高等数学
学習方法指示書

（初 稿）

高等工業函授学校学生用

(II)

1957

目 次

各章学習方法指示

第一篇　解析几何

第六章　矢量代数初步及空間直角坐标

先讀§§6.1,6.2,6.3,然后讀学習方法指示1,2,3。再讀§§6.4—6.7后讀学習方法指示4。做習題№№1.6.1—1.6.13。

讀§§6.8,6.9,6.10。讀§6.10时，关于矢量的矢量積具有分配律的性質的証明略去不讀。§6.11全部略去不讀。讀学習方法指示5。做習題№№1.6.14—1.6.19。

回答自我檢查題。

学習方法指示

1.在开始学習空間解析几何时，学生时常因缺乏空間概念而感到困难。在这种情况下，用小棒及紙板制作模型以代替講义中的圖來進行学習是会有帮助的。在做題目时如果需要，也可如此，以便思考。

学生以后在学習力学，物理以及其他一些应用科学时会不止一次地应用到矢量概念。如力，速度，加速度，这些量就都是矢量。因此对矢量理論的学習应給予更大的注意。

2.矢量代数初步是指关于矢量的代数运算的初步知識。其中討論了矢量的加法。減法和乘法。要注意矢量的代数运算和数量的代数运算是有区别的。矢量間的运算都与力学中有方向的量間的相当的計算直接有关。例如，矢量的加法和減法对应着力的相加和相減。矢量間的乘法有两种：两矢量的数量積(§6.8)与两矢量的矢量積(§6.10)。前者对应着求力在某段路程上所作的功，而后者对应着求力关于某点的力矩。

必须明确每一种矢量运算的定义并注意它們所具有的一些基本性質。

在書本上，往往用黑体字(或称肥体字)來表示矢量，例如 **a**, **b**, **i**, **j**。但用手書寫肥体字并不方便，因此采用平常的字母而上面加一箭头，例如 $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$。后一种寫法表示 A 是矢量的起点而 B 是終点。

3. 两矢量相等必須同时满足三个条件：(1)两矢量的長度相等，(2)两矢量平行(或同在一直綫上)，(3)两矢量的指向（由起点到終点的方向)相同。因此要考慮一个矢量等式（卽等号的两端是两个矢量）是否成立，必須分别考慮这三个条件是否都滿足。例如 § 6.3 公式 (1)(2) 就是这样証明的。

4. 注意矢量在軸上的投影是一个数量而不是一个矢量，也不是一个綫段。

設矢量 $\overrightarrow{AB}$，投影軸为 u，点 A 及点 B 在軸 u 上的投影分别为 a 及 b(講义上册 94 頁圖 6.7)。$\overrightarrow{AB}$ 在軸 u 上的投影并不是有向綫段 $\overline{ab}$ 本身而是 $\overline{ab}$ 在軸上的值 $a\,b$(参閱 § 1.1)，因此它是一个数量。

矢量在坐标軸上的投影称为矢量的坐标。

設矢量 $\vec{a}$ 在 x 軸，y 軸，z 軸上的投影分别为 x_1，y_1，z_1 則用記号 $\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$ 來表示它的坐标。

設 $\qquad \vec{A}=\{x_1, y_1, z_1\}$，$\vec{B}=\{x_2, y_2, z_2\}$，

則
$$\vec{A}+\vec{B}=\{x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2\},$$
$$\vec{A}-\vec{B}=\{x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2\},$$
$$\lambda\vec{A}=\{\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1\}.\ (\text{参閱 § 6.6})$$

由此可見，用矢量的坐标來作矢量运算是很方便的。

要知道矢量的坐标(卽矢量在軸上的投影)与矢量在坐标軸上的分矢量之間的区别：前者是数量而后者是矢量。設 $\vec{a}=\{x, y, z\}$，又 **i**, **j**, **k** 为基本單位矢量，則 $x\cdot\mathbf{i}$, $y\cdot\mathbf{j}$ 及 $z\cdot\mathbf{k}$ 分别为矢量 $\vec{a}$ 在 x 軸，y 軸及 z 軸上的分矢量。这就是說，矢量在某坐标軸上的坐标(亦卽矢量在某坐标軸上的投影)乘上該坐标軸的基本單位矢量，卽得矢量在該坐标軸上的分矢量。而 $\vec{a}$ 可以表示为三个分矢量之和：

