·学术交流资料·

圆锥螺线数学研究

资料(一) 附编

江苏省武进县革委会科委初审印发

1978年3月18日

绪　言

本资料是作为通俗、实用的新的"空间几何"——空间螺旋线数学体系中的一个分支，关于《圆锥螺线数学研究资料》的一个组成部分，献供我伟大祖国历史空前的科学盛会——全国科学大会检阅，希望能通过大会的非凡推动力，引起一场空间几何学科方面的革命性的社会科研活动。

从实际问题出发，笔者于1975年3月写出有一本《圆锥螺线数学研究资料(一)》。该资料(一)的主要内容如下：

在§1部分，首先从理论到实际，具体论证了苏联诺尔金的和芬尼可夫的"微分几何"中所给出的等比与等差螺距的两套圆锥螺线方程，它含糊有错，不堪应用；同时相应地在§2部分提出了普遍可用的锥螺轨迹方程与弧长公式，并由此推理到一般，首次提出了基于唯物辩证法的"曲线本源论观点"而形成起来的"空间曲线包孕正侧两平面射影法则"原理，从而进一步具体建立了任意圆锥螺线的通用方程，为撮合平面螺线与空间螺线而进行配伍研究提供了条件。接着又在§3中提出了一整套可以直接精确计算圆锥螺线及其射影螺线弧长、弦长和切线长的初等代数公式；并在§4中比较证实了初高等两套锥螺公式的高度一致性。还在§5中给出了一个"假想空间一质点按倒立锥螺轨道作盘旋降落运动的实施方案"。最后在§6中概括地提出了一十四项有关问题。

1978年1月，在华主席党中央抓纲治学路线指引下，仰赖江苏省科委的计划交流工作，南京大学数学系审阅了上述的《圆锥螺线数学研究资料(一)》，提出了几项怀疑或否定性意见。本资料即以南大意见为中心，展开了逐条讨论，辑成专秩，而作为上述资料(一)的附编。经申请江苏省武进县科委批准，纳入学术交流计划，印行征求有关各方公开扩大讨论。

这本《附编》资料已经讨论到的主要问题内容如下：

1.对于同一研究对象（对数型等比螺距圆锥螺线），诺尔金方程（B_1）、芬尼可夫方程（B_4），同笔者在资料(一)所提出的方程（B_2），究竟是甲＝乙＝丙，不须要研究？还是甲≠乙≠丙，值得研究？

2.应南大数学专业建议，给出了关于普通等差距圆锥螺线与母线决不交成定角的证明。

3.关于芬尼可夫等差距锥螺方程（B），同笔者在资料(一)所提同类型锥螺方程（B_3），两者间的矛盾，究竟是应该如实反映、充分揭示？还是可以根据“射影几何”中“（x,y,z）与（$\frac{x}{\lambda}$，$\frac{y}{\lambda}$，$\frac{z}{\lambda}$）当$\lambda \neq 0$时，代表同一点”的原理，而掩盖矛盾、取消研究？

4.根据书本中有关空间曲线部分的矛盾——“薄弱环节”问题的客观存在，以及从“曲线本源论观点”应有的启示，提出了一系列待研究的新课题。并附带举例指出：其中由锥螺方程（B_3）所能推得的侧立射影方程（E_3），正就是电学书本中只有经验图象，而没有数学表达式的那种“衰减振荡曲线”方程（经过绘图检验，结果正确）；以及由方程（B_3）推出的弧长公式（C_3），就恰好可以具体解决理论力学中有关于空间曲线运动的变加速度典型公式的实际空白问题（还有待验算）。笔者水平有限，难免有自我觉察不到的错误，希审阅者多加指正！

本资料撰述者

1978年3月18日

“对南京大学数学系审阅《圆锥螺线数学研究资料》所提《阅后意见》的几点解答与商榷”

通过江苏省科委的计划交流工作，南京大学数学系·数学专业·对拙稿《关于圆锥螺线数学兼及曲线本源问题的初步研究结果汇报请教资料》所提供的宝贵意见，个人非常感谢。同时，也感到《阅后意见》中有些问题，从有利于促进科学事业的角度看来，还有必要进一步公开提出讨论。

南大《阅后意见》共五条。 意见（1）指出，送审资料P.10与P.12在计算积分式子(C_2)时，错漏了一个因子$\frac{1}{m}$。这确是一个不应该有的错误，非常感谢这一指正意见！但同时还须表明一点：经订正错误之后，并不影响我对原问题所持疑议与所作的结论。以下还要在有关条目中再次补充说明个人理由。

意见(2)指出：“资料作者认为，诺尔金习题上对圆锥螺旋线的定义是不对的，并且作者在P.10上介绍了(B_2)，然而(B_2)形式的方程，恰好同C.П.芬尼可夫《微分几何》书中P.16•8的圆锥螺旋线形式相一致。可是芬尼可夫关于圆锥螺旋线的定义同诺尔金关于圆锥螺旋线的定义是一致的，所以资料作者在P.8末端的结论是有问题的。”

我对上述意见(2)，感到有较大的原则分歧，有必要略加探讨：

首先我看到的事实是 甲≒乙≒丙，而且具有带根本性的差异（矛盾）。认真彻底揭示这方面的矛盾，不是不必要，而是很有必要。

意见(2)认为我所提的方程

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{mt}\cos t \\ y &= e^{mt}\sin t \\ z &= \frac{\ell}{a}e^{mt} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B_2)$$

