

石油化工设备设计参考资料

有限单元法在化工机械设计中的应用

(下 册)

上海化工学院

上海化学工业设计院石油化工设备设计建设组

石油化工设备设计参考资料
有限单元法在化工机械设计中的应用(下册)

79-7-II-30

(内部资料 注意保存)

上海化学工业设计院石油化工设备设计室编

(上海南京西路1856号)

一九七九年二月

工本费

下册

5元5角0分

目 录

第七章 立体问题	1
§ 7-1 结构离散化	1
§ 7-2 基本方程组的推导	3
§ 7-3 大型线代数方程组的分块求解	16
§ 7-4 程序	36
第八章 薄板弯曲的基础理论	65
§ 8-1 薄板弯曲的弹性力学方程组	65
§ 8-2 变分学简介	76
§ 8-3 能量原理及瑞莱—李兹 (Rayleigh-Ritz) 法	83
§ 8-4 面积坐标	104
第九章 薄板弯曲问题	115
§ 9-1 薄板弯曲问题的有限单元位移法	115
§ 9-2 矩形薄板单元	121
§ 9-3 三角形薄板单元	129
§ 9-4 薄板弯曲问题的有限单元混合法	137
§ 9-5 计算结果示例	157
第十章 薄壳与组合问题	161
§ 10-1 薄壳问题概述	161
§ 10-2 薄壳问题的有限单元位移法	165
§ 10-3 薄壳问题的有限单元混合法	175

§ 10-4	组合问题	131
§ 10-5	板、壳、梁组合结构计标程序(位移法)	189
§ 10-6	板壳计标程序(混合法)	232
第十一章	稳定温度场问题	263
§ 11-1	平面稳定温度场	263
§ 11-2	三维稳定温度场	275
§ 11-3	三维稳定温度场程序	291
第十二章	弹塑性问题	316
§ 12-1	弹塑性问题应力分析	317
§ 12-2	弹塑性问题的有限单元法	332
§ 12-3	轴对称弹塑性应力分析程序 (变刚度法)	339

第七章 立体问题

一般化机设备，特别是中、低压容器及其另、部件，往往可作为平板、薄壳结构来处理。有些设备虽然器壁较厚，但因几何形状及载荷均呈轴对称，其应力分析也可按二维问题来处理。然而，当其几何形状或载荷并非轴对称，或在局部部位有非轴对称突变时（例如高压厚管板、厚壁容器的非轴向开孔等），就需要用三维问题即立体问题的应力分析方法来处理。本章将讨论立体问题的有限单元法及其相应的程序。

由于计算机容易的限制，对一个完整的化机设备全面地进行三维应力分析常常是不现实的，甚至是不必要的。其通常的分析步骤往往是先用较简单的应力分析程序，如板、壳程序，轴对称程序等，对一般部位进行全面应力分析和位移计算。然后，再将我们感兴趣的局部重点部位设法分离出来进行三维应力分析。此时，分离体周围的节点位移已经标定，可以列为已知的边界条件参加运算。有时，也可利用结构几何形状和载荷的特点，从设备上直接分离出一个或几个分离体，并根据这类特点（如对称性等）来确立边界条件，然后对各分离体进行三维应力分析。

§ 7-1 结构离散化

对立体问题来说，最简单的单元是以四个顶点为节点的四面体单元，而且四面体单元对于弹性体几何形状的适应性也较好。我们这里介绍的方法就采用这种单元体。为避免计算四面体体积时出现负值，四面体四个节点的排列应有一定的顺序。设四面体的四个节点为 i 、 j 、 m 、 p ，则在右手螺旋系中，按 ijm 方向转动时，拇指指向 p （见图 7-1）。