$$\vec{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}.$$

必須分淸矢量的坐标及点的坐标这两个不同的概念。設矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 x, y, z，即 $\overrightarrow{AB}=\{x, y, z\}$，又設点 A 的坐标为 (x_1, y_1, z_1)，点 B 的坐标为 (x_2, y_2, z_2)；則矢量的坐标与矢量的起点及終点的坐标間有下列关系：

$$x=x_2-x_1,\quad y=y_2-y_1,\quad z=z_2-z_1.$$

这就是說，矢量在某軸上的坐标，等于矢量的終点在該軸上的坐标減去矢量的起点在該軸上的坐标。

因

$$\overrightarrow{AB}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k},$$

于是有

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}+(z_2-z_1)\mathbf{k}.$$

特別，如果矢量的起点与坐标系的原点重合，則这时因 $x_1=0$，$y_1=0, z_1=0$ 而有

$$x=x_2,\quad y=y_2,\quad z=z_2.$$

这表示，当矢量的起点在坐标系的原点时，矢量的坐标便与矢量的終点的坐标在数値上相等（注意在概念上两者是不同的，前者是矢量的坐标，后者是点的坐标）。

例題 1. 求單位矢量 $\overrightarrow{AB}^\circ$（这是与矢量 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同而長度为 1 的矢量），若已知点 A 的坐标为 $(4, 0, 5)$ 而点 B 的坐标为 $(7, 1, 3)$。

解　$\overrightarrow{AB}=(7-4)\mathbf{i}+(1-0)\mathbf{j}+(3-5)\mathbf{k}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}.$

为了求与矢量 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的單位矢量 $\overrightarrow{AB}^\circ$，应当把矢量 $\overrightarrow{AB}$ 除以矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的長 $|AB|$：

$$\overrightarrow{AB}^\circ=\frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|}.$$

矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的長由下式确定：

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

在本題中:

$$|AB|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14}.$$

因此,所求單位矢量为:

$$\overrightarrow{AB}^\circ=\frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{j}-\frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{k}.$$

5. 两矢量的矢量積是一个矢量而不是一个数量。$|A|\,|B|\sin(\widehat{A,B})$只是矢量 A 和 B 的矢量積的模而不是矢量積本身。要表达矢量積是怎样的一个矢量,除了説明它的模以外,必須同时説明它的方向。在两矢量的矢量積的定义中有三个条件,其中(i)是説明矢量積的模(ii)及(iii)是説明矢量積的方向。这三个条件合起來才能完全地表达矢量積。切勿把条件(i)中的 $|A||B|\sin(\widehat{A,B})$ 当作矢量積本身,它只是矢量積的模。

例題 2. 一三角形,它的两边是矢量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$。已知

$$\vec{a}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k},\quad \vec{b}=2\mathbf{i}+5\mathbf{k},$$

求这三角形的面積。

解　先求出矢量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的矢量積 $\vec{c}$:

$$\vec{c}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & -1 & -1\\ 2 & 0 & 5\end{vmatrix}=-5\mathbf{i}-17\mathbf{j}+2\mathbf{k}.$$

所求三角形面積等于矢量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 为两边的平行四边形面積之半:

$$S=\frac{1}{2}|\vec{c}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2+(-17)^2+2^2}=\frac{1}{2}\sqrt{318}\approx 8.9\text{平方單位}.$$

例題 3. 求同时垂直于两矢量 $\vec{a}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$ 及 $\vec{b}=2\mathbf{i}+5\mathbf{k}$ 的矢量。

解　由两矢量的矢量積的定义知道: $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的矢量積 $\vec{c}$ 是一个同时垂直于 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的矢量。又由矢量与数量的乘積的定义知道: 設 λ 为任一不为零的实数,則 $\lambda\vec{c}$ 与 $\vec{c}$ 平行。

由例題 2 知道 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}=-5\mathbf{i}-17\mathbf{j}+2\mathbf{k}$. 因此,

$$\lambda\vec{c}=-5\lambda\mathbf{i}-17\lambda\mathbf{j}+2\lambda\mathbf{k}$$

(其中 λ 为不等于零的任意实数)表示所有同时垂直于矢量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的矢量。

例題 4. 已給点 $A(-4,5,1)$, $B(2,7,-2)$, $C(5,-6,-4)$ 及 $D(-4,6,4)$。确定矢量 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{CD}$ 間的夾角 φ。

解　由題給条件求得:

$$\overrightarrow{AB}=6\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k},$$

$$\overrightarrow{CD}=-9\mathbf{i}+12\mathbf{j}+8\mathbf{k},$$

$$|AB|=\sqrt{6^2+2^2+(-3)^2}=7,$$

$$|CD|=\sqrt{(-9)^2+12^2+8^2}=17.$$

依公式求得矢量 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{CD}$ 的数量積为:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=6\cdot(-9)+2\cdot 12+(-3)\cdot 8=-54.$$

依公式求得矢量間的夾角:

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|AB|\cdot|CD|}=\frac{-54}{7\cdot 17}=-\frac{54}{119}=-0.454.$$

查表,得 $\varphi=117^\circ$。

自我檢查題

1. 矢量与坐标軸的正向間的三个夾角 α, β, γ 是否都是可以任意給定的?

