高 等 代 数

习 题 解 答

阜阳师范学院数学系

前　言

"题解"包括了张禾瑞、郝钢新先生编的"高等代数"全部习题，每题均有详解而且有些题目还有数解。

"题解"是在我系领导关怀下，代数组老师的集体产物。它是由教过多遍"高代"的讲师根据自己多年积累的资料初步编成，又经全体同志审阅多遍。我们相信对自学高等代数或在校学习的大学生们一定有所帮助。当然也对教授这门课程的老师提供一些方便。由于水平限制，定有不足之处，甚至还会有错误，诚恳地希望海内方家，批评指正。

"题解"的出版还得到安徽省阜阳印刷厂的大力协助，在此特表示衷心的感谢。

阜阳师院数学系 代数组

一九八一年八月十日

目　　录

第一章　基本概念

习　题　1.1

1、设A是一切数数的集合，B是一切不等于零的有理数的集合，A是不是B的子集？

〔解〕：A不是B的子集，因为$0\in A$ 但$0\bar{\in}B$

2、设　$A=\{1,2,3,4,5\}$ $B=\{5,6,7,8,9\}$。

求　$A\cup B$和$A\cap B$。

〔解〕：由交集和并集的定义，有：

$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$； $A\cap B=\{5\}$

3、设a是集合A的一个元素。$\{a\}$表示什么？写法$\{a\}\in A$对不对？

〔解〕：$\{a\}$表示由单独一个元素a构成的集合。它是A的一个子集。写法$\{a\}\in A$不对。因为$\{a\}$和A都是集合，集合与集合之间是包含关系，而不是从属关系，只能写为$\{a\}\subseteq A$。

4、写出含有四个元素的一切集合的子集。

〔解〕：设$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$是一个含有四个元素的集合，那么它的一切子集分别为：

$\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$\{a_1,a_2,a_3\}$、$\{a_1,a_2,a_4\}$，

$\{a_1,a_3,a_4\}$，$\{a_2,a_3,a_4\}$，$\{a_1,a_2\}$，$\{a_1,a_3\}$，

$\{a_1, a_4\}$，$\{a_2, a_3\}$，$\{a_2, a_4\}$，$\{a_3, a_4\}$，$\{a_1\}$，
$\{a_2\}$，$\{a_3\}$ $\{a_4\}$ 和 ϕ。

{ ϕ表示空集 }。共16个。

5、证明下列等式：

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$。

(ii) $A \cap (A \cup B) = A$。

(iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$。

〔证〕：(i) 设

$$x \in (A \cup B) \cup C \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \cup B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ \\ \text{或} x \in B \end{array} \right\} \\ \\ \text{或} x \in C \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$ 即 $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$

反之若 $x \in A \cup (B \cup C)$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ \\ \text{或} x \in B \cup C \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in B \\ \text{或} x \in C \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (A \cup B) \cup C$$

即 $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$

$\therefore (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(ii) 设 $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap (A \cup B) \Rightarrow$

$A \subseteq A \cap (B \cup C)$ (1)

反之若 $x \in A \cap (A \cup B \Rightarrow x \in A$ 即 $A \cap (A \cup B) \subseteq A$ (2)

由(1)、(2)得 $A \cap (A \cup B) = A$

（iii）若

$$x\in A\cup(B\cap C)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x\in A\\ \text{或}x\in B\cap C\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x\in B\\ x\in C\end{array}\right.\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x\in A\cup B\\ x\in A\cup C\end{array}\right.$$

即$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$，　　（1）

反之　若

$$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x\in A\cup B\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x\in A\\ \text{或}x\in B\end{array}\right.\\ x\in A\cup C\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x\in A\\ \text{或}x\in C\end{array}\right.\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow x\in A\cup(B\cap C)$$

$$(A\cap B)\cup(A\cup C)\subseteq A\cap(B\cup C)\qquad(2)$$

综合（1），（2）得$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

6、设A是含有n个元素的集合。A中含有k个元素的子集共有多少个？

〔解〕共有 $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ 个

习 题 1.2

1、设A是前100个自然数所成的集合。找一个A到自身的映射，但不是满射。

〔解〕设A＝{1,2,3,…，100个}

定义f如下：$1 \longmapsto 2$　$n \longmapsto n$　$n=2,3,\cdots,100$则f即为所求。显然$f(A) \neq A$，故f不是满射。

