + \sum \left(m x_j v'_k + \mu_j v'_k + x_j \sum_{l=1}^3 \mu_l \frac{\partial v'_k}{\partial x_l} - \frac{4}{3}\pi\sigma x_j \mu_k \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.2.15)$$

$M_{iL}(v)$ 即定常流中通称的所谓拉格利力矩。 v'_k 和 F_i 一样, 表示由于物体外部所有奇点所引起的诱导速度, 式(2.2.15)可再改写成如下形式:

$$M_i = B \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \bar{x}_j \frac{\partial u_k}{\partial t} - \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dt} (\omega_j A_{3+i,3+j}) - 4\pi\rho \frac{d}{dt} \left\{ \left[\int \sigma_\beta \left(\phi'_\beta + \sum_{j=1}^3 u_j x_j \right) - \sigma_0 \phi'_\beta \right] d\tau + \sum \left[m_\beta \left(\phi'_\beta + \sum_{j=1}^3 u_j x_j \right) - m_0 \phi'_\beta - \sum_{j=1}^3 \mu_j (v'_{0j} - u_j) + \sum_{j=1}^3 u_{0j} v_{\beta j} \right] \right\} + M_{jL}(v-u) \quad (2.2.16)$$

式中假设 $\phi_0 = \phi'_0 + \phi''_0$, ϕ'_0 表示固有的外部奇点和其他边界运动的外部奇点引起的成分, ϕ''_0 为由固有的外部奇点和边界运动等在物体内部所构成的映象奇点所引起的成分。同样, 由物体的运动所引起的成分 ϕ_β , 也假设为 $\phi_\beta = \phi'_\beta + \phi''_\beta$, ϕ'_β 为物体内部的奇点所引起的成分, ϕ''_β 为由物体外部的奇点所引起的成分。 σ_0, m_0, μ_0 对应于 ϕ_0 ; $\sigma_\beta, m_\beta, \mu_\beta, v_\beta$ 对应于 $u_\beta \phi_\beta$, v'_0 对应于 ϕ'_0 。 $M_{iL}(v-u)$ 是在动座标系中用相对速度而得到的定常流的拉格利力矩, 式(2.2.15)、(2.2.16)是一般化了的拉格利力矩。

举例如下:

半径为 a 的球 A , 从静止的半径为 b 的球 B 处, 以速度 $u(t)$ 运动, 并越走越远时, 试求 A 的附加质量和作用于 A 的流体动力。

把 $\mu_0 = \frac{1}{2}ua^3$ 的偶极子放在 A 的中心, 由于 μ_0 在 B 内产生的映象偶极子是 $\mu_1 = -\frac{b^3}{c^3}\mu_0$

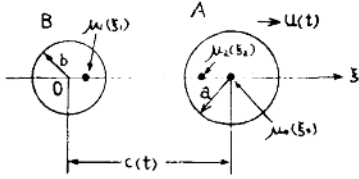


图 4

$$= -\frac{ua^3b^3}{2c^3}, \xi_0 - \xi_1 = c - \frac{b^2}{c}, \text{ 由于 } \mu_1 \text{ 在 } A \text{ 内产生的映象偶极子是 } \mu_2 = -\frac{a^3}{(\xi_0 - \xi_1)^3} \mu_1 = \frac{ua^6b^3}{2(c^2 - b^2)^3}, \xi_2 - \xi_1 = \left(c - \frac{b^2}{c}\right) - \frac{a^2c}{c^2 - b^2} \text{ ①}$$

试以到此第二映象 μ_2 为止的近似, 来考虑流场。

根据式 (2.2.9), A 的附加质量, σ_a 、 m_a 没有, 而 μ_a 有对应于 A 内奇点的单位流速的 $\frac{\mu_0}{u}$ 、 $\frac{\mu_2}{u}$ 。从而

$$A_{11} = 4\pi\rho\left(\frac{\mu_0}{u} + \frac{\mu_2}{u}\right) - B_{11} = \frac{2}{3}\rho\pi a^3\left[1 + \frac{3a^3b^3}{(c^2 - b^2)^3}\right]$$

