# 阶梯奥数

主编／陈国强

本书适用于七、八年级

2下

脑筋急转弯

发行量最小的报是什么报？

答案：

电报。

上海科学普及出版社

责任编辑／郭子安
特约编辑／赵　毅
封面设计／零　语

本书适用于七、八年级

ISBN 7-5427-2458-4

9 787542 724588 >

ISBN 7-5427-2458-4/O·84
全套定价：46.00元（共二册）

# 阶梯奥数

## 2（下）

（本书适用于七、八年级）

陈国强　主编

上海科学普及出版社

SiWeiXunLian

**主　编：** 陈国强

**副主编：** 夏钟英

**编　委：** 夏钟英　唐清成　朱　瑞　李岚雄

郑曾波　张　达　朱文革　陈慧珍

魏新魁　刘淑珍　常文武　郭震渔

施　斌　田廷彦　魏　磊　王之任

## 内 容 提 要

本书是为小学高年级和初中阶段在数学学习上学有余力的优秀学生提供的竞赛培训教材或数学较好者自学的课外读物。

该书是一些长期在第一线从事数学竞赛数学的教师多年实践的知识积累和总结。按照学生所学基础知识的程度，由浅入深、从易到难、分门别类地把内容归纳成许多专题，在每个专题中力求简炼地介绍知识的由来、要点和重要定理及公式，再通过典型的例题和练习来展开知识的探究，并进行归纳和总结。从而使学生一级一级地沿着知识的阶梯循序渐进，这种做法将有利于培养学生学习数学的兴趣和自信心。

# 序

现在我们常说的一个名词是“素质教育”。到底素质教育指的是什么？是不是简单地指那些课外的活动？学生除了正常的文化课学习以外，再搞一些舞蹈、书法班的训练，就算是得到素质教育了？不可否认，艺术教育也提高学生的素质。但是素质教育的内容也许应该更加广一些，我们学生现在所需要的素质也应该包括文化课的素质。

我对中学的教育也很感兴趣。曾经认识了几位中学的校长，我们对学校素质教育的看法在很大程度上有相同之处，大家认为素质教育也应该体现在文化课的教育中，特别是数学教育中。在进华中学陈国强校长的倡导下，几十位多年从事中学数学提高教育的大学教授、数学博士、奥数教练员、中学资深数学教师聚集一起，开始了在数学课程教育中的实验。我们的主要想法是通过数学课程的教育让学生认识数学、理解数学、掌握数学，这就是学生所需要的素质。这个实验已经进行了六年多了，收到了不错的效果，培养出一大批有扎实数学基础的初中毕业生。

现在的这套书，是实验的一部分，希望暨此能够提高学生学习数学的兴趣。很小的时候我也读过一些有趣的数学小册子，但现在这些小册子很难找了，不敢说现在的这套书十全十美了，但是对于希望理解数学、学习奥数的小学高年级和初中学生，应该是有帮助的。我

很希望这套书能够受到学生们的喜欢，也希望看到有更多的这类书能够出版。

上海交通大学数学系教授　周　青

2003.3.25

# 目　录



SiWeiXunLian

**脑筋急转弯**

什么东西天气越热,他爬得越高?

**答案:**

温度计。

**智力魔方**

九寨沟共有多少个充满神奇传说的彩色湖?

**答案:**

108 个。

# 第一讲　根式的化简与求值

在二次根式中有一类根式：二次根式中套叠着二次根式，称为复合二次根式.

对于复合二次根式$\sqrt{a\pm 2\sqrt{b}}$，如满足以下条件，则可以化简：

(1) $a>0$，$b>0$，

(2) $a^2-4b=k^2 \quad (k>0)$

根式的化简、求值，方法灵活，形式多样，应根据各题的特点、特性，利用方根性质和运算法则，采用平方、换元、配方、待定系数、构造以及逆向思维等方法，使问题得以化简.

在根式的化简中还常用到共轭根式与有理化因式.

**【例 1】** 计算

1. $\dfrac{\sqrt{5}+3\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}+\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

2. $\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{15}+\sqrt{21}+\sqrt{35}+5}$.

解：1. 原式$=\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})+3(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}+\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3}$$

$$=2\sqrt{5}-2\sqrt{2}.$$

2. 原式$=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})+(\sqrt{5}+\sqrt{7})}{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{7})+\sqrt{5}(\sqrt{5}+\sqrt{7})}$

SiWeiXunLian

**脑筋急转弯**

一只毛毛虫要用什么方法才能通过一条没有桥梁的河流？

**答案：**

变成蝴蝶后飞过去。

$$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})+(\sqrt{5}+\sqrt{7})}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\frac{1}{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{3}).$$

**【例 2】化简**

1. $\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

2. $\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}$.