同芬尼可夫《微分几何教程》P.16习题8的“曲线方程”

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{t}\cos t \\ y &= e^{t}\sin t \\ z &= e^{t} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B_4)$$

形式恰好一致。而这个方程（B_4）又同诺尔金的“圆锥螺旋线”定义

$$r=e^{mt}\left\{a\mathscr{e}(t)+\ell k\right\}$$

是一致的。

这就使人意味着：既然三者一致（甲＝乙＝丙），根本无问题可言，说明我这个提问者认识不足，当然就没有必要再枉费心思去讨论它了。

但是稍加考察，事情并非如此简单。

第一点：我的锥螺（B_2），同诺尔金的（B_1）都是位于圆锥

$$\ell^2(x^2+y^2)-a^2z^2=o\cdots\cdots\cdots\cdots(d_1)$$

面上；而（B_4）却显然是位于圆锥

$$x^2+y^2-z^2=o\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(d_2)$$

面上的。

方程（d_1）是可以描述任意指定锥角的圆锥体的；而（d_2）却仅限于描述锥角 $\varphi=90°$ 的特定圆锥体。

第二点：方程（B_2）与（B_1）所包孕的“曲线元”都是

$$r=e^{mt}$$

而（B_4）的“曲线元”却是

$$r=e^{t}$$

用（B_2）是能够描述任意指定等比螺距螺线的，其正射影（对数螺线）首匝公比螺距，可用反对数表示为

$$R'_1=Anti\text{-}lg(2\pi mM),$$

锥面公比螺距为

$$R_1=\frac{R'_1}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$ （其中 $M=lge$，φ 表锥角，m 可按指定公比螺距计算确定）

而（B_4）却只能描述一种全由定值常数因子（不涉及m和φ）组成的特定等比螺距螺线，它的射影螺线公比螺距为

$$R'_2=Anti\text{-}lg(2\pi M),$$

锥面公比螺距为

$$R_2=\sqrt{2}\,R'_2$$

第三点：由方程（B_2）所推得的对数型锥螺弧长表达式是

$$S=\frac{\sqrt{a^2(m^2+1)+\ell^2m^2}}{am}\;e^{mt}\Big|_{t_1}^{t_2}\cdots\cdots\cdots\cdots(C_2)$$

由方程（B_1）所推得的对数型锥螺（诺尔金自称为“圆锥螺旋线”）弧长表达式是

$$S=\frac{\sqrt{a^2(m^2+1)+\ell^2}}{m}e^{mt}\cdots\cdots\cdots\cdots(C_1)$$

〔注：(C_1) 的推导过程不明，不便同 (C_2) 比较〕

而由(B_4)所能推得的对数锥螺弧长表达式却应该是

$$S=\sqrt{3}\,e^t\Big|_{t_1}^{t_2}\cdots\cdots\cdots\cdots(C_4)$$

它根本同实用中必不可少的可指定的常数 a、ℓ、m 无关。

第四点：对数型锥螺(B_2)的侧立射影曲线方程是

$$y=\frac{a}{\ell}z\cdot\sin\frac{lg(tg\frac{\varphi}{2})+lg\,z}{m\,lg\,e}\cdots\cdots\cdots\cdots(E_2)$$

这个方程(E_2)是可以具体应用于电学、力学中须要指定描绘与计算某种等比变频式减幅振荡曲线的场合的。

而(B_4)所能导出的侧立射影曲线方程则是

$$y=z\cdot\sin\frac{lgz}{lge}\cdots\cdots\cdots\cdots(E_4)$$

它既不能指定变频，也不能指定减幅，结果是无法应用。

综合看来：芬尼可夫的关于“特殊圆锥螺线类族”之中的“特殊对数型圆锥螺线”(B_4)的定义，同诺尔金的(B_1)，以及同我的“特殊圆锥螺线类族”之中的“一般对数型圆锥螺线”(B_2)的定义，比较之下，显然可见，是不应该也不可能把三者直接等同起来的。不知意见(2)所说的三者一致的根据究竟何在？还望能获得明确指教才好！

最后还是把话题拉回到我原先提出的诺尔金方程(B_1)是否不妥的讨论问题上来。

由于水平限制，我至今未能确切理解方程(B_1)的由来。不过，在没有见到意见(2)所指出的、“芬尼可夫关于圆锥螺旋线的定义同诺尔金关于圆锥螺旋线的定义是一致的”这方面的具体证明资料之前，我还是保持原先的看法，还是认为诺尔金如此含含糊糊，以他的“特殊化”的锥螺方程(B_1)——所谓“特殊化”，指的是提法、用法特殊，结构形式特殊，外加附图矛盾——不加注释、不加区别地、泛泛地定义“一般性”的“圆锥螺旋线”，确是不妥当的。而且也可能包含有错误成分在内的。