2. 矢量 $\vec{a},\vec{b},\vec{a}+\vec{b}$ 能否構成一个三角形?

3. 举出矢量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 能構成一个三角形的条件。

4. 矢量在坐标軸上的分量与矢量在坐标軸上的投影有何区别?

5. 設 $\vec{a}^\circ$ 及 $\vec{b}^\circ$ 为單位矢量, 問矢量 $\dfrac{\vec{a}^\circ\times\vec{b}^\circ}{\sin(\vec{a}^\circ,\ \vec{b}^\circ)}$ 的長等于多少?

6. 試証,由任一三角形的三条中綫可以構成一个三角形。

7. 設 $\vec{a}=\{1,-2,2\}$, $\vec{b}=\{-2,4,m\}$; 要 $\vec{a}\parallel\vec{b}$, m 应等于多少? 要 $\vec{a}\perp\vec{b}$, m 应等于多少?

第七章　曲面方程与曲綫方程

讀§§7.1, 7.2, 7.3后，讀学習方法指示。再讀§7.4。做習題№№1.7.1—1.7.11。

学習方法指示

在§7.3中必須分淸楚同一方程$F(x,y)=0$表示平面上的曲綫和空間的柱面这两种情形的不同之点。

如果把x及y看成平面上的点(x,y)的橫标及縱标，則方程$F(x,y)=0$表示平面上的曲綫。如果把x及y看成空間的点(x, y, z)的橫标及縱标，則方程$F(x, y)=0$表示空間的柱面。在平面解析几何中，方程$F(x,y)=0$表示曲綫，这是不会有什么誤解的。在空間解析几何中，如果沒有特別声明，我們总認为方程$F(x,y)=0$表示柱面。

在柱面方程$F(x,y)=0$中，它沒有包含点(x,y,z)的直标z。因此，如果(x_1,y_1,z_1)滿足这方程，則(x_1,y_1,z_2)，$(x_1,y_1,z_3)\cdots$等也都滿足这方程。这就是說，其中直标z是可以任意的。但所有的点(x_1,y_1,z)，其中z是任意的，都在平行于z軸的直綫上，因此柱面$F(x, y)=0$的母綫是平行于z軸的。

第八章　空間的平面及直綫

讀§§8.1—8.6后，讀学習方法指示1，2。做習題№№1.8.1—1.8.12。

讀§§8.7—8.12，讀学習方法指示3，4，5。做習題№№1.8.13—1.8.26。

回答自我檢查題。

学習方法指示

1. §8.1定理1及定理2指出：任何平面总可以用笛卡兒坐标x，y，z間的一次方程來表示；反之，每一个一次方程$Ax+By+Cz+D=0$表示一个平面。上述定理也适用于所謂不完全方程；这就是説，常数A，B，C，D中可以有一个或几个为零，但A，B，C同时为零的情形必須除外。例如，方程$2x+3y-7=0$在空間确定一平面L。这平面平行于z軸（这軸正好就是方程中缺少它的坐标的那个軸）。在平面解析几何中，我們知道，这方程确定xOy平面上某一直綫l。在空間來説，直綫l可作为平面L（它的方程为$2x+3y-7=0$）与平面xOy（它的方程为$z=0$）的交綫。因此，直綫l在空間由下列两个方程給定：

$$\begin{cases}2x+3y-7=0\\ z=0.\end{cases}$$

在平面解析几何中，直綫与一次方程$Ax+By+C=0$有密切的关系。在空間解析几何中，空間的平面与一次方程$Ax+By+Cz+D=0$也有密切的关系。正是由于这样的原因，空間平面的問題与平面解析几何中直綫的問題便有很多类似之处。因此在学習中如果把双方对照起來，这样对学習是有帮助的。