2、找一个全体实数集到全体正实数集上的1——1映射。

〔解〕设全体实数集为R，全体正实数集为R

令f：　$x \longmapsto e^x$　（对任意$x \in R$）则f即为所求。

〔证〕：（1）因为对$\forall x \in R$都有$f(x)=e^x>0$，所以f是R到R^+上的一个映射。

（2）对$\forall y \in R^+$　取$x=\ln y$　因为$y>0$，所以$x \in R$，且$f(x)=e^x=e^{\ln y}=y$。由此说明f是满射。

（3）再设$\forall x_1,x_2 \in R$　且$x_1 \neq x_2$则$e^{x_1} \neq e^{x_2}$即　$f(x_1) \neq f(x_2)$，所以f是单射，故f是R到R^+的一个1——1映射。

3、f：$x \longmapsto \frac{1}{x}$

是不是全体实数集到自身的映射。

〔解〕f不是全体实数集到自身的映射，因为当$x=0$时（$0 \in R$）。0在f下没有像。

4、设f定义如下：

$$f(x)=\begin{cases} x, & 若x<0; \\ 1, & 若0 \leqslant x<1; \\ 2x-1 & 若x \geqslant 1。\end{cases}$$

f是不是R到R的映射？是不是单射？是不是满射？

〔解〕 f是R到R的映射，因为按照f的定义，对$\forall\ x\in$ R，有唯一确定的$f(x)$与之对应，且$f(x)\in$ R，因此f是R到R的映射。

但f不是单射。因为当$0\leqslant x\leqslant 1$时，恒有$f(x)=1$。

f也不是满射。因当$0\leqslant y<1$时，不存在$x\in$ R 使

$$f(x)=y。$$

5 令$A=\{1,2,3\}$写出A到自身的一切映射。在这些映射中哪些是1——1映射？

〔解〕 A到自身的映射共有廿七个，它们分别是：

f_1: $1\mapsto 1$ $2\mapsto 1$ $3\mapsto 1$ f_2: $1\mapsto 1$ $2\mapsto 1$ $3\mapsto 2$

f_3: $1\mapsto 1$ $2\mapsto 1$ $3\mapsto 3$ f_4: $1\mapsto 1$ $2\mapsto 2$ $3\mapsto 1$

f_5: $1\mapsto 1$ $2\mapsto 2$ $3\mapsto 2$ f_6: $1\mapsto 1$ $2\mapsto 2$ $3\mapsto 3$

f_7: $1\mapsto 1$ $2\mapsto 3$ $3\mapsto 1$ f_8: $1\mapsto 1$ $2\mapsto 3$ $3\mapsto 2$

f_9: $1\mapsto 1$ $2\mapsto 3$ $3\mapsto 3$ f_{10}: $1\mapsto 2$ $2\mapsto 1$ $3\mapsto 1$

f_{11}: $1\mapsto 2$ $2\mapsto 1$ $3\mapsto 2$ f_{12}: $1\mapsto 2$ $2\mapsto 1$ $3\mapsto 3$

f_{13}: $1\mapsto 2$ $2\mapsto 2$ $3\mapsto 1$ f_{14}: $1\mapsto 2$ $2\mapsto 2$ $3\mapsto 2$

f_{15}: $1\mapsto 2$ $2\mapsto 2$ $3\mapsto 3$ f_{16}: $1\mapsto 2$ $2\mapsto 3$ $3\mapsto 1$

f_{17}: $1\mapsto 2$ $2\mapsto 3$ $3\mapsto 2$ f_{18}: $1\mapsto 2$ $2\mapsto 3$ $3\mapsto 3$

f_{19}: $1\mapsto 3$ $2\mapsto 1$ $3\mapsto 1$ f_{20}: $1\mapsto 3$ $2\mapsto 1$ $3\mapsto 2$

f_{21}: $1\mapsto 3$ $2\mapsto 1$ $3\mapsto 3$ f_{22}: $1\mapsto 3$ $2\mapsto 2$ $3\mapsto 1$

f_{23}: $1\mapsto 3$ $2\mapsto 2$ $3\mapsto 2$ f_{24}: $1\mapsto 3$ $2\mapsto 2$ $3\mapsfrom 3$

