複式變換齒輪與分度問題

工具機手册　第八册

金屬工業發展中心　編譯

複式變換齒輪與分度問題

工具機手冊　第八冊

張　清　[illegible]　譯

中華民國六十八年十一月出版

工具機手冊之(八)

複式變換齒輪與分度問題

編譯者　金屬工業發展中心
發行者　經濟部國際貿易局
印　刷　富進印書有限公司

前　　言

我國工具機製造，近年來各機種不論在產量和品質上，都有長足的進步，與國外各廠產品，已可媲美，且已大量出口。經濟部國際貿易局鑑於唯有改進產品品質，始可保持已有的市場和進一步拓展外銷，乃于民國六十七年十二月委託本中心編撰工具機手冊約四十冊，內容包括切削加工工具機的製造技術、沖壓模具、塑膠模具、壓鑄技術、鑄造技術、熱處理、表面處理、控制系統等，提供有關本業工廠技術員工參考，希冀由本手冊的刊行，能解答工廠中一部份所遭遇的問題；至於有關工具機書籍已刊載的內容，在本手冊中不再贅述，謹於篇首，簡介如上，至於編撰時間倉促，容有不週，尚祈不吝指正！

序　言

在許多機器的正確功能上，變換齒輪仍扮演着重要的角色。除了螺紋切削與鏟齒車床外，一些拆換 (Pick-off) 齒輪，對齒輪的滾製、滾刀的研磨，以及在銑製及研磨蝸桿、滾齒刀及螺旋滾刀等工作，都是很主要的。同時變換齒輪也常使用在差動分度法。

你在不久的將來若需要安排一些以前在製造商手冊裡，或常用設計變換齒輪手冊裡，無法找到，但與某些機器或程序有關係的變換齒輪組合。在許多的情形，其最後採用的組合，僅是一個近似於所要求的比值組合，偶而會使用到一些要另行製造且不常用的齒數齒輪，乃是不可避免的，參閱本手冊即可獲得滿意的解答。

本冊在說明，使用許多代數或模擬法，以找尋一種適當的複式齒輪組合，以配合所給予的比值。更以機械工廠的實例，提示完整的工作例題的數據，並加以說明。它還特別以一種廣泛的形式，來介紹變換齒輪；同時，它也可以幫助一些已有經驗的人士，特別是為了解決一些需用特別精確的變換齒輪的問題。

這些方法，並非是作者獨創的，而是 *作者過去多年處理的經驗，以及由很多來源所獲得的結果。

* 本冊譯自Machinery's Yellow Back Series N. W. Hardy 原著 Compound change gear and indexing problems.

總　論

在大部分現代的螺紋切削車床，均附有兼能切削公制及英制徑節的變換齒輪的齒輪箱；因此主要旋轉的工作，如同往昔不會遭到變換齒輪的問題。工程師們都知道如何使用簡單或複雜的比值，甚至不常遇到的問題，也能求出所需的變換齒輪組合。

當然，在任何特殊的機器上，對特殊的比值的變換齒輪的齒數搭配製造的方法，也同樣的可應用於解決任何類型機械工具或其他機器上的變換齒輪齒數比。**（以下簡稱變換齒輪比）**

我們在處理困難的齒數比時，通常都可先由一些已有的資料，或在一些列有複式變換齒輪比表的書中去查閱。

計算以前，首應參考這些表格，希能查出所需的比值，或其誤差值是否在允許的範圍之內，若超出允差只有另行計算出來。

下列的數據表，可以節省我們計算時間的，可加以參考應用。

1. 比值與其倒數。
2. 質數與因數表。
3. 齒數比與其等值小數（含任何成對的變換齒輪）。
4. 齒數比的六位對數表（可在機械手冊上查到）。

一般在實際情況，都儘量避免使用任何特殊的變換齒輪組合；如使用所擁有齒輪裡的最大或最小的允許中心距，最大的外徑。這些限制，均可使用雙列或三列齒輪系列來克服，或利用特殊徑節的特殊變換齒輪來解決。