2. 在考慮有关平面的問題时平面的法綫矢量$\vec{n}$往往起着重要的作用。

如果一平面由方程$Ax+By+Cz+D=0$給定，则以x，y，z的系数

A,B,C 为坐标的矢量就是該平面的一法綫矢量。因此 $\vec{n}=\{A,B,C\}$。平面方程中的系数的这一几何意义学生必須重視。

3. 在空間，直綫通常是作为两个平面的交綫來給定的，因此在笛卡兒坐标系中直綫就由两个一次方程所确定。

但是經过一直綫有无限多的平面；其中任何两个平面的交綫都可以确定同一条直綫。因此，由两个一次方程联立起來表示某一直綫的形式也不是唯一的。

所謂直綫的标准方程是：

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}.$$

必須知道，这标准方程实际包含着两个方程，例如：$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}$ 及 $\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$。这两个方程都是一次的，因此都是表示平面。第一个方程中缺少 z，这表示第一个平面平行 z 軸。第二个方程中缺少 x，这表示第二个平面平行 x 軸。这两个平面的交綫就是标准方程所給定的直綫。

在考慮有关空間直綫的問題时，直綫的方向矢量 $\vec{s}$ 起着重要作用。如果直綫由标准方程給出，則以分母中的数 m,n,p 为坐标的矢量就是所給直綫的方向矢量。因此 $\vec{s}=\{m,n,p\}$。在应用上直綫的标准方程的形式比較方便的原因也就在此。

4. 在两平面的夾角（§ 8.6），两直綫的夾角（§ 8.9），及直綫与平面的夾角（§ 8.10）这几个問題中，平面的法綫矢量 $\vec{n}$ 与直綫的方向矢量 $\vec{s}$ 起着主要的作用。認清楚这两个矢量，則所有这些問題就都归結到两矢量間的夾角問題及两矢量平行或垂直的問題。

5. 例題 1. 化直綫方程：

$$\begin{cases}2x-3y-3z-9=0 & (1)\\ x-2y+z+3=0 & (2)\end{cases}$$

为标准方程的形式。

解 1° 直綫的标准方程的形式为：

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}.$$

2°为了找出直綫上的一个点，应該解由方程(1)(2)所組成的方程組。这方程組有无限多个解，但現在只要求出其中任何一个解就够了。如此，可以令 $x=0$，从而求出 $y=0, z=-3$。这表示，点 $M_0(0,0,-3)$ 在所給直綫上。故可以令 $a=b=0, c=-3$。

3°平面(1)的一法綫矢量为 $\vec{n}_1=\{2,-3,-3\}$。平面(2)的一法綫矢量为 $\vec{n}_2=\{1,-2,1\}$。$\vec{n}_1$ 及 $\vec{n}_2$ 都垂直于平面(1)及(2)的交綫，也就是垂直于所給直綫的方向矢量 $\vec{s}=\{m,n,p\}$。

4°由垂直条件 $\vec{n}_1\perp\vec{s}, \vec{n}_2\perp\vec{s}$ 得:

$$\begin{cases}2m-3n-3p=0\\ m-2n+p=0.\end{cases}$$

解这方程組(参閱講义上册 § 5.5 公式(5)，第 83 頁)得

$$m=k\begin{vmatrix}-3 & -3\\ -2 & 1\end{vmatrix},\quad n=k\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix},\quad p=k\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix},$$

其中 k 可任意选定。为簡單起見，取 $k=-1$，如此得 $m=+9, n=+5, p=+1$。

因此，所求的直綫标准方程为:

$$\frac{x}{9}=\frac{y}{5}=\frac{z+3}{1}.$$

例題 2. 經过直綫:

$$\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{4} \tag{3}$$

作平面，a)平行于平面

$$x+y-z+15=0; \tag{4}$$

b)垂直于平面(4)。

解 这問題只有当所給的直綫(3)及平面(4)平行时才有解。事实上，它們的确是平行的，因为 $1\cdot3+1\cdot1-1\cdot4=0$。

設所求平面方程为:

$$A_1(x-a)+B_1(y-b)+C_1(z-c)=0.$$

因所求平面經过直綫(3)，故可以令 $a=-5, b=2, c=0$。这样，所

求平面方程可寫为:

$$A_1(x+5)+B_1(y-2)+C_1z=0. \tag{5}$$

矢量 $\vec{n}_1=\{A_1, B_1, C_1\}$ 是平面(5)的法綫矢量。

矢量 $\vec{n}=\{1,1,-1\}$ 是平面(4)的法綫矢量。

a)因平面(5)与平面(4)平行，$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}$。故可以令 $A_1=1$，$B_1=1$，$C_1=-1$。于是，所求平面方程为:

$$(x+5)+(y-2)-z=0 \quad 或 \quad x+y-z+3=0.$$

b)因平面(5)垂直于平面(4)，$\vec{n}_1 \perp \vec{n}$，因此有:

$$A_1+B_1-C_1=0. \tag{6}$$

又因平面(5)經过直綫(3)，平面(5)的法綫矢量必和直綫(3)的方向矢量 $\vec{s}=\{3,1,4\}$ 垂直。因此又有:

$$3A_1+B_1+4C_1=0. \tag{7}$$

联立方程(6)及(7)得方程組。从这方程組中可解出 A_1, B_1, C_1:

$$A_1=k\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}, \quad B_1=k\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}, \quad C_1=k\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix},$$

其中 k 可任意选定。为簡單起見，取 $k=1$，如此得 $A_1=5$，$B_1=-7$，$C_1=-2$。于是，所求平面方程为:

$$5(x+5)-7(y-2)-2z=0 \quad 或 \quad 5x-7y-2z+39=0.$$

自我檢查題

1. 平面方程 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-5}+\dfrac{z}{6}=1$ 中系数的倒数（即 3, -5, 6）有何几何意义?

2. 平面方程 $\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}y+\dfrac{2}{3}z-1=0$ 中的系数有何几何意义?

3. 要使方程 $Mx+Ny+Lz+K=0$ 为平面的法綫式方程，数 M, N, L 及 K 应满足何种条件?

4. 若平面方程中缺常数項，則平面关于坐标軸的位置如何?若缺一个坐标呢?若缺两个坐标呢? 若缺一个坐标及常数項呢? 若缺两个坐标及常数項呢?

5. 如何求两平行平面間的距离？分别考慮坐标原点在这两平面之間及不在其間两种情形。

*6. 点(x_1, y_1, z_1)及点(x_2, y_2, z_2)在平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的异側。乘積 $(Ax_1+By_1+Cz_1+D)(Ax_2+By_2+Cz_2+D)$ 是正的还是負的？

7. 如何証实已知点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$在已知平面上？

8. 寫出經过直綫 $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$ 的平面束的方程。

9. 求直綫 $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$ 与平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 相交的条件。什么情形下这直綫在該平面內？

10. 求两直綫 $\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1}$ 及 $\frac{x-a_2}{m_2}=\frac{y-b_2}{n_2}=\frac{z-c_2}{p_2}$ 重合的条件。

11. 求直綫 $\begin{cases} y=ax+b \\ z=cx+d \end{cases}$ 的方向矢量与坐标軸間的夾角。这問題有几个答案？

12. 寫出 x 軸，y 軸及 z 軸的方程.

*13. 已知空間一点的坐标及一直綫的方程，求点与直綫間的距离(过已知点作平面垂直于已知直綫得一交点，已知点与交点間的距离称为点与直綫間的距离)。

第九章　二次曲面

讀講义§§9.1—9.8。讀学習方法指示1—4。做習題№№1.9.1—1.9.9。

回答自我檢查題。

学習方法指示

1. 講义中用考察截痕的方法來研究二次曲面的形狀。通常是用坐标面及平行于坐标面的平面去截所要考察的曲面，这些平面与曲面的交綫就称为截痕。这些截痕都是平面曲綫，因而它們的形狀比較容易認識。由各个方向的（卽平行于各个坐标面的）截痕的了解，合起來便能認識所要考察的曲面的形狀。这种研究二次曲面形狀的方法，学生必須确切掌握。

2. 在自然科学及技術实踐中常常会碰到二次曲面。我們只举两个例子來說明这一事实。

地球可以看作一个球只是初步近似。較精确应当把地球想像为旋轉橢圓体。它的联結南北两極的軸比另一軸——赤道的直徑——短些（我們指出，关于地球形狀的这种表示法也只是近似的。更精确的考察認为，地球表面具有某一四次曲面的形狀。但是卽使这种進一步的考察，也不过改善近似程度而已）。

我們从另一知識領域中來举一个例子。取一反光鏡，它具有旋轉拋物面的腹面（卽向內凹的一面）的形狀。可以証明，放在这曲面的焦点上的光源所發出的光綫，經过这拋物鏡面反射后，成为一束完全平行的光綫。这束光綫較球面鏡所反射出來的光綫更强，且傳播得更远。后者当光源放在焦点（卽球心）时，光綫經反射后僅給出一束近似平行的光綫。因此，在制造光綫强烈的探照灯时通常应用拋物鏡。