具体点说：诺尔金在没有首先对所论锥螺作出概括的分类与区别说明，没有标出其具体名称、特性的情况下，直接采用他那一种在锥螺类族中实际具有特殊性质的（相对于公认的普通锥螺而言）——定角、等比螺距、并且螺线起（终）点同锥顶永恒保持有一个单位长度距离的“对数型圆锥螺线”(B_1)，来泛泛地定义习惯公认的变角、等差距和起（终）点位于锥顶的普通“圆锥螺旋线”，这已经就使人迷惑难解；再加上书中缺乏必要的说明，并又突出地论证了这个(B_1)锥螺的“定角”性质，其客观效应，势必会得无形中掩盖掉普通锥螺如我以(B_3)给出的那种锥螺所具有的“变角”性质；又由于附图中把(B_1)应有的“等比螺距”，明白地具体描绘成了我那(B_3)式的“等差螺距”这一错误的暗示作用，总的结

果，在读者间势必造成逻辑混乱，更难望正确应用他那个公式了。这是我认为诺尔金关于锥螺定义（B_1）首先在提法、用法上的主要不妥之处。

其次一个不妥之点：我从自己的方程（B_2）、与弧长表达式（C_2）同诺尔金的方程（B_1）与弧长表达式（C_1）的具体差异问题上，也促使自己对诺尔金特殊化形式的方程（B_1）的正确性加深了怀疑。再从七七年复旦新书《曲线与曲面》讲到与它同类型（对数型）的锥螺时既不利用、也不讨论诺尔金的（B_1）与（C_1），由此，根据自己的低水平，多方结合看来，觉得很有必要在此再附带补充谈明自己的怀疑之点究竟何在，借以就教于南大：

诺尔金所定义的"圆锥螺旋线"方程

$$r=e^{mt}\left\{a\ell(t)+\ell k\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B_1)$$

应该认为是一种"空间极坐标方程"。

原书仅有的说明提到：圆锥母线之向量可表为

$$\left\{a\ell(t)+\ell k\right\}$$

但空间极坐标体制，标准结构形式如何？至今并不明确；类似的其他空间曲线极坐标方程实例，也找不出来。为此，对（B_1）的怀疑就难以澄清。

按个人设想：在空间极坐标系中，能表达任意锥角的圆锥体方程，可写成

$$r=\frac{a}{\ell}z\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(d_3)'$$

或者，

$$r=\frac{a}{c}\rho\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(d_3)$$

的形式。只要注意到：圆锥体各部分几何标量之比等于其对应的数量之比的关系式：

$$\frac{r}{z}=\frac{a}{\ell}=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

及

$$\frac{r}{\rho}=\frac{a}{c}=\sin\frac{\varphi}{2}$$

就不难证明（d_3）与（d_3）$'$等效，而且，这两者同空间直角坐标系中的圆锥体方程

$$\ell^2(x^2+y^2)-a^2z^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(d_1)$$

都是等价的。

根据（d_3）或（d_3）$'$，再引入"曲线元e^{mt}"、和"圆锥母线向量ρ"，可得到

$$r=\frac{1}{a}\;e^{mt}(a\sin\frac{\varphi}{2}+\ell\cos\frac{\varphi}{2})\cdots\cdots\cdots(B_2)'$$

也不难证明：这个空间极坐标系中的对数型锥螺方程（B_2）$'$，同资料（一）中那个空间直角坐标制下描述同一对数锥螺的方程（B_2），同样是等价的。

现在比较（B_2）$'$与（B_1），外形并不相同。我不知道诺尔金究竟是怎样引用、和引用了什么样的空间极坐标制？是否就是圆锥坐标制如像（d_3）或（d_3）$'$？又是怎样引进向量ρ的？是否通过

$$\vec{r} = \frac{a}{c}(\vec{r} + \vec{z})$$

的途径而得出的(B_1)？由于原书注释不全、推理不明、无法深入比较$(B_2)'$与(B_1)实质上的同异。不过，根本地看来，两者具有相同的圆锥面、相同的"曲线元"〔注：本资料中所说的"曲线元"，即相当于一般书本中所说的"弧素"，但弧有"曲线弧"与"圆弧"之别，所以，不称"弧素"而称为"曲线元"较妥〕、当然也会随之而有相同的纯量常数。由此推理，最后"弧长表达式"理当完全一致才对，而现在$(C_2) \neq (C_1)$，为什么？自己还解释不了。

另方面，(B_4)又是怎样同(B_1)一致或者相等的？同样感到是个谜。这个谜，还得期望南大数学专业及各有关方面邦助揭底！

我对意见(2)的最后复议是：须要仍然肯定资料(一)P.8末段的反证论点，就是说："事实上，普通的，不管是什么锥度的等差距圆锥螺线，绝对不和母线交成定角，〔原文在此夹注："具体的论证将在资料（二）中提出"〕如果泛泛地认为凡圆锥螺线都和母线交成定角，这个概念的出发点就是根本错误的。"

奠定我如上的反证论点的原始条件是：

①诺尔金书中的特殊化锥螺定义(B_1)——以"特殊"定义"一般"，提法、用法都显得特殊，方程本身结构形式及其来源，也显得特殊可疑；最后，从(B_1)到(C_1)的推理过程不明，实际(C_1)的正确性有问题，从而又联系到(B_1)的正确性可疑；而这次通过我自己用同法推导所得的$(B_2)'$同(B_1)比较结果，又大有差异这一事实，终于最后又一次地肯定了自己如上的疑议之一。