求出对于内部奇点 μ_0 、 μ_2 的外部奇点 μ_1 所引起的诱导速度 v'_0 、 v'_2 , 根据式 (2.2.13) 求作用于 A 的流体动力, 可写成下式

$$F_1 = -\frac{d}{dt}(uA_{11}) - 4\pi\rho\left(\mu_0\frac{\partial v'_0}{\partial \xi} + \mu_2\frac{\partial v'_2}{\partial \xi}\right) = -\frac{d}{dt}(uA_{11}) - \frac{6\pi\rho u^2 a^6 b^3 c}{(c^2 - b^2)^4} - \frac{6\pi\rho u^2 a^6 b^6 c}{(c^2 - b^2)^3 (\xi_2 c - b^2)^4}$$

2.3 契尔托克公式

阐明流体动力和奇点关系的是拉格利定理, 用这个定理时, 必须知道流场的全部奇点。可是, 物体是以速度 u 、角速度 ω 来运动的, 设流体之速度为 v , 在固连于物体的动坐标系 $O-x$ 上, 设速度势为 $\phi(x, t)$, 则根据式 (2.2.3), 流体中的压力可由下式给出:

$$\frac{p}{\rho} = \phi_t - \frac{1}{2}(u \cdot u + v \cdot v) + v \cdot (u + \omega \times x)$$

u 、 v 、 ω 远小于 ϕ_t , 在用

$$p = \rho\phi_t$$

能够近似情形下, 就不可解拉格利定理和绕射 (diffraction) 问题, 而可以根据契尔托克的方法, 比较简单地求得流体动力。

假设在无限流体中有表面为 S 的物体, 在物体外部的 $P(\xi)$ 点上有非常数的奇点, 照下式把速度势 $\phi(x, t)$ 分解成三个部分:

$$\phi(x, t) = \varphi_I(x, t) + \varphi_B(x, t) + \varphi_C(x, t) \quad (2.3.1)$$

φ_I 表示由不存在物体情况下的奇点 P 引起的势, φ_B 表示不存在奇点 P 的情况下仅由物体运动所

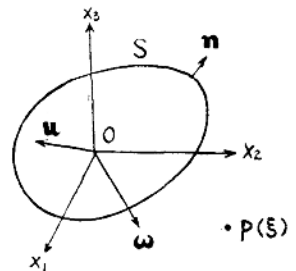


图 5

① 原文等式右边圆括弧右上角多一个 '2' ——译者。

引起的势, φ_c 作为表示两者相互影响的势。假设这些势满足如下条件:

$$\left. \begin{aligned} [\varphi_I] \quad & \nabla^2 \varphi_I = 0 \quad \text{除 } \mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}(t) \text{ 之外} \\ & |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| |\varphi_I| < M_1 < \infty \quad \text{当 } |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| \rightarrow \infty \text{ 时} \\ [\varphi_B] \quad & \nabla^2 \varphi_B = 0 \quad \text{在 } S \text{ 的外部} \\ & |\mathbf{x}| |\varphi_B| < M_2 < \infty \quad \text{当 } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \text{ 时} \\ [\varphi_C] \quad & \nabla^2 \varphi_C = 0 \quad \text{在 } S \text{ 的外部} \\ & |\mathbf{x}^2| |\varphi_C| < M_3 < \infty \quad \text{当 } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \text{ 时} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.2)$$

M_1, M_2, M_3 是与 \mathbf{x} 无关的常数。

根据式(2.1.2), 物体表面上的条件为:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} (\varphi_I + \varphi_B + \varphi_C) = -\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \equiv -h(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{x}) \quad \text{在 } S \text{ 上}$$

$$\text{亦即} \quad \frac{\partial \varphi_C}{\partial n} = h - \frac{\partial}{\partial n} (\varphi_I + \varphi_B) \quad \text{在 } S \text{ 上} \quad (2.3.3)$$

$\partial/\partial n$ 表示物体表面 S 的法线方向的微分。

作用于物体的力和力矩, 可表为沿如下的物体表面的压力积分

$$F(t) = - \int_S f(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}, t) dA \quad (2.3.4)$$