把空间弹性体分割为四面体的集合是非常麻烦的，不仅输入数据数易大，

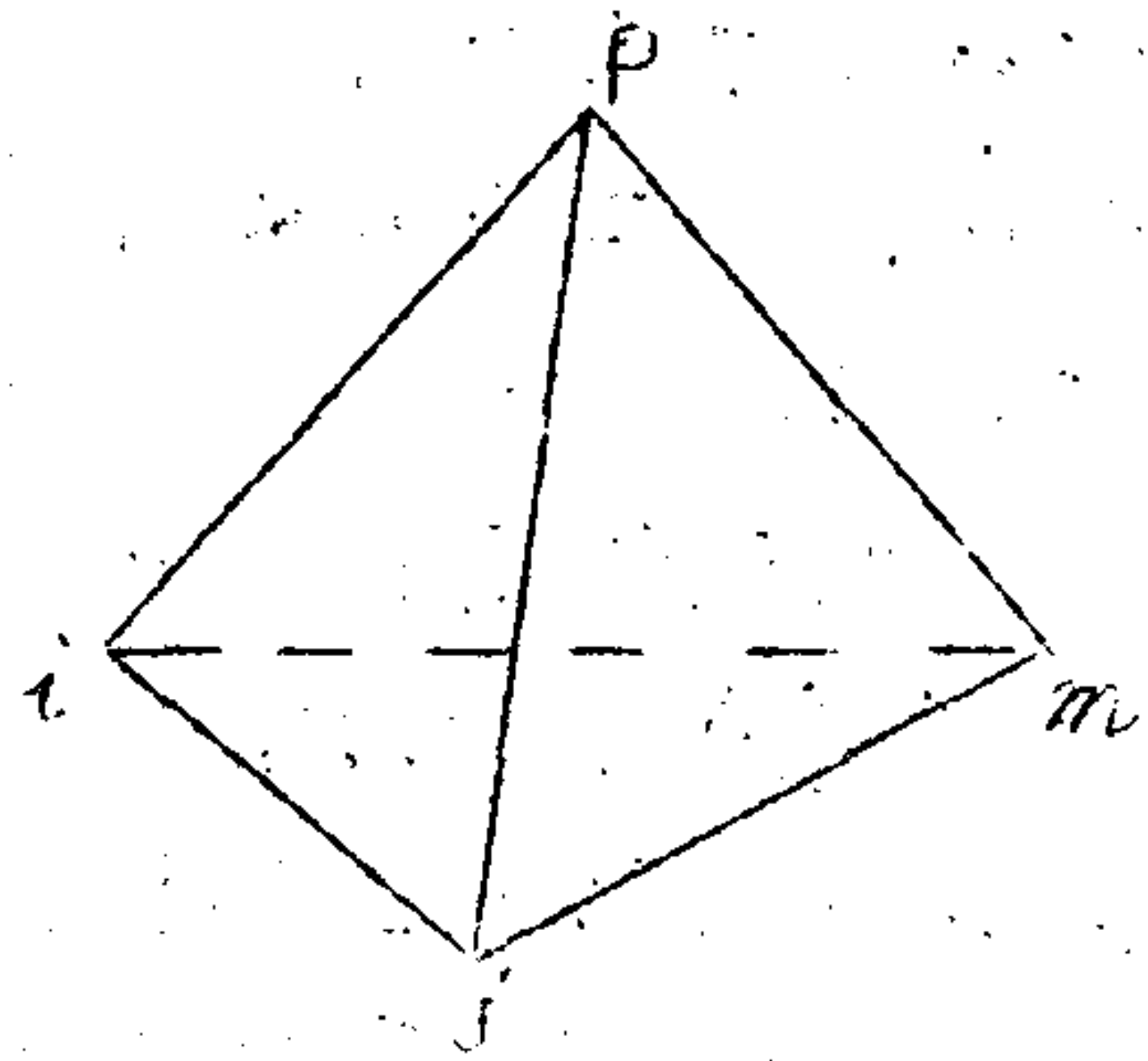


图 7-1 四面体单元 $ijmp$

且极易出错。为避免这一困难，我们可以采用这样的方法，即将弹性体分割为若干任意六面体及若干任意三棱柱体的组合体，在计标时仅输入这些六面体及三棱柱体的信息。这相对说来要容易得多，且可大大减少输入数据的数易及出现差错的可能性。然后再由计标机自动将这些六面体及三棱柱体分割为四面体单元。

一个空间任意六面体可以分割为五个四面体或六个四面体。为了便于处理，以采用分割为六个四面体的形式为宜。

图 7-2 表示一个六面体分割是六个四面体的一种形式。这种分割形式的特点是其三对对面上的分割线的走向都是一致的，即

1234 面与 5678 面上的分割线 13 与 57 是走向一致的，1562 面与 4873 面上的分割线 16 与 47 也是走向一致的，以及 2673 面与 1584 面上的分割线 36 与 45 不是走向一致的。这样在用上述分割方式的六面体去“砌”成一个弹性体时，很容易做到各六面体交界面上的分割线是一致的。从而保证做到最终将弹性体分割成四面体的集合时，单元间不可能产生裂隙或重迭。