②诺尔金书中附图7明白无误地反映了作者本人对本课题部分概念是模糊的，逻辑是紊乱的。

③我现在可以查考到的其他苏联高等数学书本中如"习题汇编"、"芬尼可夫微分几何"等，都反映了同样的情形——在这部分课题上，存在着同样的空白、错误或者模糊与紊乱。

这里还可以附带提一下：芬尼可夫《微分几何教程》P.16·8题并未标明(B_4)是"圆锥螺线"，仅只称之为"曲线"，也没有附图；而他本人自认为可以定义"锥螺旋线"的方程，则是P.59中的

$$\left.\begin{array}{l} x = t\cos t \\ y = -t\sin t \\ z = \alpha t \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (B)$$

且附有普通等距（不够精确）锥螺图13示意。这个(B)式，恰恰就是我在资料P.13反复论证的、完全不同于对数型(B_1)锥螺的另一类普通等距、变角圆锥螺线方程，但它——(B)式也是以"特殊"定义"一般"，是模糊而且错误的。因为，除却仅仅可能利用它描绘出一个射影螺距恒等于2π个单位长度、锥面螺距恒等于$\dfrac{2\pi}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}$个单位长度的特殊性"普通锥螺"图形之外，它在理论基础上不符合辩证法，不能反映"普通锥螺"应有的普遍性的

自然规律，在实用中不能解决一般锥螺的描绘与计算问题。

⑤在所见的其他有关书本（包括美国“葛斯龙三氏微积分”、苏联“伏龙可夫理论力学”等书）中，都没有确切论证和计算锥螺方程与弧长问题〔力学中表现为变加(减)速的空间曲线运动速度问题〕的，这也反映了有的书本中所提到的“空间曲线的理论研究方面，至今还是个薄弱环节”的情况是确实存在的。为此也促成了我大胆怀疑并深入发掘这一环节的动机与信念。

总的说来，我所见所谈，是否确实反映了现代高等几何学科中的所谓“薄弱环节”的问题？还望南大数学系及有关各方给予全面关注、彻底考查，耐烦指教！

继续再答复一下南大意见(3)：意见指出：“资料作者在P.23上用(B_3)式定义了圆锥螺旋线的参数方程，应该介绍一下，(B_3)螺旋线应该在那一个园锥面上？可否证明一下，(B_3)螺旋线与圆锥的母线不组成固定角？这些内容，作者应该要做的”。

谢谢这项具体积极建议！

我原本在资料(一)P.8夹注说明：“具体的论证将在资料(二)提出。”为便于南大数学专业和有关各方的扩大再审议，现特在此先作一简略说明：

i)我所提出的等差距锥螺(B_3)所依附的锥面，也和诺尔金的等比距锥螺(B_1)似的，同样是位于圆锥(d_1)面上，前面已作说明。事情比较明显，即从方程(B_3)中消去“曲线元”，并将其中的一个常系数——锥率b换成$\frac{\ell}{a}$，就能获得(d_1)，〔因为$b=ctg\frac{\varphi}{2}=\frac{z}{\lambda t}=\frac{z}{r}=\frac{\ell}{a}$〕故原资料（一）中未加注释。

ii)关于(B_3)所定义的锥螺弧上的切线同该圆锥母线不组成固定角的证明问题，可由下式

$$tg\,\beta_{(n)}^{(k)}=\frac{2(kn-1)}{n}\pi\cdot sin\frac{\varphi}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(G)$$

或者

$$tg\,\beta_{(n)}^{(k)}=\frac{kn-1}{n}\phi\cdots\cdots\cdots\cdots(G)'$$

解决。

式中 β 角是螺线与母线的交角

φ、ϕ都是常量，分别表锥角与锥面角；k是“有界变量”，它决定于$\frac{\rho}{R}=k$，ρ表母线，R表螺距，k表螺线匝数。一般地，$k=1,2,3\cdots\cdots k$，但需要用以表达单位弧段不满一整匝螺线的匝数时，k也可以为分数、带分数。

n为自然数，即$n=1,2,3\cdots\cdots N$，这里N不出现于式中，可根据N等分锥面极角、即为求$\frac{\phi}{N}$的需要而计算确定或者任意指定。n的性质，随同于N，都是“无界变量”。

附带说明一下，锥螺(B_3)是一种由顶点向底边盘绕的外向右旋螺线。

欲证明等差距的普通圆锥螺旋线同圆锥母线不交成定角，只须证明(G)或(G)'式的右端

不等于定值就可以了。

〔证明〕 因为n是无界变量，令$n\to\infty$时，由(G)式可得

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{tg}\beta_{(n)}^{(k)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(kn-1)}{n}\pi\cdot\sin\frac{\varphi}{2}=2k\pi\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\cdots\cdots(G_1)$$

由(G)′ 式可得 $$\lim_{n\to\infty}\operatorname{tg}\beta_{(n)}^{(k)}=\lim_{n\to\infty}\frac{kn-1}{n}\phi=k\phi\cdots\cdots(G_1)'$$

当所论锥螺有确定的起讫点，即在$\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}\beta_{(n)}^{(k)}\neq\infty$的前提下，$k$为有界变量，对于任意相邻两个可取的$k$值，都有

$$k_{i-1}<k_i$$

的关系。事实上，取自然顺序的一系列等差k值，可将(G_1)或(G_1)′式的右端展开成一个关于正切函数$\operatorname{tg}\beta$的有限数列。

