S.M.P.

中學數學教程

第3册

英國S.M.P.中學數學教程

THE SCHOOL MATHEMATICS PROJECT

BOOK 3

九章出版社 出版
製作・發行：學英文化事業有限公司

英國S.M.P.
中學數學教程

●(中文版第三冊)●

出版者:九 章 出 版 社

製作・發行:學英文化事業有限公司

地　　址:羅斯福路四段52巷6號

電　　話:(02)3946693

印 刷 者:九章打字印刷行

出版日期:中華民國72年10月

定　　價:普及版700元整

郵政劃撥:578690學英文化公司帳戶

第三冊　序言

第四册仍然強調初級數學課程中各個論題之間的相關性，這是在第三册中就開始進行了，但是這一册還指出一些論題的應用。在問題中，也要求所得的答案要有充分及合理程度的精確性，例如在方程式、統計、函數的探究、計算等各章都一再提到。

第 1 章和第 5 章繼續進行變換幾何的研究。在第 1 章中，變換利用矩陣做代數描述，加以討論。然後以反變換引導出反矩陣的研究，並為第 2 章（在解方程式）一般的反元素觀念，與利用矩陣解聯立方程式來舖路。第 5 章在變換的組合上，建立典型數學發展為始，然後考慮一般的類型，並非正式的將其結構視為一群結束。

另外還有 4 章也是幾何方面的教材。在第 7 章中再度研究網路，討論迴路；樹形圖；對偶性和最佳路徑。在第 9 章中以三維坐標擴展三維（甚至更高維）空間的經驗。在第 12 章中發展直線的向量方程式，並應用於幾何問題中。在簡短的第 14 章中，指出在利用資料獲得結論時，首先檢驗需要那些資料，並提醒大家一些應小心的地方。

第 4 章對數是很實用的一章。第一節考慮各種映射及其中一些映射所定義的同胚變換，然後提出對數函數的用途，並以例題說明其應用。

第 3 章是從事正切函數的研究。第 8 章和第 11 章兩章，基本上是討論有關由物理現象的觀察，求得資料的過程；然後尋求比例式或變化率或是直接的表成一個簡單的關係式。

第 6 章研究許多實際的試驗，以顯示統計的一些應用，並介紹各種統計類型。以模擬一節　束。第 13 章探討複合事件的機率。

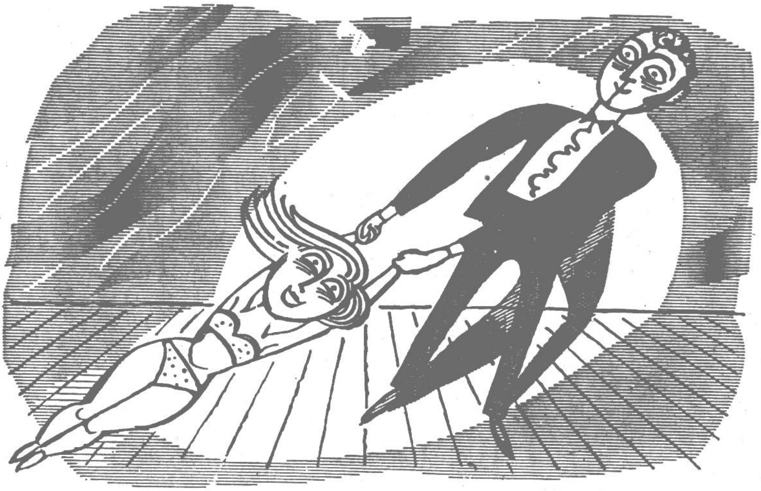
第 15 章是獨特的一章，討論有關數學的應用；公式的形成及其用途；並考慮數據測量的方式，計算工具的使用，以決定結果的精確程度等。

在第 10 章中，將第 2 章所討論解方程式的技巧，應用於一些非數值的問題上，並發展出有解的一般條件。

如同這套書的前幾册，習題答案附於教師手册中。

目　錄

1
矩陣和變換



在第三册中，你們已經看出如何來組合平移、鏡射和旋轉。你們也了解這些變換如何利用向量和矩陣來表示。在這一章裏，我們將繼續發展這些概念，使得我們能用代數的形式來表達一些幾何的結果。