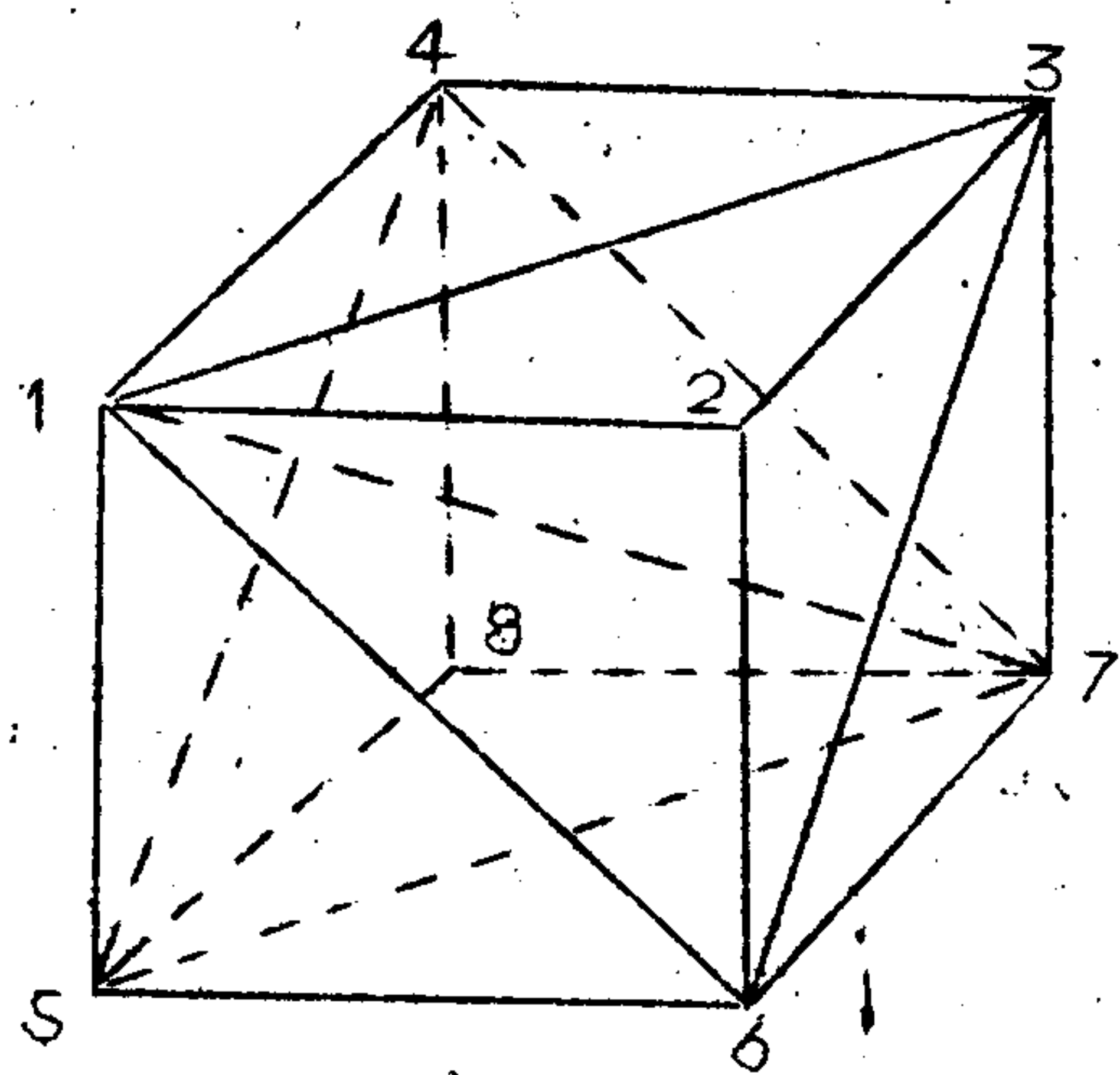


图 7-2 一个六面体分割为六个四面体

按照同样的方式可将一个三棱柱体分割为三个四面体，其分割形式如图 7-3 所示。

在将弹性体分割成若干六面体及若干三棱柱体的组合体时，要注意使六面体之间、三棱柱体之间、以及六面体和三棱柱体之间交界面上的分割线确保走向一致。

为了充分节约内存，可以在计标程序中专门用一个分程序来完成由输入的六面体及三棱柱体信息自动形成相应的四面体信息这一工作。关于四面体的信息可在外层加以说明，而关于六面体及三棱柱体的信

息则在该分程序内说明，这样一旦四面体的信息已经形成，这一分程序的任务也就随之完成，所以有关六面体及三棱柱体的信息只是暂时占用内存，并不影响整个程序内存的分配。本章所附的程序例就是这样处理的。

§ 7-2 基本方程组的推导

一、单元特性分析

设单元体 $i-j-m-p$ 内任意点 (x, y, z) 的位移为

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (7-1)$$

且假定其值为该点座标的线性函数，即：

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \\ \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z \\ \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z \end{Bmatrix} \quad (7-2)$$