且因为 $o<k<\infty$； $\operatorname{tg}90^\circ=\infty$；所以 $o<\beta<90^\circ$。

于是有数列 $\beta_1<\beta_2<\beta_3<\cdots\cdots<\beta_{i-1}<\beta_i<\cdots\cdots<90^\circ$

这说明，交角β乃是自变量函数k的函数。对应于每一个可取的k值，β都有一个确定的值，但它不是固定值。

由此证明了："对于一切等差距的、即由(B_3)所定义的普通圆锥螺线来说，在螺线上任意两点间的弧段，都不和该圆锥的母线交成定角"。

意见(4)提到："资料中引用了不少工程上的实例计算与§4.(P.43)中的一些应用，建议让有关厂方技术员审核一下较妥。"

我的确由此产生了一系列感想。按资料(一)内容，§4.(P.43)全部写的是初、高等两套弧长公式的应用结果比较，并不涉及技术。真正需要技术人员审核解决的是在§5.(P.53~56)中，例如，如何实现"指令航行体循倒立锥螺轨道作盘旋降落运动"时所必需的程序数控装置的设计制造问题，那当然是离不了技术员工的。可是，这方面的理论基础数学(包括建立控制方程与具体技术设计计算的核实等)问题，实际还得有赖于数学工作者发挥必要的先驱作用与密切配合作用，这还该说是数学工作者无可避免的分内之事吧？

虽然对于我资料§6.提出的一十四项问题，意见仅只涉及其中第一、二两个问题，但意识到教学、科研以至于学习、活动，工作任务相当繁忙，特别是根据各有专业、各有爱好的数学工作者的具体情况来看，现在能够得到这几条宝贵指正意见，的确是已经相当满足和非常感谢的了！不过，遗憾的是，"问题"毕竟还是继续客观存在着！为此，在感谢南大数学专业的同时，仍然希望能有机会进行一次扩大再审查，包括§5，多多指教！

最后还须复议一下意见(5)。这看来是个重点问题。作为南大数学专业的末尾一条意见，对我提示："希望资料作者应注意到：在射影几何里，(x,y,z)与$\left(\frac{x}{\lambda},\frac{y}{\lambda},\frac{z}{\lambda}\right)$，当$\lambda\neq0$时，代表同一点。"

这条意见，外观不够明朗，实际却很可能给人以先验的印象，很容易造成错觉。

按通常看法，意见的主要目的，显然是针对着我所提供的关于芬尼可夫《微分几何教程》等书本上的锥螺方程（B）同自己的同类型方程（B_3）之间的对比研究资料部分，原则性地暗示我：应该从射影几何的基础理论方面去认识两者的一致性。从而干脆自动放弃这一不必要的或者多余的辛勤研究。这也许是个人的狭隘偏见？我手边缺乏射影几何书本，现在只好暂就管窥之见，对意见（5）略抒疑议：

i）我觉得应该首先澄清这样一种可能滋生的错觉。因为，根据我所提出的方程

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda t\cos t \\ y &= \lambda t\sin t \\ z &= \frac{\ell}{a}\lambda t \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B_3)$$

同芬尼可夫的方程

$$\left.\begin{aligned} x &= t\cos t \\ y &= -t\sin t \\ z &= \alpha t \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

比较一下，显然，只要将（B_3）两边同除以λ，就立即得出一个关于（B_3）的等价方程

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\lambda} &= t\cos t \\ \frac{y}{\lambda} &= t\sin t \\ \frac{z}{\lambda} &= \frac{\ell}{a}t \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B_3)'$$

再比较（B）与（B_3）'，似乎，意见（5）所暗示的异形同影的情形恰好出现了？似乎，两式的左边既然表示同一点，而两式的右边又事实上一致了，〔按：（B）式中纵标y表成负值，虽然不妥，但不影响计算结果；再一点，令竖标z式中的角系数$\alpha=\frac{\ell}{a}$，也没有问题〕那还有什么差异（矛盾）可谈呢？然而，这实际是个错觉！

我在资料（一）中，由P.13～30，用大量篇幅阐明了（B_3）与（B）的差异性质，可以肯定（B_3）$\neq$（B）。现在将（B_3）缩小λ倍而成（B_3）'，当然，其结果还是一个（B_3）'$\neq$（B）

ii）我对射影几何是外行，不能装懂。但是，在这个明显可辨的具体问题上，还可以依据常理，作几点简单分析：

情形分析① 若两锥螺相似，其射影坐标标量成定比关系，并设

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}=\lambda$$

则在最后保持等角关系的条件下，经过两次或更多次的放缩映射，可出现同一射影，也就是说，在容许进行扩大或缩小λ倍的合理的代数变换的条件下，认为：

$$(x,\ y,\ z)\ 与\ \left(\frac{x}{\lambda},\ \frac{y}{\lambda},\ \frac{z}{\lambda}\right)$$

代表同一点，是可以被接受的。

但是，对于现在所论锥螺（B_3）与（B）之间，并不存在这种相似关系。所以，所提示的这条射影原理，在这里实际应用不上。

那么，（B_3）与（B）两者间的同异比较观又究竟如何？概括地说：

两者可以有相同的圆锥面，但具有不同的"曲线元"；（B_3）具有"一般性"，而（B）只具有"特殊性"。两者的逻辑关系，是一种矛盾对立而又统一的辩证的关系，而决不是什么两形相似成比例的关系！