1．基底向量

回想在前幾册中，一個點 P 的位置是如何利用由原點的位移 $\mathbf{p}$ 表示。我們稱 $\mathbf{p}$ 為此點的**位置向量**（*position vector*）（圖 1）。

(a)(i)點 A 的坐標為（3，4）。A 的位置向量 $\mathbf{a}$ 如何用行向量來表示？

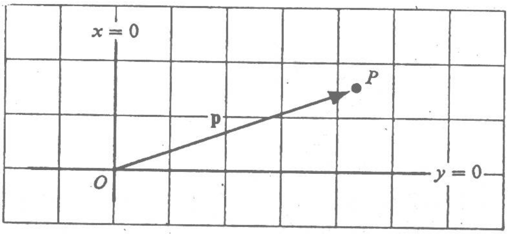


圖 1

(ii) A 經過平移 $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ 後映像為 A' ，A' 的位置向量是什麼？

一個位移，如 $\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ ，通常看成兩個位移的組合：

一為 x 方向增加 5 個單位，
一為 y 方向增加 3 個單位 。

$$\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

而 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 為 x 方向的單位位移

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 為 y 方向的單位位移

圖 說明了這些關係 。

(b)將下面的向量寫成 $m\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 的形式 。

$\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$

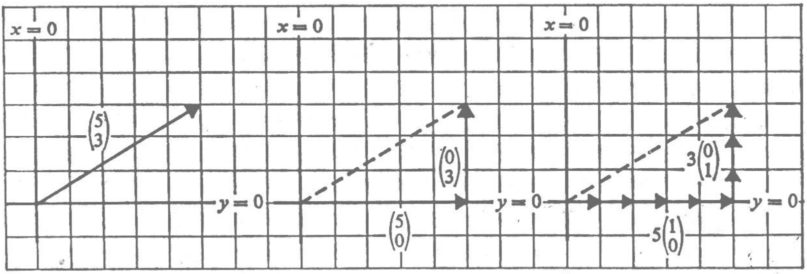


圖 2

由於　$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

a 和 b 不論爲什麼值，向量 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 都能寫成 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 的組合。這稱爲 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 的線性組合（*linear combination*）。並且稱這兩個向量爲基底向量（*base vectors*）。（其他的向量可用這兩個向量構成。）

習題A

習題中，點 A,B,C，……的位置向量分別記爲 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$，……

1. 使用方格紙標示出下面位置向量表示的點：

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix};\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix};\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix};\quad \mathbf{d}=\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}.$$

2. $OPQR$ 爲平行四邊形，O 爲原點，

$$\mathbf{p}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\ \text{和}\ \mathbf{q}=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}.$$

在方格紙上畫出平行四邊形並求 $\mathbf{r}$ 。

3. 點 A,B 和 C 經過平移 $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ 後分別映至 A'，B' 和 C'。已知 $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

$\mathbf{b}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ 和 $\mathbf{c}=\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ ，求 $\mathbf{a}'$ ，$\mathbf{b}'$ 和 $\mathbf{c}'$ 。

4. (a)將 $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ 寫成

$\mathbf{p}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ 和 $\mathbf{q}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 的線性組合。

並將這些線性組合以圖形說明（如圖 2 ）。

(b)任意的 2×1 列向量能以 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$ 的線性組合表示嗎？

2. 變換

你們早已明白如何使用矩陣來表示變換。

函數 $\mathrm{S}:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

就是此種變換的一個例子。

如果 P 的位置向量為 $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ ，變換 S 將 P 映至 P' ，那麼 P' 的位置向量為

$$\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$$

以圖 3 說明，虛線為映像向量。

(a) S 將基底向量 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 映至什麼向量？

在定義 S 的矩陣與基底向量的映像之間，你們發覺彼此之間有什麼關係嗎？

(b)任意取一個 2×2 的矩陣，並求此矩陣在基底向量

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 上的結果。

你們能得到什麼結論嗎？

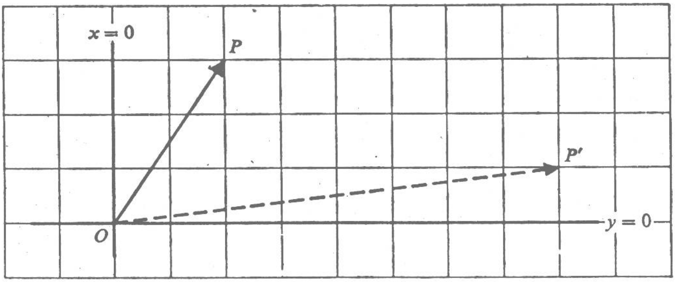


圖 3

(c)一個變換將

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{映至} \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \text{映至} \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}。$$