这里有十二个待定系数，可以由四个节点的节点位移值来求得。

四面体单元的节点位移向量为

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \\ \delta_p \end{Bmatrix} = [u_i, v_i, w_i, u_j, v_j, w_j, u_m, v_m, w_m, u_p, v_p, w_p]^T \quad (7-3)$$

将式 (7-3) 中的 $\delta_i, \delta_j, \delta_m$ 及 δ_p 分别代入式 (7-2) 可以得到十二个方程，从而解得十二个待定系数，将这些系数代入式 (7-2) 可得：

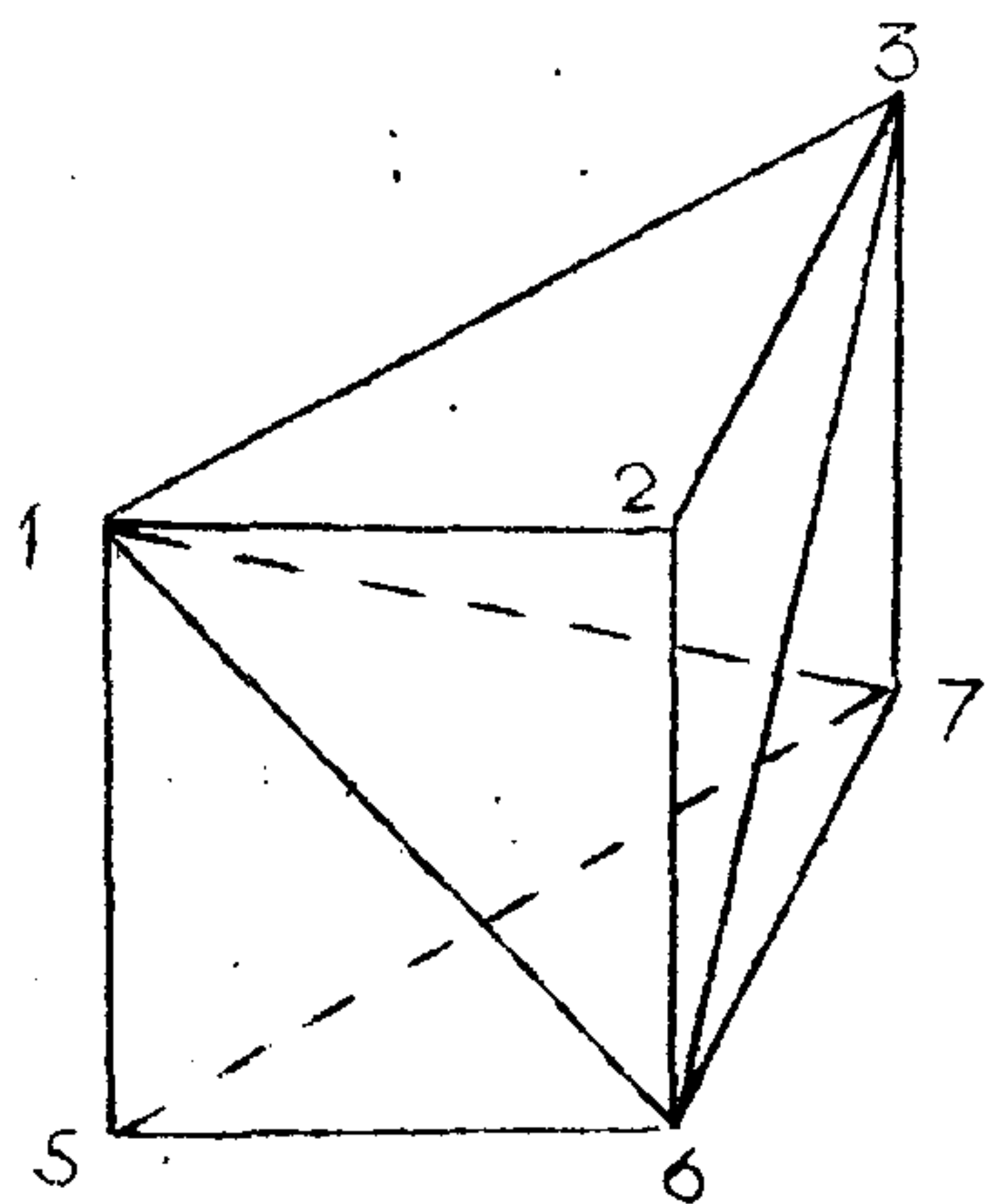


图 7-3 一个三棱柱分割为三个四面体

$$u = \frac{1}{6V} \{ (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) u_i - (a_j + b_j x + c_j y + d_j z) u_j + (a_m + b_m x + c_m y + d_m z) u_m - (a_p + b_p x + c_p y + d_p z) u_p \}$$