分析地看：根据两方程的结构形式，认为两者所依附的圆锥体相同，即令（B）式中竖标 z 的表达式中角系数 α 等同于（B_3）中的 b 或 $\frac{c}{a}$，这是许可的。

从（B_3）与（B）具有相同的圆锥面这个前提出发，再分析两者的矛盾关系：矛盾的根源在于：（B_3）的"曲线元"是 $r_1=\lambda t$；（B）的"曲线元"为 $r_2=t$（这种根本性的矛盾，是不可能运用倍比或缩比的方法加以改变的）。由此决定了：（B_3）的正射影曲线，即阿几米德螺线 $r=A\theta$；侧立射影即电学书本中习见的有图形而无方程的"等频减幅振荡曲线"，这种曲线方程应该就是

$$y=\frac{z}{b}\sin\frac{z}{\lambda b} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (E_3)$$

式中 $$b=\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}=\frac{z}{r}=\frac{c}{a}$$

对于（B）式，其正射影曲线方程为 $r=\theta$；

侧立射影曲线为 $$y=\frac{z}{\alpha}\sin\frac{z}{\alpha} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (E)$$

（B_3）的锥面螺距 $$R_1=\frac{2\pi\lambda}{\sin\frac{\varphi}{2}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (F_3)$$

正射影螺距 $$R_1'=2\pi\lambda \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (F_3)$$

显然，R_1 或 R_1' 都可以通过"曲线元"的比例系数 λ 计算确定，也可以先预定 R_1 或 R_1' 而后算出 λ。

同样的情形，对于其侧立射影：（E_3）中表波长的标量 z_1，也可以通过 λ 而算出、或者预定。

而（B）的锥面螺距 $$R_2=\frac{2\pi}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

正射影螺距 $$R_2'=2\pi,$$

显然都是不可调节的纯常量。侧立射影（E）也是如此。

从以上的分析比较，充分说明，（B_3）具有"一般性"，（B）却只具有"特殊性"。而"一般"与"特殊"之间的逻辑关系，当然绝对不同于两形相似成定比的关系。说明意见（5）所指射影原理，不适用于（B_3）与（B）的关系中。

情形分析② 已知(B_3)与(B)不相似，但两者有相同的圆锥面，即圆锥夹角φ相同，母线ρ相同。试论证(B_3)与(B)是否有相同的射影？

〔论证〕 在给定条件$\varphi_1=\varphi_2=\varphi$，$\rho_1=\rho_2=\rho$之外，若螺线匝数$k_1=k_2$这一条件也同时成立，则$(B_3)$与$(B)$有相同的正侧两射影，若$k_1\neq k_2$，则两者无同影。

现在，根据已知条件：

(B_3)的母线表达式$\rho=k_1\cdot R_1$；

(B)的母线表达式 $\rho=k_2\cdot R_2$，

从而有：
$$R_1k_1=R_2k_2,$$

但是，
$$R_1=\frac{2\pi\lambda}{\sin\dfrac{\varphi}{2}},\quad 而\ R_2=\frac{2\pi}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}$$

从而，
$$k_2=\lambda k_1$$

〔注意到 $\dfrac{\rho_2}{\rho_1}=1$， 即$\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\neq\lambda$〕

若 $\lambda\neq1$， 则 $R_1\neq R_2$， $\therefore k_1\neq k_2$

这个事实说明，在(B_3)与(B)有相同圆锥面的条件下，除外于$\lambda=1$的情形，一般地，(B_3)与(B)不可能有相同的射影。

事实上，如果$\lambda=1$时，则(B_3)就完全转化成了(B)式，但这可不同于缩小或扩大λ倍的情形，不符合意见(5)所指原理。

情形分析③ 已知(B_3)与(B)不相似，并假定两者分别盘绕在同底不等高的圆锥面上，而螺线匝数相同，在这样的条件下，又能否论证(B_3)与(B)有相同的射影？

〔论证〕 按给定条件：$r_1=r_2$， $k_1=k_2$，据此，可以用几何方法，通过下列三条件，直观地证明(B_3)与(B)具有同一的正射影和不同的侧立射影。

1.通过两圆锥中心轴（Z轴），按n等分锥面和底面极角的剖开法，由顶点纵贯底面，切取n对纵剖面等腰三角形，并利用其n组对应中位线（包括由三角形截出的等腰梯形的中位线）相等关系；

2.取n等分两圆锥锥面角，利用其具有n等分个相同的射影平面极角关系；

3.注意到等差距螺旋线恒过连结n个等分锥面角而排列成阶梯状的各个梯形对角顶点的自然规律。

但为了避免繁锁，在此还是改用代数方法证明如下：

首先比较(B_3)与(B)在Oxy与Oyz两射影平面上的坐标关系，应有
$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{\lambda t\cos t}{t\cos t}=\lambda,\qquad \frac{y_1}{y_2}=\frac{\lambda t\sin t}{t\sin t}=\lambda,$$

〔在此暂不考虑(B)式中y取负值的问题——因为它对计算结果无影响〕

以及
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{b\lambda t}{at}=\lambda\left(\frac{b}{a}\right)=\lambda\frac{\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi_2}{2}}。$$

$\because \quad \rho_1 = k_1 R_1, \qquad \rho_2 = k_2 R_2$

已知 $\quad k_1 = k_2 \qquad \therefore \dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{R_1}{R_2}$