f_{25}: $1\mapsto 3$ $2\mapsto 3$ $3\mapsto 1$ f_{26}: $1\mapsto 3$ $2\mapsto 3$ $3\mapsto 2$

f_{27}: $1\mapsto 3$ $2\mapsto 3$ $3\mapsto 3$

其中，有f_6，f_8，f_{12}，f_{16}，f_{20}，f_{22}是1——1映射。

6、设a、b是任意两个实数且$a<b$。试找出一个〔0，1〕到〔a，b〕上的|——|映射。

〔解〕集合〔0，1〕和〔a，b〕可分别记为

$A=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$，　$B=\{y\in R \mid a\leqslant y\leqslant b\}$

定义f：　$A\to B$　$x\to(b-a)x+a$

则f是A到B的一个映射。下面将证明f是$A\to B$的|——|映射。

设$\forall y\in B$，取$x=\dfrac{y-a}{b-a}$，$\because a\leqslant y\leqslant b$，$\therefore 0\leqslant\dfrac{y-a}{b-a}\leqslant 1$

即$0\leqslant x\leqslant 1$　　$\therefore x\in A$，且有

$$f(x)=(b-a)x+a=(b-a)\frac{y-a}{b-a}+a=y\ (b-a>0)$$

所以f是满射。

设$\forall x_1$，$x_2\in A$，且$x_1\neq x_2$，　则

$(b-a)x_1+a\neq(b-a)x_2+a$即$f(x_1)\neq f(x_2)$ 因此f是单射。

综上所述知f是|——|映射。

7、举例说明，对于一个集合A到自身的两个映射f和g来说，$f\circ g$与$g\circ f$一般不相等。

〔解〕例如设$A=R$　令f：$R\to R$，$x\to x^2$，g：$R\to R$，$x\to \sin x$　则：$f\circ g$　$R\to R$　$\sin^2 x\to {}^2x$，$g\circ f\ R\to R$，$x\to\sin x^2$

但$\sin^2 x^2\neq\sin x^2$　所以　$f\circ g\neq g\circ f$，

8、设A是全体正实数所成的集合，令

$$f：x\to x\quad g：x\to\frac{1}{x}\quad x\in A$$

（1）g是不是A到A上的|——|映射？（2）g是不是f的逆映射？（3）如果g有逆映射？那么g的逆映射是什么？

〔解〕（i）g是A到A上的1——1映射。因为对$\forall x\in$ A，有$\frac{1}{x}\in$ A且$g(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}=x$，说明$g$是满射。又对$\forall x_1,x_2\in$ A，且$x_1\neq x_2$则$\frac{1}{x_1}\neq\frac{1}{x_2}$，即有$g(x_1)\neq g(x_2)$，说明$g$是单射。故$g$是A到A上的1——1映射。

（2）g不是f的逆映射。因为对$\forall x\in$ A，$x\neq 1$时

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(x)=\frac{1}{x}\neq x，即gof\neq j_A$$

（3）因为对$\forall x\in$ A，有：

$$(gog)(x)=g(g(x))=g(\frac{1}{x}=x$$

$$(gog)(\frac{1}{x})=g(g(\frac{1}{x}))=g(x)=\frac{1}{x}，$$

故g有逆映射，且逆映射与其本身相同。

9、设f：A→B，g：B→C是映射，又令$h=gof$，证明：

(i)如果h是单射，那么f也是单射；

（ii）如果h是满射，那么g也是满射；

（iii）如果f，g都是1——1映射，那么h也是1——1映射，并且

$$h^{-1}=(gof)^{-1}=f^{-1}\cdot g^{-1}。$$

〔证〕：（i）∵f：A→B，g：B→C，$h=gof$

∴h：A→C，对$\forall x_1$，$x_2\in$ A，如$x_1\neq x_2$，则由h是单射可知 $h(x_1)\neq h(x_2)$即：$g(f(x_1))\neq g(f(x_2))$

所以 $f(x_1)\neq f(x_2)$（$f(x_1)$，$f(x_2)\in$ B）。故f是单射。

(ii) 因为l是满射，所以对$\forall z\in c$，有唯一确定的$x\in A$与之对应，使得$h(x)=Z$，而$h(x)=g(f(x))$，所以对于$x\in A$，存在$y\in B$，使$f(x)=y$于是$g(y)=g((f))=h(x)=Z$故g是满射。