$$v = \frac{1}{6V} \{ (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) v_i - (a_j + b_j x + c_j y + d_j z) v_j + (a_m + b_m x + c_m y + d_m z) v_m - (a_p + b_p x + c_p y + d_p z) v_p \}$$

$$w = \frac{1}{6V} \{ (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) w_i - (a_j + b_j x + c_j y + d_j z) w_j + (a_m + b_m x + c_m y + d_m z) w_m - (a_p + b_p x + c_p y + d_p z) w_p \}$$

(7-4)

式中 V 是四面体的体积

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix}$$

(7-5)

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix}$$

$$b_i = - \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix}$$

$$c_i = - \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{vmatrix}$$

$$d_i = - \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix}$$

(i, j, m, p)

(7-6)

式 (7-4) 可简化为：

$$\{f\} = [I, N_i, -I, N_j, I, N_m, -I, N_p] \{\delta\}^e = [N]^e \{\delta\}^e \quad (7-7)$$

式中 I ，为三阶单位阵

$$N_i = \frac{1}{6V} (a_i + b_j x + c_i y + d_i z) \quad (i, j, m, p) \quad (7-8)$$

将式 (7-4) 代入式 (3-21) 可得到四面体单元内任意点的应变为：

$$\{\varepsilon\} = [B]^e \{\delta\}^e \quad (7-9)$$

式中 $[B]^e$ 为单元应变矩阵

$$[B]^e = [B_i, -B_j, B_m, -B_p] \quad (7-10)$$

而

$$[B_i] = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ 0 & d_i & c_i \\ d_i & 0 & b_i \end{bmatrix} \quad (i, j, m, p) \quad (7-11)$$

由于 $[B]^e$ 的各元素对一个单元来说是常数，所以一个四面体内各点的应变是相等的。然而，在相邻单元的交界面上应变值将有突变。

将式 (7-9) 代入式 (3-38) 并假设初应变是由于温度变化所引起，则可得：

$$\{\sigma\} = [D][B]^e \{\delta\}^e - [D]\{\varepsilon_0\} = [S]^e \{\delta\}^e - [D]\{\varepsilon_0\} \quad (7-12)$$

式中 $[S]^e$ 是单元的应力矩阵,

$$[S]^e = [S_i, -S_j, S_m, -S_p] \quad (7-13)$$

$$\text{而 } [S_i] = [D][B_i] \quad (i, j, m, p)$$

如令: $A_1 = \frac{\nu}{1-\nu}$, $A_2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$, 则可得:

$$[S_i] = \frac{E(1-\nu)}{6(1+\nu)(1-2\nu)\nu} \begin{bmatrix} b_i & A_1 c_i & A_1 d_i \\ A_1 b_i & c_i & A_1 d_i \\ A_1 b_i & A_1 c_i & d_i \\ A_2 c_i & A_2 b_i & 0 \\ 0 & A_2 d_i & A_2 c_i \\ A_2 d_i & 0 & A_2 b_i \end{bmatrix} \quad (i, j, m, p) \quad (7-14)$$

式(7-12)中 $\{\varepsilon_0\}$ 是由温度变化引起的初应变

$$\{\varepsilon_0\} = [\alpha T_e, \alpha T_e, \alpha T_e, 0, 0, 0]^t \quad (7-15)$$

这里 T_e 是单元的平均温度变化, 一般可以该单元四节点温变的平均值为该单元的平均温变即:

$$T_e = (T_i + T_j + T_m + T_p) / 4 \quad (7-16)$$

观察式(7-12)显然可知在一个单元内, $\{\sigma\}$ 的各分量是常数, 而在相邻单元的交界处应力值有突变。

设单元 $ijmp$ 的节点力向量为

$$\{P\}^e = [U_i, V_i, W_i, U_j, V_j, W_j, U_m, V_m, W_m, U_p, V_p, W_p]^t \quad (7-17)$$

并假定其各节点发生一虚位移为

$$\{\delta^*\}^e = \{u_i^*, v_i^*, w_i^*, u_j^*, v_j^*, w_j^*, u_m^*, v_m^*, w_m^*, u_p^*, v_p^*, w_p^*\}^t$$