$\because \quad \dfrac{r_1}{\rho_1} = \sin\dfrac{\varphi_1}{2}, \qquad \dfrac{r_2}{\rho_2} = \sin\dfrac{\varphi_2}{2};$

已知 $\quad r_1 = r_2 \qquad \therefore \dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{\sin\dfrac{\varphi_1}{2}}{\sin\dfrac{\varphi_2}{2}},$

又知 $\quad R_1 = \dfrac{2\pi\lambda}{\sin\dfrac{\varphi_1}{2}}, \qquad R_2 = \dfrac{2\pi}{\sin\dfrac{\varphi_2}{2}}$

$$\therefore \frac{R_1}{R_2} = \lambda\frac{\sin\dfrac{\varphi_1}{2}}{\sin\dfrac{\varphi_2}{2}}。$$

既有 $\quad \dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{R_1}{R_2}, \qquad \therefore \quad \lambda = 1$

代入三组坐标比式，可得

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = 1, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi_2}{2}}。$$

终结判断：

由 $$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = 1,$$

可知：(B_3) 与 (B)，**在同底不等高的圆锥面上，并且在匝数相等的条件下，两者有同一正射影。**

但同时由于 $\varphi_1 \neq \varphi_2$，**（不等高即不等锥角）故由** $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi_2}{2}}$ **所表示的比值为一变量。即表示两者在上述给定条件下所能得到的侧立射影恒不相同。**

综合而言，情形③ 还是不符合意见 (5) 所提示的情形。

若要使得(B_3)与(B)异形同影，必须在上述条件之外，再加上一条：$\varphi_1 = \varphi_2$。可是，那时候，情形就变成为

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = 1,$$

即变成两形全等了！这就表明：

除非令 $(B_3) \Longleftrightarrow (B)$，两者同形，才能有同影。

若再全面考虑其他情形，如同高不等底等等，尽管螺线匝数可令其相等，结果将是正射影、侧立射影全都不同或者相互掺什，事理显著，不再穷证。

综合以上论证结果，可以看出：

辩证的严格逻辑证明：要使得 (B_3) 与 (B) 真正具有同一射影——既有相同的正射影，且有相同的侧立射影，唯一的条件是：必须指令 (B_3) 中 的 $\lambda=1$，方能达成目的。但是，事实上，当 $\lambda=1$ 时，(B_3)已经完全蜕变成(B)式了。这一假设条件，恰好说明了：犹如在一种由"一般性"的通项公式 An 所给出的无穷数列之中，总可以找出那么一个恰符所需的"特殊性"数项Ai；而这个特殊数项Ai，却不能反转来代替或者等同于"一般性"数列An。

正由于"一般"包含"特殊"，所以 (B_3) 可以在特定条件下转化成 (B)；如果倒转过来，要想运用代数变换手段，使得 (B) 式无条件变成 (B_3)，又究竟行不行呢？那可是肯定不行的！因为这种变换，仅只是表现为"量"的相对变化，并不能引起"质"的绝对改变；而由"特殊"到"普遍"，由 (B) 到 (B_3)，却必须要经历一个从低级到高级的"升华"过程，即必须根据"空间曲线包孕正侧两射影曲线"的原理，从根改变(B)式的"曲线元"方能达到根本改变的目的。

如若不信，先试对(B_3)除以 λ，所得结果是$(B_3)'$与(B_3)等价，还是一个$(B_3)' \neq (B)$，前已说明。又如果以 λ 乘(B)式；或者，直接将t改作 λt，结果将怎样？一个是：

$$\left.\begin{array}{l} \lambda x=\lambda t\cos t \\ \lambda y=-\lambda t\sin t \\ \lambda z=\alpha\lambda t \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (B)'$$

显而易见，$(B)'$与(B)等价，因而$(B_3) \neq (B)'$。

另一个是

$$\left.\begin{array}{l} x=\lambda t\cos \lambda t \\ y=-\lambda t\sin \lambda t \\ z=\alpha\lambda t \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (B)''$$

要证明$(B)''$与(B)等价，粗看有些费解，不妨略作说明：

首先看Oxy平面上，$(B)''$的正射影曲线方程虽然外形也同(B_3)似的，变成了 $r=\lambda t$ 的形式，但实际两者还是有区别的。这是因为：

在(B_3)中，当参变函数 $\cos t=\cos 2k\pi$ 时，

坐标函数 $\begin{cases} x=2\lambda\, k\pi\cdot\cos 2k\pi \\ y=2\lambda\, k\pi\cdot\sin 2k\pi \end{cases}$

而在$(B)''$中，由于可令变角 $t\to\infty$，

所以，依照原设，有 $\lambda t=t$。

于是，当参变函数 $\cos\lambda t=\cos(2k\pi)$ 时，

应有坐标函数 $\begin{cases} x = 2k\pi \cdot \cos(2k\pi) \\ y = -2k\pi \cdot \cos(2k\pi) \end{cases}$

这同（B）式中可取的 $\begin{cases} x = 2k\pi \cdot \cos(2k\pi) \\ y = -2k\pi \cdot \cos(2k\pi) \end{cases}$