3. $\sqrt{21-4\sqrt{5}+8\sqrt{3}-4\sqrt{15}}$.

解：1. 原式 $=\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}+\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}$

$$=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$$

$$=\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1$$

$$=2\sqrt{3}.$$

2. 设 $\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}=x$

则 $x^2=4+\sqrt{7}+4-\sqrt{7}+2\sqrt{(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})}$

$$=8+2\sqrt{16-7}$$

$$=14$$

$\therefore\quad x=\sqrt{14}$

即 $\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}=\sqrt{14}$.

3. 分析：本题被开方式内有 4 项，难以配成完全平方式，但由于有三个不同根式，且系数均为 2 的倍数，可看作 $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}$ 的完全平方的结果，可用待定系数法.

设 $\sqrt{21-4\sqrt{5}+8\sqrt{3}-4\sqrt{15}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}$，

则 $21-4\sqrt{5}+8\sqrt{3}-4\sqrt{15}=x+y+z-2\sqrt{xz}+$

**智力魔方**

古代树木演变成为现在哪种地下矿藏？

**答案：**

煤。

$2\sqrt{xy}-2\sqrt{yz}$

比较系数得$\begin{cases}x+y+z=21, & ①\\ xy=48, & ②\\ xz=20, & ③\\ yz=60. & ④\end{cases}$

②×③×④　　$x^2y^2z^2=12^2\times2^2\times10^2$,

∴　$xyz=240$,

∴　$z=5, y=12, x=4$,

这时 $x+y+z=4+12+5=21$ 满足①

∴　原式$=2+2\sqrt{3}-\sqrt{5}$.

**【例 3】** 化简$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$.

分析:本题根指数为 3,但被开方式为共轭根式,可采用构造法求解

解:设 $x=a+b$,

其中 $a=\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$, $b=\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$

则 $x^3=(a+b)^3$

$=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$=1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}+1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}+$

$3\cdot\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)}\cdot x$

$=2-x$,

∴　$x^3+x-2=0$,

即$(x-1)(x^2+x+2)=0$.

∵　$x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$,

∴　$x-1=0$ 即 $x=1$,

∴　原式$=1$.

SiWeiXunLian

**脑筋急转弯**

20 个小朋友去秋游,现在这辆车只能乘 10 个人,他们要怎样才能乘上同一辆车一起出去秋游?

**答案:**

换一辆大一点儿的车。

【例4】化简：

①$2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

②$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

解：1. 原式$=2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{(\sqrt{12}+1)^2}}}$

$=2\sqrt{3+\sqrt{5-2\sqrt{3}-1}}$

$=2\sqrt{3+\sqrt{3}-1}$

$=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$=\sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}$

$=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

2. 原式$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

$\cdot\sqrt{(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}})(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}})}$

$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{(2+\sqrt{2+\sqrt{3}})(2-\sqrt{2+\sqrt{3}})}$

$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$=\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$

$=1$.

【例5】若$\sqrt{11-6\sqrt{2}}$的整数部分是$a$，小数部分为$b$，求$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$的值.

解：$\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{9-2\cdot3\sqrt{2}+2}=\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}$

$=3-\sqrt{2}$.

**智力魔方**

黑啤酒发出香气是哪种植物的香味？

**答案：**

麦(芽)香。

$\because\quad 1<\sqrt{2}<2$,

$\therefore\quad \sqrt{11-6\sqrt{2}}=3-\sqrt{2}=1+(2-\sqrt{2})$,

$\therefore\quad a=1, b=2-\sqrt{2}$,

$\therefore\quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{1}{2-\sqrt{2}}+2-\sqrt{2}=3-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**【例 6】** 求大于$(\sqrt{5}+\sqrt{3})^6$的最小整数.

解：设 $x=\sqrt{5}+\sqrt{3}, y=\sqrt{5}-\sqrt{3}$,

则 $x+y=2\sqrt{5}, xy=2$.

$$\therefore\quad x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=20-4=16,$$

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &=(x+y)(x^2-xy+y^2)\\ &=2\sqrt{5}(16-2)=28\sqrt{5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad x^6+y^6 &=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3=3920-16\\ &=3904. \end{aligned}$$

$\because\quad 0<\sqrt{5}-\sqrt{3}=y<1$,

$\therefore\quad 0<y^6<1$,

$\therefore\quad 3904-1<x^6<3904$,

故大于$(\sqrt{5}+\sqrt{3})^6$的最小整数为 3904.