式中令 \mathbf{l}_j 为 x_j 轴方向的单位向量, 则 $f(\mathbf{x})$ 可由下式给出:

$$\text{在求 } j \text{ 方向力的时候} \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{l}_j$$

$$\text{在求绕 } j \text{ 轴的力矩时} \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_j \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{n})$$

这里, 考察如下的势 φ

$$\left. \begin{aligned} [\varphi] \quad & \nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{在 } S \text{ 的外部} \\ & |\mathbf{x}|^2 |\varphi| < M_4 < \infty \quad \text{当 } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \text{ 时} \\ & \frac{\partial \varphi}{\partial n} = f(\mathbf{x}) \quad \text{在 } S \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.5)$$

把式(2.3.4)改写成为下列形式

$$F(t) = \int_S f(\mathbf{x}) [\rho \phi_t] dA = \varphi \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} (\varphi_{It} + \varphi_{Bt} + \varphi_{Ct}) dA \quad (2.3.6)$$

在用无限大的球面 Σ 和物体表面 S 所包围的范围中, φ, φ_C 都是调和函数, 对此运用格林定理, 根据所假定的势的性质, Σ 上的积分即将消除, 并可得如下关系式

$$\int_S \varphi_{Ct} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dA = \int_S \varphi \frac{\partial \varphi_{Ct}}{\partial n} dA \quad (2.3.7)$$

把式(2.3.3)、(2.3.7)代入式(2.3.6), 可得下式:

$$F(t) = \rho \int_S \left[(\varphi_{It} + \varphi_{Bt}) \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} (\varphi_{It} + \varphi_{Bt}) \right] dA - \rho \int_S \varphi h_t dA \quad (2.3.8)$$

考虑 φ_I 具有奇异性的 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ 的周围半径为 e 的小球面 S_I , 在 S_I, S, Σ 所包围的范围中, $\varphi, \varphi_I, \varphi_B$ 是调和函数, 因而运用格林定理, 那就同前面一样, Σ 上的积分即将消除, 式(2.3.8)成为如

下形式。

$$F(t) = -\rho \int_{S_I} \left[(\varphi_{It} + \varphi_{It}) \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} (\varphi_{It} + \varphi_{It}) \right] dA - \rho \int_S \varphi h_i dA \quad (2.3.9)$$

特别对物体静止情况，可得到下列的简单关系式：

$$F(t) = -\rho \int_{S_I} \left(\varphi_{It} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \varphi_{It}}{\partial n} \right) dA \quad (2.3.10)$$

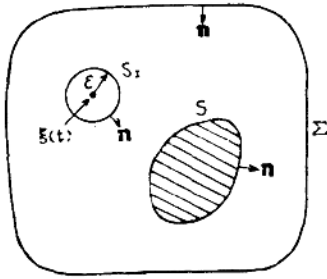


图 6

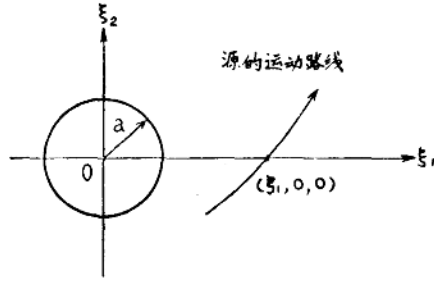


图 7

举例如下：

当半径 a 的球处于静止，强度 $\sigma(t)$ 的源运动着的情况下，试求作用于球的力
在式(2.3.10)中，设 S_I 的半径为 $\epsilon \rightarrow 0$ ，则

$$F(t) = \rho \dot{\sigma}(t) \varphi(\xi) + \rho \sigma(t) [\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \varphi(\xi)] \quad (2.3.11)$$

式中源是在 $\mathbf{x} = \xi(t)$ 处， $\mathbf{v}(t) = \partial/\partial t \xi(t)$ ，并假设所考察的瞬间 $\xi = (\xi_1, 0, 0)$ 。