(iii) 因为f：$A\to B$，g：$B\to C$，$h=g\circ f$，所以h：$A\to C$。如果f、g都是1——1映射，则$f(A)=B$，$g(B)=C$，因此$h(A)=g(f(A))=g(B)=C$。故h是满射。

又因为对$\forall x_1, x_2\in A$ 若$x_1\neq x_2$则$f(x_1)\neq f(x_2)$。

$g(f(x_1))\neq g(f(x_2))$ 即$h(x_1)\neq h(x_2)$，因而h又是一个单射。所以h是一个1——1映射。

因为f、g、h都是1——1映射，并且对任意$Z\in C$设$y\in B$，使$g(y)=z$，$x\in A$使$f(x)=y$，于是$h(x)=z$并有

$(gof)^{-1}(z)=h^{-1}(z)=x=f^{-1}(y)=f^{-1}(g^{-1}(z))=f^{-1}og^{-1}(z)$

$\therefore\quad h^{-1}=(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$

习 题 1.3

1证明$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$。

〔证〕：1° 当$n=1$时，$1^2=\frac{1}{6}\times1\times2\times3$ 所以命题成立，

2° 假设当$n=k$时命题也成立，即

$$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

现在要证当$n=k+1$时，命题成立。即

$$1^2+2^2+\cdots k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]$$

故由第一归纳法原理知命题对一切自然n都成立。

2、证明$1+3+6+\cdots\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

〔证〕 1°当$n=1$时，命题显然成立

2°假设当$n=k$时 命题也成立。即

$$1+3+6+\cdots+\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}$$

现在要证当$n=k+1$时 命题也成立。即

$$1+3+6+\cdots+\frac{k(k+1)}{2}+\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$=\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)+\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]$$

所以对一切自然数n 命题皆成立。

3、设h是一个正数，证明$(1+h)^n\geqslant 1+nh$

〔证〕1°当$h=2$时 $(1+h)^2=1+2h+h^2\geqslant 1+2h$

所以命题对$h=2$时成立。

2° 假设当$n=k$（$k\geqslant 2$）时命题成立。即

$(1+h)^k\geqslant 1+kh$

要证当$h=k+1$时 命题也成立。即

$$(1+h)^{k+1}=(1+h)^k(1+h)\geqslant(1+kh)(1+h)$$
$$\geqslant 1+(k+1)h$$

故对一切自然数n命题均成立。

4、证明$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+n\cdot n!$
$=(n+1)!-1$

〔证〕1°当$n=1$时，命题显然成立。

2°假设当$n=k$时，命题成立。即

$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+k\cdot k!=(k+1)!-1$

在这个等式的两边同时加上$(k+1)(k+1)!$于是得

$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+k\cdot k!+(k+1)(k+1)!-1$

$=(k+1)(k+1)!+(k+1)!-1$

$=(k+1)!(k+2)-1=[(k+1)+1]!-1$

故原命题对一切自然数n皆成立。

5、证明第二数学归纳法原理。

〔证〕：假定命题不是对一切自然数n都成立。令N表示使命题不成立的自然数所组成的集合，则$N\neq\phi$。于是由最小数原理知N中必有最小数存在设为h，且$h\neq 1$，否则与1°矛盾。因而$h-1$是一个自然。因为h是N中最小数，所以$h-1\notin N$这就是命题对于一切小于h自然数来说都成立。再由（ii）可推出命题对于h来说也成立，此与h使命题不成立矛盾，故命题对一切自然h来说都成立。

6、证明二项式定理：

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\cdots+\binom{n}{r}a^{n-r}b^r+\cdots+b^n$$

这里 $\binom{n}{r}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1、2\cdots r}$

是n个元素中取 r 个元素的组合数。

〔证〕：对n用数学归纳法来证明二项式定理。

1° 当$n=1$时，左端=右端=$a+b$二项式定理成立。

2° 假设当$n=k$时二项式定理成立。即

$$(a+b)^k = a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \cdots + \binom{k}{r}a^{k-r}b^r + \cdots + b^k$$