此變換的矩陣是什麼？

回答了上面的問題後，你們將發現到基底向量

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

的映像與矩陣的行，兩者的關係非常明顯。

比方說，矩陣為 $\begin{pmatrix}5 & 3\\-2 & 4\end{pmatrix}$，

則 $$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix} \text{ 且 } \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}.$$

用圖 4 來說明，向量表示位置向量。

反過來敘述也是正確的。假設我們知道有個矩陣將基底向量如上面所說的映射。

令此矩陣為 $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$，

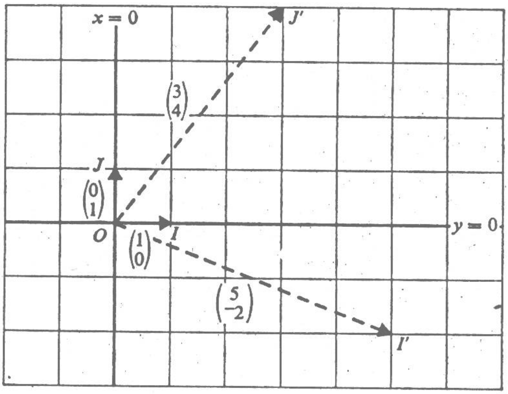


圖 4

則 $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ 且 } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

因此 $$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ 且 } \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

故 $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

當我們要求出表示變換的矩陣時，通常利用上面的事實來做，我們用下面的例子來說明。

例：1

有一個變換等於對 O 順時針旋轉 90° 後，跟着以 O 爲中心，放大率爲 3 的放大。求表示此變換的矩陣。

此變換在基底向量上的效果，利用觀察單位正方形（即頂點爲(0,0)，(1,0)，(1,1) 和(0,1)的正方形）的變化很容易了解。（圖 5）。因爲

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ 且 } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

我們能夠很快的得知所需矩陣爲

$$\begin{pmatrix}0 & 3\\ -3 & 0\end{pmatrix}.$$

(d)求表示對原點半轉的矩陣。

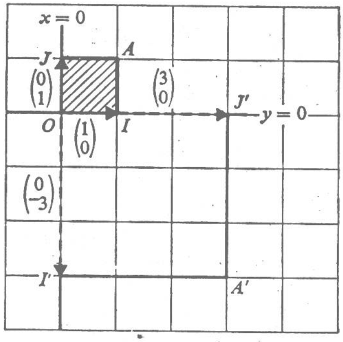


圖 5

習題B

1. 下面的矩陣定義某些變換

(a) $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$;　(b) $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$;　(c) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$;　(e) $\begin{pmatrix}-3 & 0\\ -4 & 2\end{pmatrix}$;　(f) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$.

畫圖表示基底向量 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 在這些變換下的映像。

在這些變換下那些點保持不變。

2. 利用基底向量 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 的映像，寫出下面變換的矩陣：

(a)對 $y=0$ 的鏡射；

(b)對原點正向旋轉 270°；

(c)以原點爲中心，放大率爲 2 的放大；

(d)對 $x+y=0$ 的鏡射；

(e)將 $(1,0)$ 映至 $(1,1)$ 且直線 $x=0$ 保持不變的歪斜變換。

3. 圖 6 表示單位正方形 $OIAJ$ 上的一些變換，分別寫出每一種情形下，表示此變換的矩陣。

4. 變換 **T** 可看成放大後，跟着做逆時針旋轉，兩者的中心都是原點。如果 **T** 將

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ 映至 } \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix},$$