通常經由特別計算方法所得的結果，常不被採用，但却可由其中發覺到其他的組合。同時這些結果也不可能決定特殊操作所需的精度。因此，能够使用有較多的近似方法，由其中選取我們所尋求的，那是有裨益的。

下面幾章所列舉的一些方法，有些是我們所熟知的，也有些對我們是很陌生的。

當然，計算尺可使用於找出一對齒輪的近似齒數比，和這一比值很的多成對的齒輪。

本書的目的，是在探討一些複式變換齒輪比值表裡，無法找出的各種適當齒數比及求出應選用的齒輪齒數的方法。

目　　錄

頁次

第　一　章

車床的變換齒輪比

在車床上所稱之齒數比 (Gear ratio)，郎爲欲製造的工件螺牙導程與車床導螺桿導程的比值。通常用下列的任一形式表示它：

$$\frac{\text{主動件}}{\text{從動件}}=\frac{\text{被切削物上螺牙之節距}}{\text{導螺桿之節距}}\text{或}=\frac{\text{導螺桿上每吋之牙數}}{\text{被切削物上每吋之牙數}}$$

以上假設工件及導螺桿均爲單線 (Single-start) 螺紋。

對于一複式或三系列之變換齒輪，其次序可以任意的安排，只要主動仍保持爲主動，從動齒輪仍保持爲從動齒輪。

例如：如欲在一具有每吋 4 牙之導螺桿（郎¼吋節距）的車床上，切削一條1/14吋節距（郎每吋14牙）的螺紋。

則$\frac{\text{主動件}}{\text{從動件}}=\frac{1/14}{1/4}=\frac{4}{14}$，乘以$\frac{5}{5}=\frac{4\times5}{14\times5}=\frac{20}{70}$。

因此20齒的齒輪置於心軸柱栓上，而70齒的齒輪裝在導螺桿上，此二軸之間，可以以一適當的中間齒輪，懸裝在可搖動的支架上，以連接此二軸的傳動；亦可使用一對相同的齒輪形成複式組合。

單一中間輪或惰輪，其結果對於比值並無影響，僅與其相對的旋轉方向有關；現在考慮另一種較複雜的問題：

如欲在一具有每吋 4 牙導螺桿的車床上，車製一節距爲0.3797之螺牙。

則$\frac{\text{主動件}}{\text{從動件}}=\frac{0.3797}{0.25}=1.5188$

則變換齒輪比之表裡將考慮以1.5188或其倒數表示。若未列有此數，則須取最接近的近似值，依下面幾種方法計算，並比較其結果。

第一種方法：使用計算尺

使用計算尺的C及D尺，將0.3797除以0.25，然後固定C及D尺

，移動游標尺上的對準線，注意其對應之對數值，如此最佳近似者有：38/25，41/27，44/29，76/50，79/52，82/54，85/56及88/58。這些分數中之分子及分母，代表著給予的變換齒輪比之各種不同精度範圍的齒輪齒數，將其轉換算成小數值，來核對其準確度即與1.5188數值差異的大小：

(1) $\frac{38}{25}=1.520$　　(5) $\frac{79}{52}=1.519231$

(2) $\frac{41}{27}=1.\dot{5}1\dot{8}$　　(6) $\frac{82}{54}=1.\dot{5}1\dot{8}$

(3) $\frac{44}{29}=1.517241$　　(7) $\frac{85}{56}=1.517857$

(4) $\frac{76}{50}=1.520$　　(8) $\frac{88}{58}=1.517241$

由上很容易看出來(2)及(6)的解答相同，且也是最為精確，其誤差值僅為1.5188－1.518519，或－0.000281。

縱使對某些類型的短期工作，此結果已相當精確，然而我們進一步的以其他方法尋找1.5188之比值的，來比較其結果。

第二種方法：使用連續分數法

連續分數法可用來解答更複雜之比值。以下說明，是用來幫助不熟悉連續分數法的工程師們，使用正確的方法獲得和原先的分數或比值的近似值。

將比值1.5188之小數部份轉換為分數，形成 $1+\frac{5188}{10000}=$

$1+\frac{1297}{2500}$，其中1297為一不可再分解的質數。

首先處理小數部份$\frac{1297}{2500}$，首將分母除以分子，即

```
1297)2500(1
      1297
      1203
```