为求 j 方向的力，只要在式(2.3.5)中设定 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I}_j$ ，则 φ 就成为球以单位速度向 j 方向前进时的扰动势，所以可用下式给出：

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \frac{a^3 x_j}{2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \quad (2.3.12)$$

把式(2.3.12)代入式(2.3.11)，用 $\xi = (\xi_1, 0, 0)$ ，则作用于球的 j 方向的力就成为如下的式子

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \frac{-\rho a^3 \dot{\sigma}(t)}{2\xi_1^2(t)} + \frac{\rho a^3 \sigma(t) \xi_1(t)}{\xi_1^3(t)} \\ F_2(t) &= -\frac{\rho a^3 \sigma(t) \xi_2(t)}{2\xi_1^3(t)} \\ F_3(t) &= -\frac{\rho a^3 \sigma(t) \xi_3(t)}{2\xi_1^3(t)} \end{aligned}$$

3. 附加质量

附加质量可定义为包含质量的种种物理量在真空中的值和流体中的值之差；而作为物理量的，可认为是惯性力、动能、振动周期等等。如果是理想流体，在既无外部边界亦无外部奇点的无限流体中，由上述物理量所定义的附加质量，都具有相同的值，但若存在某个作为一种边界的自由表面的情况，那就分别取各个不同的值。从而，在操纵性运动的计算中，采用由哪个定义来得

出的附加质量, 就成为一个问题。若把质量的定义看作是真空中惯性阻力的比例系数, 则运动方程式中的质量项就应用由惯性力来定义的附加质量, 但用其他定义的附加质量, 也有其方便之处。

在本章中, 首先论述无限流体中附加质量的性质和粘性的影响, 其次讲述根据存在自由表面时所定义的附加质量差额和自由表面的影响, 最后讲讲关于在实际运动计算中是怎样来应用的。

3.1 无限流体中的附加质量

考察如下两种情况。

(1) 在 $t = 0$ 的瞬间, 物体以速度 \mathbf{u}_0 、加速度 $\dot{\mathbf{u}}_0$ 、角速度 $\boldsymbol{\omega}_0$ 而运动; 周围的流体对于固连于物体的动坐标系, 在 $t = 0$ 的瞬间, 速度成为 \mathbf{v}_0 、加速度为 $\dot{\mathbf{v}}_0$ 、压力为 p_0 。这时欧拉的运动方程式为

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_0 + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho} \nabla p_0 \quad (3.1.1)$$

(2) 以往, 对于与(1)完全相同的运动过程而来的物体, 假设在 $t = 0$ 的瞬间只有加速度和角加速度变化为 $\dot{\mathbf{u}}_0 + \dot{\mathbf{u}}_0$ 、 $\boldsymbol{\omega}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_0$, 而结果在 $t = 0$ 的瞬间, 流体的加速度为 $\dot{\mathbf{v}}_0 + \mathbf{v}$, 压力成为 $p_0 + p$, 则欧拉的运动方程式为:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_0 + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho} \nabla (p_0 + p) \quad (3.1.2)$$

根据式(3.1.1)、(3.1.2), 由物体的加速度、角加速度的变化, 在流体中所产生的压力和加速度的关系, 可由下式给出:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p = -\frac{1}{\rho} \text{grad}(p) \quad (3.1.3)$$

对这个非常数压力 p , 沿物体表面积分的结果, 就是由附加质量所引起的惯性力。式(3.1.3)表示 p 是势函数, 从而, 在单连域中, 若已知边界条件, 也就决定了 p 。边界条件在无限远处是加速度变化为 0, 在物体表面上, 加速度变化的法线分量, 就物体与流体来说两者是相等的, 故设 $\mathbf{n} = (l, m, n)$ 为法线的单位向量, 则

$$\mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \times \mathbf{x}\right) = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{n} \cdot \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p\right) \quad (3.1.4)$$

由上式可知, 压力 p 是加速度和角加速度的一次函数, 由附加质量引起的惯性力, 是加速度与角加速度之比。而且, 边界条件仅仅取决于物体的形状及加速度、角加速度, 而不包含速度、角速度及运动路径等等。因而, 在无限流体中的附加质量取决于物体形状。