显然单元内相应的虚应变为

$$\{\epsilon^*\} = [B]^e \{\delta^*\}^e$$

按照弹性体的虚功原理可知节点力在虚位移上所作之功等于单元内各点的应力在相应的虚应变上所作之功，亦即

$$\{\delta^*\}^{et} \{P\}^e = \iiint_V \{\epsilon^*\}^t \{\sigma\} dx dy dz \quad (7-18)$$

将式(7-12)及单元内各点虚应变的表达式代入式(7-18)，可得

$$\begin{aligned} \{\delta^*\}^{et} \{P\}^e &= \iiint_V ([B]^e \{\delta^*\}^e)^t ([D][B]^e \{\delta\}^e - [D]\{\epsilon_0\}) dx dy dz \\ &= \{\delta^*\}^{et} \left(\iiint_V [B]^{et} [D][B]^e dx dy dz \{\delta\}^e - \iiint_V [B]^{et} [D]\{\epsilon_0\} dx dy dz \right) \end{aligned}$$

由于虚位移的任意性，由上式可得

$$\begin{aligned} \{P\}^e &= \iiint_V [B]^{et} [D][B]^e dx dy dz \{\delta\}^e \\ &\quad - \iiint_V [B]^{et} [D]\{\epsilon_0\} dx dy dz \end{aligned}$$

$$\text{令 } [K]^e = \iiint_V [B]^{et} [D][B]^e dx dy dz \quad (7-19)$$

为单元刚度矩阵，

$$\text{令 } \{L\}^e = \iiint_V [B]^{et} [D]\{\epsilon_0\} dx dy dz \quad (7-20)$$

为单元热负荷向量，则上式可写为：

$$\{P\}^e = [K]^e \{\delta\}^e - \{L\}^e \quad (7-21)$$

这就是考虑了初应变后节点力和节点位移之间的关系式。

考虑到 $(B)^e$ ， (D) 内的元素都与座标无关，可以提到积分号外面，再注意到

$\iiint dxdydz = V$ ，所以：

$$\begin{aligned}
 (K)^e &= (B)^e t^t (D) (B)^e V = \\
 &= \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e & K_{im}^e & K_{ip}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e & K_{jm}^e & K_{jp}^e \\ K_{mi}^e & K_{mj}^e & K_{mm}^e & K_{mp}^e \\ K_{pi}^e & K_{pj}^e & K_{pm}^e & K_{pp}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_i^t \\ B_j^t \\ B_m^t \\ B_p^t \end{bmatrix} (D) (B_i^e, B_j^e, B_m^e, B_p^e)^t V \\
 & \quad (7-22)
 \end{aligned}$$

式中 $(K_{rs})^e$ ($r, s = i, j, m, p$) 为 $(K)^e$ 的子矩阵，由式 (7-22) 知

$$\begin{aligned}
 (K_{rs})^e &= (B_r)^t (D) (B_s) V \\
 &= \frac{E(1-\nu)}{36(1+\nu)(1-2\nu)V} \begin{bmatrix} b_r b_s + A_2 (c_r c_s + d_r d_s) & A_1 b_r c_s + A_2 c_r b_s & A_1 b_r d_s + A_2 d_r b_s \\ A_1 c_r b_s + A_2 b_r c_s & c_r c_s + A_2 (b_r b_s + d_r d_s) & A_1 c_r d_s + A_2 d_r c_s \\ A_1 d_r b_s + A_2 b_r d_s & A_1 d_r c_s + A_2 c_r d_s & d_r d_s + A_2 (b_r b_s + c_r c_s) \end{bmatrix} \\
 & \quad (r, s = i, j, m, p) \quad (7-23)
 \end{aligned}$$

式中 A_1, A_2 参见式 (7-14)。

因为 $[D]$ 是对称矩阵, 按矩阵乘法性质可知 $[K]^e$ 也是对称矩阵。

设初应变 $\{\epsilon_0\}$ 是由温度变化引起的, 并设所取的单元较小, 可用单元温度变化的平均值 T_e 来代替单元内各点的温变, 于是式 (7-20) 可简化为

$$\begin{aligned} \{L\}^e &= [B]^e{}^t [D] \{\epsilon_0\} V \\ &= \frac{\alpha E T_e}{6(1-2\nu)} [b_i, c_i, d_i, -b_j, -c_j, -d_j, b_m, \\ &\quad c_m, d_m, -b_p, -c_p, -d_p]^t \end{aligned} \quad (7-24)$$