然後除數1297被除數1203除之，則得另一步驟的連續分數，其演算程序如下：

```
1297)2500(1
      1297
      ----
      1203)1297(1
           1203
           ----
             94
```

同理，繼續以前一個除數1203被餘數94除之，且應用輾轉相除法演算到無餘數時爲止，其完整系列的分商數(Partial Quotiens)如下：—

```
1297)2500(1
      1297
      ----
      1203)1297(1
           1203
           ----
             94)1203(12
                 94
                ---
                263
                188
                ---
                 75)94(1
                    75
                    --
                    19)75(3
                       57
                       --
                       18)19(1
                          18
                          --
                           1)18(18
                             18
                             --
                             ..
                           =====
```

爲了工作的方便及空間的利用，其過程可書寫如下：此方法可應用在以後所有的例子裏。下面括號中的數字，表示演算過程中所得的分商數的次序。

```
(2)  1   1297      2500    1  (1)
         1203      1297
         ----      ----
(4)  1     94      1203   12  (3)
           75      1128
         ----      ----
(6)  1     19        75    3  (5)
           18        57
         ----      ----
            1        18   18  (7)
                     18
         ----      ----
                     ..
                   ----
```

所得分商數，1，1，12，1，3，1及18，將應用來得到所要求比值的近似值分數，此近似值分數在術語上稱爲收斂數（Convergents）。

此法之演算如下：

首先書寫分數 0/1，然後在第一個分商數下，寫下另一個分數，通常爲1比第一個商數，形成$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{1}$，再和已得到的分商數，組合如下：

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) \\
0 & 1 & 1 & 12 & 1 & 3 & 1 & 18 \\
\hline
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & & & & & &
\end{array}
$$

再下面的收斂數的分子，爲前一個收斂數的分子乘以下一個分商數（在此例仍爲1），且加上第一個分數的分子0，即$(1\times1)+0=1$。同樣的過程，分母可由前面一個收斂數的分母，乘以分商數1，且加上第一個分數的分母1；即$(1\times1)+1=2$。

再下面的收斂數的分子，可由新得的收斂數的分子，乘以分商數12，且加上前面的分子1而得之；即$(12\times1)+1=13$。分母可由前面得之的分母，乘以12，且加上前面的分母1；即$(2\times12)+1=25$。

這些再得到的收斂值，可依次書寫在其相對應的商數之下；即

$$
\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 1 & 12 & 1 & 3 & 1 & 18 \\
\hline
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{13}{25} & & & &
\end{array}
$$

剩餘的分商數，如同前面的處理，可得到一完整系列的收斂值如下：

$$
\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 1 & 12 & 1 & 3 & 1 & 13 \\
\hline
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{13}{25} & \frac{14}{27} & \frac{55}{106} & \frac{69}{133} & \frac{1297}{2500}
\end{array}
$$

若此計算過程是正確的話，則其最後一個分數值，正好等於其最列的比值。

所得收斂值中的$\frac{69}{133}$，爲最接近最初分數$\frac{1297}{2500}$的近似值。

因此，轉換成齒數比爲：

$$1.5188=1+\frac{69}{133}=\frac{202}{133}=\frac{2\times101}{7\times19}=\frac{20\times101}{70\times19}\text{或}\frac{40\times101}{70\times38}$$