在式(3.1.3)中, 设定 $p = \rho \partial \phi / \partial t$, ϕ 也是势函数, 把这个式子代入式(3.1.3)中, 并进行积分, 则

$$\mathbf{v} = -\nabla \phi \quad (3.1.5)$$

也就是说, 式(3.1.3)的运动是由势 ϕ 所导得的势流, 这时的压力分布, 可提出为 $p = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$ 。

例如

当物体以 $u(t)$ 的速度沿 x 方向前进时, 速度势可表示为

$$\phi = \phi_1(x, y, z)u(t)$$

的形式, 压力为

$$p = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \rho \phi_1 \partial u / \partial t$$

从而惯性阻力为

$$M' \frac{\partial u}{\partial t} = \int \rho p dS = \int \rho \phi_1(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial t} dS = \rho \frac{\partial u}{\partial t} \int \phi_1 dS$$

$$\therefore M' = \rho \int \phi_1 dS$$

动能为

$$\frac{1}{2} M'' u^2 = \frac{\rho}{2} \int \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \frac{\rho}{2} \int \phi_1 u \frac{\partial \phi_1}{\partial n} u dS = \frac{1}{2} \rho u^2 \int \phi_1 dS$$

$$\therefore M'' = \rho \int \phi_1 dS$$

由惯性力、动能两个方面所定义的附加质量, 在无限流体中是一致的。

其次, 再考虑粘性流体的情况。同在理想流体的情况下一样, 可就(1)(2)两种运动来考虑。

对于(1)的纳维尔-斯托克斯公式为

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)_0 + (\rho \mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = \rho \mathbf{K} - \nabla p_0 + \mu \nabla^2 \mathbf{v}_0 \quad (3.1.6)$$

对于(2)为

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)_0 + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\rho \mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = \rho \mathbf{K} - \nabla (p_0 + p) + \mu \nabla^2 \mathbf{v}_0 \quad (3.1.7)$$

从式(3.1.7)减去式(3.1.6), 即成

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p$$

这与理想流体中的式(3.1.3)是完全一样的, 尽管是在粘性流体中, 由新的物体的加速而形成的加速度分布也可由一个势导出, 压力分布表示为势函数。

在粘性流体中, 物体所受的力有由压力引起的力和剪切力, 因为剪切力是取决于速度分布的形状的, 而与该一瞬间的加速度无关, 所以它对于由惯性力定义的附加质量不产生影响。只要边界条件相同, 压力分布就与理想流体下的情况相同。如果有自由表面, 边界条件就不同了, 但那也是因粘性而波形不同的二次影响, 故可以近似地认为粘性对附加质量没有影响。

3.2 存在自由表面时的附加质量

物体以速度 u 、加速度 \dot{u} 在流体中运动时的阻力为 R , 把 R 分解为包含加速度 \dot{u} 的项 R_1 , 和不包含加速度 \dot{u} 的项 R_2 来考虑,

$$R = R_1(\dot{u}, u, t) + R_2(u, t) \quad (3.2.1)$$

R_1 作为与加速度成比例, 若写成 $R_1(\dot{u}, u, t) = m'(u, t)\dot{u}$, 则运动方程式就成为 $\{m + m'(u, t)\}\dot{u} + R_2(u, t) = F$, 而作表观质量为 $m + m'$ 的运动。这种由惯性力来定义的附加质量 m' , 在有自由表面时, 也像下面所示, 可以近似地看成常值, 而与速度及运动过程无关。

设波面为 $z = h(x, y, t)$, 在自由表面上, 由于压力是常值, 所以

$$\frac{v^2}{2} + gh + \frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{常数} \quad \text{在 } z = h \text{ 处} \quad (3.2.2)$$

① ② 原文 M' 及 M'' 的等号右侧均遗漏 ρ ——译者。

在 $t = 0$ 时, 是 $v_0, h_0, \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0$, 假设在 $t = 0$ 的一瞬间, 对物体加速, 由此, 形成 $\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0 \rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0 + \frac{\partial\phi}{\partial t}$. 这个 $\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0$ 是由于加速度而产生了的变化部分, 由于这一瞬间 v_0, h_0 并未变化, 根据式 (3.2.2), 就构成 $\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$. 也就是说, 由于重新加速, 在自由表面上所产生的非定常压力是 $p = \rho \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$.