则 $$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = a(a+b)^k + b(a+b)^k$$

$$= [a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \cdots + \binom{k}{r}a^{k-r+1}b^r + \cdots + ab^k]$$

$$+ [a^k b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k}{r}a^{k-r}b^{r+1} + \cdots + b^{k+1}]$$

$$= a^{k+1} + [\binom{k}{1}+1]a^k b + \cdots + [\binom{k}{r}+\binom{k}{r-1}]a^{k-r+1}b^r$$

$$+ \cdots + [1+\binom{k}{k-1}]ab^k + b^{k+1} = a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b$$

$$+ \cdots + \binom{k+1}{r}a^{k-r+1}b^r + \cdots + \binom{k+1}{k}ab^k + b^{k+1}$$

故对任何自然n皆有

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + b^n$$ 成立。

7、证明：含有n个元素的集合的一切子集的个数等于2^n。

〔证〕对n用数学归纳法来证明此命题。

当$n=1$时 设$A=\{a_1\}$，则$\{a_1\}$和ϕ是A的子集，此命题为真。

设$n>1$，且对一切含$n-1$个元素的集合来说命题成立。则含n个元素的集合

$A=\{a_1\cdots a_{n-1}a_n\}$来说，由于$\{a_1\cdots a_{n-1}\}$共有$2^{n-1}$个子集，这些子集均是A的子集，且它们都不含元素$a_n$，因此在上述每一个子集中都添上$a_n$就又得到A的$2^{n-1}$个子集，此时A的子集个数为$2^{n-1}+2^{n-1}=2\cdot 2^{n-1}=2^n$，故命题得证。

〔另证〕由1.1习题6的结果知：含n个元素的集合中含有k个元素的子集共有$\binom{n}{k}$个（$0\leqslant k\leqslant n$）因此含n个元素的集合的一切子集的个数为$C^0_n+C^1_n+\cdots+C^n_n$

再由本节习题已证明的二项式定理中令$a=b=1$得

$C^0_n+C^1_n+\cdots+C^k_n+\cdots+C^n_n=2^n$

习 题 1.4

1、计算：

1、$(2\sqrt{5}-\sqrt{3}i)(-\sqrt{3}+4\sqrt{5}i)$

(2) $\dfrac{(2+3i)(5-7i)}{(3-2i)(-4+i)}$

(3) $(\sqrt{3}+\sqrt{5}i)^2$

(4) $(a+bi)^3-(a-bi^3)$

〔解〕$=2\sqrt{15}+43i$

(2) 原式$=\dfrac{31+i}{10+11i}=-\dfrac{23}{17}-\dfrac{27}{17}i$

(3) $(\sqrt{3}+\sqrt{5}i)^2=-2+2\sqrt{15}i$

(4) $(a+bi)^3-(a-bi)^3=2(3a^2-b^2)bi$

2、设α、β、γ、δ是4个复数，其中$\beta\neq 0$，　$\delta\neq 0$

证明：

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}, \quad \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}。$$

〔证〕：依题意设：$\alpha=(a、b)$、$\beta=(c_1 d)$，$\delta=(e_1 f)$，$\delta=(g, h)$，用 $\beta(\beta \neq 0)$ 除 α、$\delta(\delta\neq o)$ 除 γ 的商分别是：

$$\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right), \quad \frac{\gamma}{\delta}=\left(\frac{eg+fh}{g^2+h^2}, \frac{fg-eh}{g^2+h^2}\right)$$

根据复数的加法有：

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{eg+fh}{g^1+h^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}+\frac{fg-eh}{g^2+h^2}\right) \qquad (1)$$

而 $$\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}=\left(\frac{(ac+bd)(g^2+h^2)+eg+fh)(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)(g^2+h^2)},\right.$$

$$\left.\frac{(bc-ad)(g^2+h^2)+(fg-eh)(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)(g^2+h^2)}\right)$$

$$=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{eg+fh}{g^2+h^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}+\frac{fg-eh}{g^2+h^2}\right)$$

由（1）、（2）两式的右端而得

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta},$$

恫理可证 $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$。

习 题 1.5

1、把下列复数写成三角形式：

（1）1；（2）i；（3）$\sqrt{3}-i$，（4）$-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$