**【例 7】** 若 $x>0$, $y>0$，且 $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=8$，求 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$ 的值.

分析：由于两被开方式并非共轭根式，且如直接平方，则较为繁琐，如用换元法则较简便.

解：设 $x^{\frac{2}{3}}=p, y^{\frac{2}{3}}=q$

则 $\sqrt[3]{x^4y^2}=x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}=p^2q$, $\sqrt[3]{x^2y^4}=pq^2$, $x^2=p^3$, $y^2=q^3$，所以原等式变形为

$$\sqrt{p^3+p^2q}+\sqrt{q^3+pq^2}=8$$

即 $\quad p\sqrt{p+q}+q(\sqrt{p+q})=8$

$$(p+q)\sqrt{p+q}=8$$

**脑筋急转弯**

什么原因造成小李的叔叔至今还没有结婚？

**答案：**

年龄太小，他叔叔才 12 岁。

$$(p+q)^{\frac{3}{2}}=8$$

$\therefore\quad (p+q)=4$

即 $\quad x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=4.$

**【例8】** ① 证明$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}}=\left|a+\frac{1}{b}-\frac{a}{ab+1}\right|$.

② 利用①计算$\sqrt{1+1990^2+\frac{1990^2}{1991^2}}-\frac{1}{1991}$.

分析:本题采用逆证法.

证明:① 假设等式成立,两边平方得

$$a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}$$

$$=a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}+2\left(\frac{a}{b}-\frac{a^2}{ab+1}-\frac{a}{b(ab+1)}\right).$$

$\because\quad \frac{a}{b}-\frac{a^2}{ab+1}-\frac{a}{b(ab+1)}=\frac{a^2b+a-a^2b-a}{b(ab+1)}=0,$

$\therefore\quad a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}=a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}.$

上式显然成立.

$\because$ 原等式左边$>0$,右边$>0$,

$\therefore$ 上述变形步步可逆,

$\therefore$ 原式成立.

② 原式$=\left|1990+1-\frac{1990}{1991}\right|-\frac{1}{1991}=1990.$

**【例9】** 设 $2001x^3=2002y^3=2003z^3$,$xyz>0$,

且$\sqrt[3]{2001x^2+2002y^2+2003z^2}$

$$=\sqrt[3]{2001}+\sqrt[3]{2002}+\sqrt[3]{2003},$$

求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$的值.

解:设 $2001x^3=2002y^3=2003z^3=k^3$,

则$\frac{k^3}{x^3}=2001,\frac{k^3}{y^3}=2002,\frac{k^3}{z^3}=2003,$

**智力魔方**

水仙虽然清香高洁,但它全株都有毒,它的含毒成分是什么?

**答案:**

生物碱。

$\because \quad \sqrt[3]{2001x^2+2002y^2+2003z^2}$

$=\sqrt[3]{2001}+\sqrt[3]{2002}+\sqrt[3]{2003}$,

$\therefore \quad \sqrt[3]{\frac{k^3}{x}+\frac{k^3}{y}+\frac{k^3}{z}}=\frac{k}{x}+\frac{k}{y}+\frac{k}{z}$,

即 $\quad k\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=k(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})$.

$\because \quad xyz>0$,

$\therefore \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.

**【例 10】** 若 $x\neq 0$，求$\frac{\sqrt{1+x^2+x^4}-\sqrt{1+x^4}}{x}$的最大值.

解：$\because \quad x\neq 0$

$\therefore \quad \sqrt{1+x^2+x^4}>\sqrt{1+x^4}$

即 $\quad \sqrt{1+x^2+x^4}-\sqrt{1+x^4}>0$

显然，当 $x>0$ 时，原式才可能取得最大值.

当 $x>0$ 时

$$原式=\frac{1+x^2+x^4-1-x^4}{x(\sqrt{1+x^2+x^4}+\sqrt{1+x^4})}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+x^4}+\sqrt{1+x^4}}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{x}(\sqrt{1+x^2+x^4}+\sqrt{1+x^4})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1+x^2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+x^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{x}-x)^2+3}+\sqrt{\left(\frac{1}{x}-x\right)^2+2}},$$

$\therefore \quad$ 当 $x=\frac{1}{x}$，即 $x=1$ 时，原式有最大值，



**脑筋急转弯**

为什么流氓坐车不用给钱？

**答案：**

因为他坐的是一辆警车。