三 等效节点载荷

首先研究体力载荷, 由于单元体相对地说是较小的, 可以认为作用于单元各点的体力集度是同一个值, 即为该单元所受体力集度的平均值:

$$\{g\} = \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{Bmatrix}$$

设与体力载荷等效的节点载荷是

$$\begin{aligned} \{G\}^e &= [G_{ix}, G_{iy}, G_{iz}, G_{jx}, G_{jy}, G_{jz}, G_{mx}, G_{my}, \\ &\quad G_{mz}, G_{px}, G_{py}, G_{pz}]^t \end{aligned} \quad (7-25)$$

假定四面体单元的四个节点发生了虚位移 $\{\delta^*\}^e$, 相应的单元内各点将产生位移 $\{f^*\} = [N]^e \{\delta^*\}^e$ 。显然, 节点载荷在虚位移上的虚功等于体力在相应位移上的功, 即

$$\begin{aligned} (\{\delta^*\}^e)^t \{G\}^e &= \iiint \{f^*\}^t \{g\} dx dy dz \\ &= \{\delta^*\}^e{}^t \iiint [N]^e{}^t \{g\} dx dy dz \end{aligned}$$

因为虚位移的任意性，所以由上式可知

$$\begin{aligned} \{G\}^e &= \iiint (N)^e{}^t \{g\} dx dy dz \\ &= \iiint (N_i g_x, N_i g_y, N_i g_z, N_j g_x, N_j g_y, N_j g_z, \\ &\quad N_m g_x, N_m g_y, N_m g_z, N_p g_x, N_p g_y, \\ &\quad N_p g_z)^t dx dy dz \end{aligned}$$

观察其中一个分号，即

$$\begin{aligned} G_{ix} &= \iiint N_i g_x dx dy dz = \frac{g_x}{6V} \iiint (a_i + b_i x + c_i y \\ &\quad + d_i z) dx dy dz = \frac{1}{4} g_x V \quad (\text{注一}) \end{aligned}$$

$\{G\}^e$ 的其他各个分号也可同样求得，于是

$$\{G\}^e = \frac{V}{4} \begin{pmatrix} g_x, g_y, g_z, g_x, g_y, g_z, g_x, g_y, g_z, \\ g_x, g_y, g_z \end{pmatrix}^t \quad (7-26)$$

这个式子的物理意义是将四面体单元所受的体力平均分配到四个节点上去。

将各个单元的体力向号经扩充后叠加，可得到整个弹性体的体力向号

$$\{G\} = \sum_{e=1}^{ne} \{G\}^e \quad (7-27)$$

其次研究面力载荷，设四面体单元 $ijmp$ 的 ijm 面是边界面，且受有垂直于边界面的面力载荷 $q(x, y, z)$ ，其中 i, j, m 点的面力集度值分别是 q_i, q_j, q_m 。与此面力载荷等效的节点力载荷为：

$$\begin{aligned} \{Q\}^e &= (Q_{ix}, Q_{iy}, Q_{iz}, Q_{jx}, Q_{jy}, Q_{jz}, Q_{mx}, Q_{my}, \\ &\quad Q_{mz}, Q_{px}, Q_{py}, Q_{pz})^t \end{aligned} \quad (7-28)$$

通过一系列推标 (注二) 可以得到

$$\{Q_i\}^e = \begin{Bmatrix} Q_{ix} \\ Q_{iy} \\ Q_{iz} \end{Bmatrix} = -\frac{1}{6} (q_i + \frac{1}{2}q_j + \frac{1}{2}q_m) \begin{Bmatrix} b_p \\ c_p \\ d_p \end{Bmatrix}$$

$$\{Q_j\}^e = \begin{Bmatrix} Q_{jx} \\ Q_{jy} \\ Q_{jz} \end{Bmatrix} = -\frac{1}{6} (\frac{1}{2}q_i + q_j + \frac{1}{2}q_m) \begin{Bmatrix} b_p \\ c_p \\ d_p \end{Bmatrix}$$

$$\{Q_m\}^e = \begin{Bmatrix} Q_{mx} \\ Q_{my} \\ Q_{mz} \end{Bmatrix} = -\frac{1}{6} (\frac{1}{2}q_i + \frac{1}{2}q_j + q_m) \begin{Bmatrix} b_p \\ c_p \\ d_p \end{Bmatrix}$$

$$\{Q_p\}^e = 0 \quad (7-29)$$

将所有单元的面力向量扩充后叠加, 可以得到整个弹性体的面力向量:

$$\{Q\} = \sum_{e=1}^{ne} \{Q\}^e \quad (7-30)$$

至于集中力载荷和平面问题中一样, 在结构离散化时已经把集中力的作用点处理为节点, 因此可直接按节点叠加形成集中力向量

$$\{R\} = \sum_{i=1}^{np} \{R_i\} \quad (7-31)$$

此外, 将式 (7-21) 等号右边比 $\{L\}^e$ 移到等号左边, 其物理意义为考虑了温度变化影响而应当加在节点上的载荷, 也就是温度变化影响的等效节点载荷。将各单元的 $\{L\}^e$ 经扩充后叠加, 即