而這些齒輪比1.518797的誤差爲－0.000003，此值幾乎可適合所有實際的要求。

再次一個收斂值爲$\frac{55}{106}$，它代表的分數爲$\frac{161}{106}=\frac{7\times23}{2\times53}=\frac{70\times23}{20\times53}$ $=1.518868$，其誤差爲＋0.000068。

若考慮收斂值14/27，其代表分數則爲41/27，它適合將變換齒輪再配合一個中間齒輪連接，或用一對相同的齒輪成爲複式的；即$\frac{41\times50}{27\times50}$。其結果比值爲$1.5\dot{1}\dot{8}$，誤差爲－0.000281。

採用愈前面的收斂值，則誤差愈大，故對每一特殊的零件，必須依其所給予的精度來選擇收斂值，且明瞭所採用的收斂值，可能產生正或負的誤差。

第三種方法，對最初比值稍加修飾：

最初的比值$\frac{3797}{2500}$中的3797爲質數，因此必須在儘可能的維持其精度範圍下，加以修飾。

一個取最接近於原先比值的一個簡單分數去修飾它；本例中所採用的是$\frac{38}{25}$，演算如下：

$$\frac{3797+38}{2500+25}=\frac{3835}{2525}$$

或$$\frac{3797-38}{2500-25}=\frac{3759}{2475}$$

分解因數：

$$\frac{3835}{2525}=\frac{65\times59}{25\times101}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(a)}$$

及$$\frac{3759}{2475}=\frac{21\times179}{25\times99}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(b)}$$

在(b)式中，179爲一質數，且一個具有179齒的齒輪太大，除非是使用一對較小齒節的齒輪，因此一般當選擇(a)式所給予的齒輪組。

此組合給予的比值爲1.518812，其誤差爲1.518812－1.5188＝＋0.000012，此值在應用上，應可接受。

第四種方法，倒數法：

通常用倒數比可獲致更精確的結果。本例中其倒數爲：—

$$\frac{1}{1.5188}=0.6584145=\frac{6584145}{10000000}。$$

更利用輾轉相除法，可得如下之一系列的分商數：

(2)	1	6584145	10000000	1	(1)
		3415855	6584145		
(4)	12	3168290	3415855	1	(3)
		247565	3168290		
		692640	247565	1	(5)
		495130	197510		
(6)	3	197510	50055	1	(7)
		150165	47345		
(8)	17	47345	2710	2	(9)
		2710			
		20245			
		18970			
(10)	7	1275	2550		
		1120	160	1	(11)
(12)	31	155	155		
		155	5		
		‥			

由步驟(1)至(12)所得之分商數，可計算得之一組完整的收斂值如下：

1	1	1	1	12	1	3	1	17	2	7	1	31
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{25}{38}$	$\frac{27}{41}$	$\frac{106}{161}$	$\frac{133}{202}$	$\frac{2367}{3595}$	$\frac{4867}{7392}$	$\frac{36436}{55339}$	$\frac{41303}{62731}$	$\frac{1316829}{2000000}$

最接近於最初分數之近似值爲收斂值$\frac{41303}{62731}$，然此分數，不適於分解因數，故必須加以修飾。

一個適當的分數，可借收斂值2538，將分子加上25，分母加上3而獲得。

（在收斂值中之任何一個，如$\frac{2}{3}$，$\frac{27}{41}$，$\frac{106}{161}$及$\frac{133}{202}$，可同樣供給獲得易於分解因數的分數）。

使用25及38加到分數$\frac{41303}{62731}$上，變成$\frac{41303+25}{62731+38}=\frac{41328}{62769}$，其分解因數成$\frac{48\times21\times41}{21\times49\times61}=\frac{48\times41}{49\times61}$。