3. 在实用上以及后面的数学分析中，柱面，錐面及旋轉曲面都比較重要。特别，母綫平行某一坐标軸的柱面（它由所謂不完全方程，卽缺

少某一坐标的方程所表示，参閱 § 9.8）及頂点在坐标原点的錐面（它由齐次方程所表示）以后常会碰到。学生应当学会迅速地根据它們的方程來辨認出这些曲面。

关于母綫平行于某一坐标軸的柱面的方程，学生不妨再去閱讀一下第七章（第一篇）的学習方法指示。

4. 学会寫出由一条在某一坐标平面上的曲綫（它在該坐标平面上的方程已給定）繞两坐标軸之一旋轉而成的曲面的方程也是重要的。

例題　直綫

$$\frac{x}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{0} \tag{1}$$

繞 y 軸旋轉。求由此而成的曲面的方程。

解　所給直綫交 y 軸于点 $A(0,2,0)$（圖 1）。

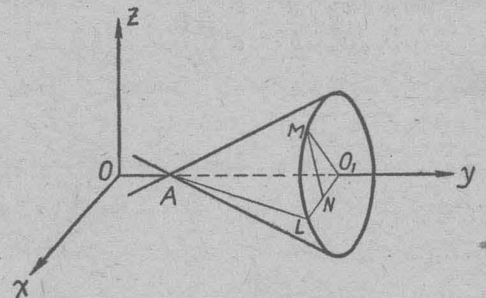

圖 1

因而，所求曲面为頂点在点 $A(0,2,0)$ 的錐面。在 xOy 平面上，所給直綫 AL 由下列方程表示：

$$\frac{X}{2}=\frac{Y-2}{3}. \tag{2}$$

設 $M(x,y,z)$ 为所求曲面上的任意点，而 $L(X,Y)$ 为所給直綫上的点，这点与点 M 同在一垂直于 y 軸的平面上。

这里，
$$y=Y,\ x^2+z^2=X^2$$

（在直角三角形 O_1MN 中 $NM=z, O_1N=x, O_1M=O_1L=X$）。

將 $Y=y, X=\pm\sqrt{x^2+z^2}$ 代入方程(2)，得所求方程:

$$\frac{2}{3}(y-2)=\pm\sqrt{x^2+z^2} \quad 或 \quad 4(y-2)^2-9x^2-9z^2=0.$$

自我檢查題

1. 將平面曲綫 $f(x, y)=0$ 繞 y 軸旋轉所得的旋轉曲面的方程有怎样的形式?

2. 將抛物綫 $x^2=2py$ 繞它的对称軸 Oy 旋轉，得什么曲面?

3. 將双曲綫 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 繞 x 軸旋轉，得什么曲面?繞 y 軸呢?

4. 在什么条件下一般二次方程表示一球面?

5. a 及 b 滿足什么条件时橢圓柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 成为以 z 軸为旋轉軸的旋轉曲面?关于單叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

回答同样的問題。

第二篇 数学分析

第十一章 多元函数的微分法及其应用

先讀学習方法指示1，然后讀講义§§11.1，11.2，11.3。再讀学習方法指示2，3。做習題№№2.11.1—2.11.10。

讀講义§11.4，讀学習方法指示4，5，6。做習題№№2.11.11—2.11.17。

講义上§11.5全部略去不讀。

讀講义§11.6，讀学習方法指示7。做習題№№2.11.18—2.11.22。

讀§11.7(其中第II部分略去不讀)，讀学習方法指示8。做習題№№2.11.23—2.11.25。

讀§§11.8，11.9，讀学習方法指示9。做習題№№2.11.26—2.11.28。

讀講义§11.10(其中定理的証明略去不讀)，讀学習方法指示10。做習題№№2.11.29—2.11.31。

講义上§11.11全部略去不讀。

讀講义§11.12(其中关于充分条件的証明略去不讀)，讀学習方法指示11。做習題№№2.11.32—2.11.35。講义上§11.13全部略去不讀。回答自我檢查題。

学習方法指示

1. 学習本章时，应当与單元函数相对照。例如学習§§11.1，11.2时，就应注意到，关于多元函数的函数、極限、連續这三个概念与單元函数的这三个概念有哪些相同的地方？有哪些不同的地方？对于其他几節的学習也应該这样。

2. 存在于物質世界中的联系及規律性的研究时常归結到不是一个