$$\{L\} = \sum_{e=1}^{ne} \{L\}^e \quad (7-32)$$

就是整个结构考虑温度变化影响时的等效节点载荷。

于是整个弹性体的等效节点载荷为

$$\{F\} = \{P\} + \{Q\} + \{R\} + \{L\} \quad (7-31)$$

注一：因为 $\iiint dxdydz = V$ $\iiint x dxdydz = \frac{V}{4}(x_i + x_j + x_m + x_p)$

$$\iiint y dxdydz = \frac{V}{4}(y_i + y_j + y_m + y_p)$$

$$\iiint z dxdydz = \frac{V}{4}(z_i + z_j + z_m + z_p)$$

所以 $G_{ix} = \iiint N_i \epsilon_x dxdydz = \frac{\epsilon_x}{6V} \iiint (a_i + b_i x + c_i y$

$$+ d_i z) dxdydz = \frac{\epsilon_x}{6V} \left(a_i V + \frac{b_i V}{4} (x_i + x_j + x_m + x_p) + \frac{c_i V}{4} (y_i + y_j + y_m + y_p) + \frac{d_i V}{4} (z_i + z_j + z_m + z_p) \right)$$

$$+ \frac{c_i V}{4} (y_i + y_j + y_m + y_p) + \frac{d_i V}{4} (z_i + z_j + z_m + z_p) \Big) = \frac{\epsilon_x V}{24} \left(4a_i + b_i (x_i + x_j + x_m + x_p) + c_i (y_i + y_j + y_m + y_p) + d_i (z_i + z_j + z_m + z_p) \right)$$

$$+ \frac{d_i V}{4} (z_i + z_j + z_m + z_p) \Big) = \frac{\epsilon_x V}{24} \left(4a_i + b_i (x_i + x_j + x_m + x_p) + c_i (y_i + y_j + y_m + y_p) + d_i (z_i + z_j + z_m + z_p) \right)$$

注二：设 Δ_{ijm} 面内任意一点的面力集度 $q(x', y')$ 是三个节点集度值的线性插值，则：

$$q(x', y') = \frac{1}{2\Delta_{ijm}} \left(\sum_{i,j,m} (a'_i + b'_i x' + c'_i y') q_i \right)$$

式中 x', y' 是一点在 ijm 所在平面上某个局部坐标系中的座标值， a'_i, b'_i, c'_i 等是在该坐标系中按式 (4-29) 定义的值。

设与 ijm 面上所受面力等效的节点力是

$$\{Q'\} = \{Q'_i, Q'_j, Q'_m, Q'_p\}^t$$

显然, $Q'_p = 0$, 且 Q'_i, Q'_j, Q'_m 必是垂直于 ijm 面的。现假设 Δijm 的三个节点发生了某种虚位移:

$$\{\delta^{*'}\} = \{\delta_i^{*'}, \delta_j^{*'}, \delta_m^{*'}\}^t$$

这里的 $\delta_i^{*'}, \delta_j^{*'}, \delta_m^{*'}$ 都是垂直于 ijm 平面的, 按照位移线性插值假设, Δijm 内任意点相应的虚位移为

$$\{f^{*'}\} = \{N'_i, N'_j, N'_m\} \{\delta^{*'}\}$$

这里 N'_i, N'_j, N'_m 是在 ijm 所在平面上的某一局部坐标系中按式 (4-26) 定义的函数。

按静力等效原则, 可得

$$\{\delta^{*'}\}^t \{Q'\} = \iint_{\Delta} \{f^{*'}\}^t q(x', y') dx' dy'$$

$$= \{\delta^{*'}\}^t \iint_{\Delta} \{N'_i, N'_j, N'_m\}^t \frac{1}{2\Delta_{ijm}} \left[\sum_{i,j,m} (a'_i + b'_i x' + c'_i y') q_i \right] dx' dy'$$

由于虚位移的任意性, 可得

$$\{Q'\} = \iint_{\Delta} \{N'_i, N'_j, N'_m\}^t \frac{1}{2\Delta_{ijm}} \left[\sum_{i,j,m} (a'_i + b'_i x' + c'_i y') q_i \right] dx' dy'$$

观察其中一项, 并根据形函数的几何意义, 用面积座标 L_s ($s=i, j, m$) 来代换 N'_s ($s=i, j, m$) 则得