對倒數法所獲得最接近的近似值的這些因數或變換齒輪比的倒分數$\frac{49\times61}{48\times41}$，就是所需要的比值或齒數。

比較變換齒輪比值$\frac{49\times61}{48\times41}=1.5188008$的精確度，其誤差爲

1.5188008－1.5188或＋0.0000008；此結果對於任何切削操作的精密螺紋，均有極佳的精密度。

在這四種方法所得的結果，列於表１：

表１：比值1.5188

方法	變換齒輪	結果的比值	誤差
計算尺	$\frac{41}{27}$或$\frac{82}{54}$	$1.\dot{5}1\dot{8}$	－0.000281
連續分數	$\frac{40\times101}{70\times38}$	1.518797	－0.000003
連續分數	$\frac{70\times23}{20\times53}$	1.518868	＋0.000068
連續分數	$\frac{41\times50}{27\times50}$	$1.\dot{5}1\dot{8}$	－0.000281
最初分數稍加修正	$\frac{65\times59}{25\times101}$	1.518812	＋0.000012
倒數及連續分數	$\frac{49\times61}{48\times41}$	1.5188008	＋0.0000008

對任何不同安排的變換齒輪，可以參考。

由表中所列結果，可看出以最後的方法，對所需的比值1.5188而言，獲得最適當的齒輪組合，及最精確的結果。

徑節例題：

假設欲在一具有每吋 3 牙的導螺桿之車床上，切削一單線螺桿，以配合具有徑節爲 5 之蝸輪。

蝸輪的當量線節距 (The equivalent liner pitch) 爲 $\frac{\pi}{5}$ 或0.6283吋，且亦卽爲蝸桿之導程。

則 $\frac{\text{主動件}}{\text{從動件}}=\frac{0.6283}{1/3}=1.8849$

在計算尺上，設定C尺上左手邊的指標（或 1），對準D尺上的1.8849，則可移動游標尺的對準線，找出下面幾組較佳的組合：—

$\frac{49}{26}=1.884615$；$\frac{66}{35}=1.885714$ 及 $\frac{98}{52}=1.884615$

同理，若將右手邊之指標（或10），配合上邊之1.8849，則可另找出幾組如下：—

$\frac{115}{61}=1.88525$　　$\frac{164}{87}=1.885057$

$\frac{130}{69}=1.88406$　　$\frac{179}{95}=1.884211$

$\frac{132}{70}=1.885714$　　$\frac{181}{96}=1.885417$

$\frac{147}{78}=1.884615$

以分數 $\frac{164}{87}=\frac{4\times41}{3\times29}=\frac{40\times31}{30\times29}$，爲最近似於 1.8849，其誤差爲 $+0.000157$，而在蝸桿節距上的誤差爲 $\frac{1.88506}{3}-0.6283$，或僅 $+0.00005\dot{3}$ 吋，此結果對一般工作上已十分精確。

連續分數法：

比值1.8849即 $1+\frac{8849}{10000}$ 的分數部份的收歛值，可依如下找出各分商數：

(2)	7	8849	10000	1	(1)
		8057	8849		
(4)	2	792	1151	1	(3)
		718	792		
(6)	1	74	359	4	(5)
		63	296		
(8)	1	11	63	5	(6)
		8	55		
(10)	1	3	8	2	(9)
		2	6		
		1	2	2	(11)
			2		
			..		

則得到如下之收歛值：

0	1	7	1	2	4	1	5	1	2	1	2
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{23}{26}$	$\frac{100}{113}$	$\frac{123}{139}$	$\frac{715}{808}$	$\frac{838}{947}$	$\frac{2391}{2702}$	$\frac{3229}{3649}$	$\frac{8849}{10000}$

選擇最接近最初分數近似值的收歛值$\frac{3229}{3649}$，即比值$1.8849=1+\frac{3229}{3649}$ $=\frac{6878}{3649}=\frac{38\times181}{41\times89}$。

然因 181 爲質數，故須依前例將分數修飾，此處修飾數是收歛數 $\frac{8}{9}$。

如將修分飾之數加上 1；即 $1+\frac{8}{9}=\frac{17}{9}$ 後，形成假分數，再處理所表示的比值則更爲方便。

則分數$\frac{6878}{3649}$可變成如下任何一種形式的結果：