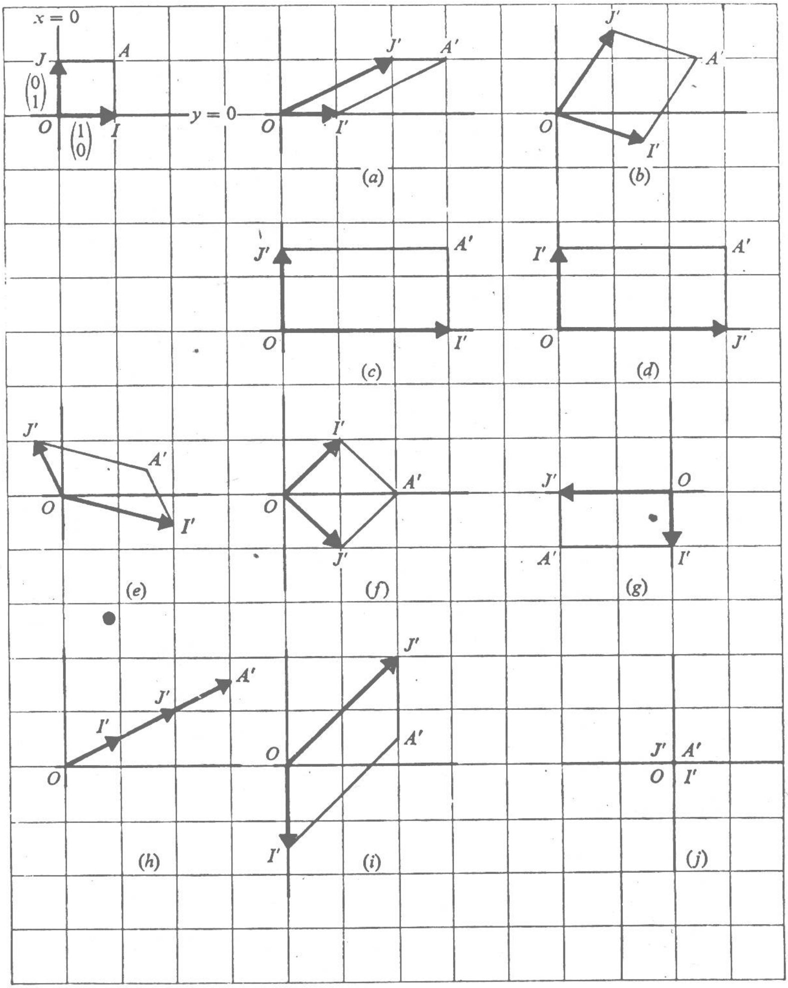


圖 6

回答下面的問題：

(a) $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 的映像；

(b)題中放大的放大率；

(c)旋轉的旋轉角度；

(d)表示**T**的矩陣？

5. (a)設矩陣 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$

表示某一變換，描述此矩陣在單位正方形上的幾何功用。

(b)此變換的面積放大率爲多少？寫出類似的變換，其面積放大率也相同的矩陣。

摘要

當一個變換藉矩陣用下面的形式來描述時，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$

基底向量 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

分別映至向量 $\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$。

這兩個向量分別與定義矩陣的行相同。原點在這類變換下永遠保持不變。

3.合成變換

在第三册第二章中，你看到了如何將兩個變換組合以產生第三個變換。

比方說：

A是"對 $y=x$"鏡射的變換，

B是"對 $y=0$"鏡射的變換，

那麼經過**A**後跟着做**B**的效果，等於單一的變換**C**"對原點順時針旋轉90°"。

圖 7 中利用 **A** 和 **BA** 在三角形 T 上的效果加以說明。

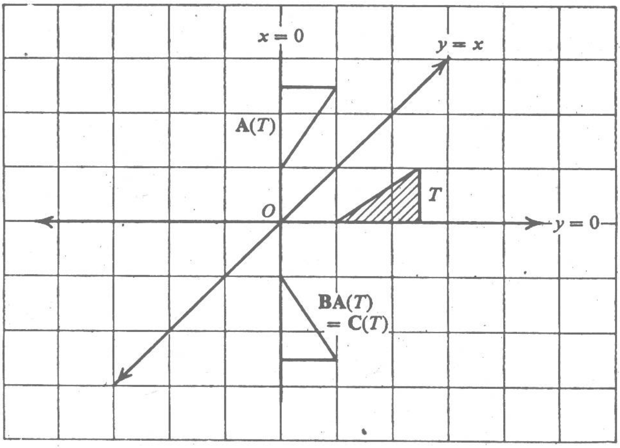


圖 7

注意在圖中 **BA** (T) 表示三角形先經 **A** 後再做 **B** 的映像。回想一下，寫着緊靠着作用物旁的變換（即例中的 **A**）應該先作用。

(a)分別寫出表示變換 **A**，**B** 和 **C** 的矩陣並求 **BA**，你們注意到什麼嗎？（此處我們以同樣的文字表示矩陣和變換。）

(b)矩陣 **AB** 表示那一個單一變換？

(c)設 $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 和 $\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ 分別定義兩個變換。

頂點為 **U**（1，0），**V**（0，2），**W**（0，0）的三角形，先經 **P** 再經 **Q** 做變換的結果與以 **QP** 變換的結果相同嗎？以圖形證明。

例：2

在圖 8 中，正方形 $PQRS$ 映至 $P'Q'R'S'$，以一系列的變換描述此變化，並由此求出表此變化的單一變換 **T** 的矩陣。

能將 $PQRS$ 映至 $P'Q'R'S'$ 的一系列變換為首先