因此, 在求具有自由表面的惯性力所定义的附加质量时, 只要求出满足物体表面边界条件的式 (3.1.4) 和满足在自由表面 $z = h$ 处 $p = 0$ 的边界条件的势函数 ϕ 就可以了. 自由表面条件在 $z = h$ 处一定要满足, 但因为波面 h 是根据到那时为止的运动过程而变化的, 所以附加质量也要随着波面的变化而变化. 但是, 和兴波理论的线性近似一样, 波高 h 当作很小, 用 $z = 0$ 使近似地满足自由表面条件 $p = 0$, 积分范围也取到 $z = 0$ 为止, 所变化的仅是物体表面的边界条件, 附加质量同速度和运动过程无关, 而成为常值.

现在来研究有关像图 8 那样对 $z = 0$ 平面的映象模型. 设若把由 $z < 0$ 部分的扰动势的分量当作 $\phi_0(x, y, z, t)$, 那么整个扰动势 ϕ_r 就可以表示为

$$\phi_r(x, y, z, t) = \phi_0(x, y, z, t) + \phi_0(x, y, -z, t) \quad (3.2.3)$$

其次, 考虑到

$$\phi_R(x, y, z, t) = \phi_0(x, y, z, t) - \phi_0(x, y, -z, t) \quad (3.2.4)$$

的势 ϕ_R , 这就成为对于 $z = 0$ 平面的逆映象模型的扰动势. 这个 ϕ_R 在 $z = 0$ 处构成

$$\left. \frac{\partial\phi_R}{\partial t} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial\phi_0}{\partial t} \right|_{z=0} - \left. \frac{\partial\phi_0}{\partial t} \right|_{z=0} = 0 \quad (3.2.5)$$

成为 $z = 0$ 处的非定常压力 $p = 0$ 的条件. 由此可知, 由有自由表面时的惯性力来定义的附加质量, 就是逆映象效应.

其次, 再来研究物体周期性运动的情况. 这时候, 在与当时加速度 \ddot{u} 无关的阻力 R_2 中, 形式上变成为与当时加速度成比例形式, 就由兴波和碎波现象表现出来.

例如使物体作定常振动. 把 R_2 分解为与物体的速度具有同相位的和与位移具有同相位的两部分, 设 $R_2(\dot{x}, x, t) = K_1\dot{x} + K_2x$, 那么真空中的运动方程式即变成为

$$m\ddot{x} + kx = F \sin \omega t \quad (3.2.6)$$

在流体中的运动方程式则成为

$$(m + m')\ddot{x} + K_1\dot{x} + (K_2 + k)x = F \sin \omega t \quad (3.2.7)$$

自由振动衰减了, 仅有强迫振动, 并且因为 $\ddot{x} = -\omega^2 x$, 把它代入上式, 可以写成

$$(m + m' - K_2/\omega^2)\ddot{x} + K_1\dot{x} + kx = F \sin \omega t \quad (3.2.8) \textcircled{1}$$

质量看成为 $m + m' - K_2/\omega^2$. 又真空中无阻尼自由振动的周期是 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, 若取圆频为 ω , 则

① 原文等号左第一项误写为“ $(m + m' - K_2/\omega_2)\ddot{x}$ ”——译者.

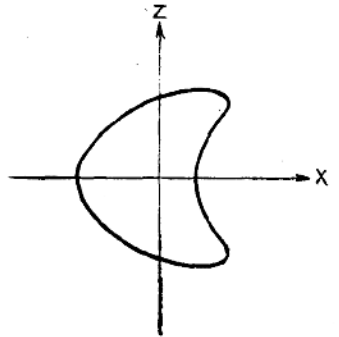


图 8