并无区别。

既有 $(B_3) \neq (B)$

$\therefore$ $(B_3) \neq (B)''$

虽然（B_3）与（B）之间，也可能象情形分析③所论证的那样，在特定条件下，可具有相同的正射影；但不能不看到，如果在没有同时限定，要具有同一侧立射影的情况下，任一同样的正射影，却可能对应着无穷多个不同的"空间宿主"——正像（B_3）所能描绘的那样多。为此，单独考虑两螺线是否具有同一正射影而不考虑它两者是否同时具有同一的侧立射影，那还是不全面的，还是不解决实际问题的。

这也说明了：（B_3）式与（B）式之间——还可以联系到（B_2）与（B_4）之间，差异（矛盾）是绝对的，统一是相对的（除非取唯一特例 $\lambda = 1$，代进（B_3）时可出现同一性）；并且必须看到：如果没有那个具备"普遍性"的（B_3）方程的客观存在，（B）式也就根本失去了作为"特殊性"方程而相对存在的条件。事实上，那时候如果人们直接把（B）式应用于一般等距锥螺的计算场合，显然会获得莫名其妙的谬误结果。

由此也最后说明了：射影几何里有关（x, y, z）与（$\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}, \frac{z}{\lambda}$）当 $\lambda \neq 0$ 时表示同一点的原理，并不能适用于（B_3）与（B）两式之间，因为，这两者并非相似成定比（不是，$x_1 = \lambda x_2$，$y_1 = \lambda y_2$，$z_1 = \lambda z_2$）的关系，而基本上是异形不同影的——除 $\lambda = 1$ 之外。也就意味着，要想借用这一原理，悄悄地掩盖或者抹煞（B_3）与（B）两者间客观存在的差异（矛盾）问题，那是不恰当、也不可能的！

还可以由此联想到，意见（2）、（3）中所反映的类似问题，岂不同样值得深思？

也可借以说明：在有关书本中所表现的矛盾——错误、模糊、空白、薄弱环节，以至于长期阻碍本学科与有关学科学术进展的情况，何以至今未被人们所关注？其事其理，决非偶然，怎可以等闲视之？

如果考虑到，为抓纲治学、促进科学，"实事求是"的、"一丝不苟"的科学态度必不可少，那么，象书本方程（B）、（B_1）、（B_4）等等，实际仅供练习，不堪应用，如此这般的科学效果问题，对之是否应该有一个确切的估量？由此反映出来的有关非唯物论的数学的哲学基础问题，又应该如何认真对待？——例如："射影几何"中为什么多研究抽像的、假定的曲线射影关系，而少研究甚至不研究具体空间曲线的具体射影曲线？（当然并不要求像"画法几何"那样做法）为什么根本涉及不到空间曲线的"自然印证"问题、"本源"问题、"曲线认识论"的问题？特别是作为"射影几何"专门学科，却又为什么可以不去归纳研究构成一支具体"空间曲线"必不可少的"正侧两平面射影包孕法则"这项基本原理？一些显而易见的非辩证的研究方法，何以至今还能残存在唯物的数学领域？由此而给有关数理学科所带来的阻碍作用——例如，前面提到过的电学中常见的"衰减振荡曲线"，为什么只

有经验图形而没有数学方程？理论力学与应用力学中关于空间曲线运动的“变加速度公式”，为什么只能最后交待给一个通用的空间曲线弧长积分公式，而实际不能解决具体计算问题就算完事了呢？如此等等，在资料(一)中已开始有所触及的那些有关于圆锥螺线数学的实际问题，应如何认真争取广泛关注，扩大研究？看来还是值得在这里突出地再次提一提的吧？

最后再概括说明一下在个人设想中的一系列待研究的新课题，例如：

有关于“曲线本源论观点”、“空间曲线与平面曲线；第一性曲线与第二性曲线；自然曲线、射影曲线与人工展剖变形曲线，”“空间曲线的射影包孕法则原理”，“曲线的鉴别与分类”，“自然曲线与自然规律的相互印证”、“根据现有书本资料，展开空间曲线与射影曲线的配套研究”，“未来的宇宙航行、繁复而有恒的天体运动与空间曲线数学的配合研究——形态万千、可表为永恒运动的圆柱或准圆柱以至畸形圆柱螺线运动，及连续作衰减运动而终归消失的圆锥或准圆锥、畸形圆锥螺线运动”，“包括弧长因素的空间曲线与其射影曲线之间的恒等变换关系式的具体推证与验算”、“变加速的空间曲线运动速度典型公式的推证与实例计算”、以及“由曲线本源论观点开始引起的有关空间质点运动轨迹问题：究竟是平面的正弦曲线，矩形曲线，还是空间的圆柱螺旋线？是平面的衰减振荡曲线，还是空间的圆锥螺旋线？为什么直角坐标制的示波器上恰好能出现正弦曲线（或其人工变形的矩形曲线）、衰减振荡曲线和圆？而极坐标制的示波器上还可能出现阿几米德螺线？（见摩尔吨《电子示波器》）这是否恰好具体反映了圆柱螺线与圆锥螺线的正侧两套射影曲线图形？1895年范特山由电火花摄影所得的富有阴影立体感的等频减幅振荡曲线〔见《达夫高等物理学》〕又说明了什么？凡此等等一系列问题，是否都值得系统研究一下？还望南大及各有关方面，在进行再审议时，多加关注，多给指教！

《圆锥螺线数学研究资料》

撰述者 邵 炎 提请审查

江苏省武进县革命委员会科委初审印发

1978年3月18日