L：以原點爲中心，放大率爲 3 的放大；其次

M：對直線 $y = x$ 的鏡射；最後

N：平移 $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ 。

（注意平移一定會將原點移動。）

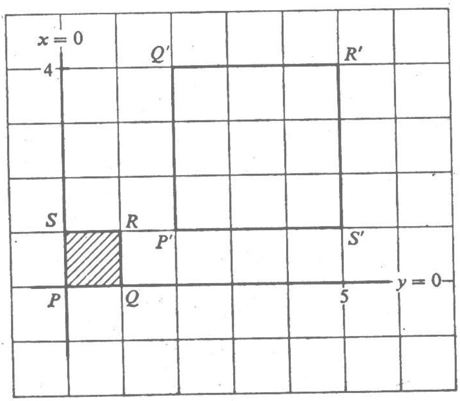


圖 8

圖 9 說明 $PQRS$ 映至 $P'Q'R'S'$ 過程中的每一個變換。

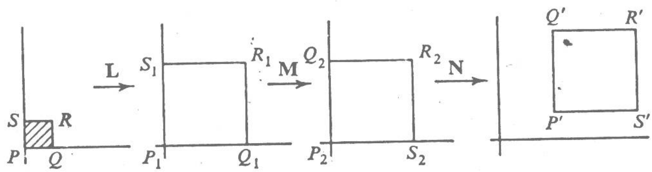


圖 9

這些變換能以函數分別描述如下：

$$\mathbf{L}: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N}:\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

當用變換的矩陣表示法組合時，我們得到

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&\xrightarrow{\mathbf{L}}\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\\&\xrightarrow{\mathbf{M}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\\&\xrightarrow{\mathbf{N}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

因此所要求的變換 $\mathbf{T}$ 爲

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&3\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

進一步簡化可得

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3y+2\\3x+1\end{pmatrix}.$$

(d)將頂點 P, Q, R 和 S 的坐標代入此函數，驗算所得的結果。

摘要

一般而言，我們發現只要變換 $\mathbf{C}$ 是先經變換 $\mathbf{A}$ 後，跟着做變換 $\mathbf{B}$ 組合而成時，那麼定義 $\mathbf{C}$ 的矩陣等於定義 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的矩陣相乘積 $\mathbf{BA}$。

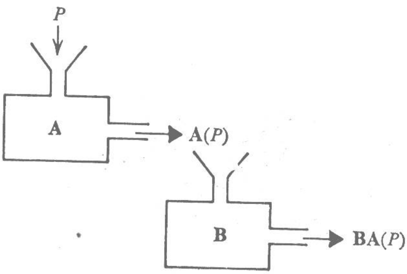


圖 10

習題 C

1. 求一個單一變換等於對 $x=y$ 鏡射後，跟着對 $x=0$ 鏡射。

(a)利用在簡單的幾何圖形上的變化；

(b)利用相對應矩陣的相乘。