学校________ 班级________ 姓名________ 准考证号□□□□□□□ （暂不填写）

密 封 装 订 线

密封线内不要答题

海淀区高三年级第二学期期中练习

数　　学（文科）

2004.4

题号	一	二	三						总分
			(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	
分数									

注意事项： 1. 答卷前将学校、班级、姓名填写清楚．

2. 选择题的每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．其它小题用钢笔或圆珠笔将答案直接写在试卷上．

参考公式：

三角函数的和差化积公式

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$　　$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$　　$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

(1) 圆 $x^2+y^2-2x+2my=0$ 的圆心在直线 $x+y=0$ 上，则实数 m 的值为（　　）

(A) 1　(B) -1　(C) 2　(D) -2

(2) 设全集为实数集 R，集合 $A=\{x\mid x<2\}$，$B=\{x\mid x\geqslant 3\}$，则（　　）

(A) $A\cup\overline{B}=R$　(B) $\overline{A}\cup B=R$　(C) $A\cap\overline{B}=\varnothing$　(D) $\overline{A\cup B}=\varnothing$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-3^n}{5+3^{n+1}}$ 的值等于（　　）

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{2}{5}$　(C) $-\frac{1}{3}$　(D) $-\frac{1}{8}$

(4) 三角形 ABC 的三个内角 A、B、C 的对边分别是 a、b、c．若 $A=60^\circ$，$B=75^\circ$，$a=2\sqrt{3}$，则 c 的值（　　）

(A) 等于 2　(B) 等于 4　(C) 等于 $2\sqrt{2}$　(D) 不确定

(5) 将直线 l：$x+2y-1=0$ 向左平移 3 个单位，再向上平移 2 个单位后得到直线 l'，则直线 l 与 l' 之间的距离为（　　）

(A) $\frac{7\sqrt{5}}{5}$　(B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$　(C) $\frac{1}{5}$　(D) $\frac{7}{5}$

(6) 6 名运动员站在 6 条跑道上准备参加比赛，其中甲不能站在第一道也不能站在第二道，乙必须站在第五道或第六道，则不同排法种数为（　　）

(A) 144　(B) 96　(C) 72　(D) 48

(7) 已知直线 m 与平面 α 相交于一点 P，则在平面 α 内（　　）

(A) 存在直线与直线 m 平行，也存在直线与直线 m 垂直

(B) 存在直线与直线 m 平行，但不一定存在直线与直线 m 垂直

(C) 不存在直线与直线 m 平行，但必存在直线与直线 m 垂直

(D) 不存在直线与直线 m 平行，也不一定存在直线与直线 m 垂直

(8) 已知抛物线方程为 $y=ax^2+bx+c$（$a>0$，b，$c\in R$），则“此抛物线顶点在直线 $y=x$ 下方”是“关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c<x$ 有实数解”的（　　）

(A) 充分非必要条件　(B) 必要非充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既非充分也非必要条件

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分，把答案填在题中横线上．

(9) 圆锥底面半径为 1，其母线与底面所成的角为 60°，则它的侧面积为________；它的体积为________．

(10) 函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$ 的定义域为________；若 $f(x)>1$，则 x 的取值范围是________．

(11) 双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点坐标为________；其渐近线方程是________．

(12) 函数 $f(x)=\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为________；在区间 $[-\pi,\pi]$ 上，当 y 取得最小值时，x 的值为________．

(13) 不等式 $4^x-1>0$ 的解集为________；若不等式 $4^x-1<a$ 的解集为 $\varnothing$，则实数 a 的取值范围是________．

(14) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项和为 21，前 6 项和为 24，则首项 a_1 的值为________；数列 $\{|a_n|\}$ 的前 9 项和等于________．

三、解答题：本大题共 6 个小题，共 80 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

(15)（本小题满分 12 分）

已知复平面内点 A，B 对应的复数分别是 $z_1=\sin^2\theta+i$，$z_2=-\cos^2\theta+i\cos2\theta$，其中 $\theta\in(0,2\pi)$，设 $\overrightarrow{AB}$ 对应的复数为 z．

（Ⅰ）求复数 z；

（Ⅱ）若复数 z 对应的点 P 在直线 $y=\frac{1}{2}x$ 上，求 θ 的值．

(16)（本小题满分 14 分）

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$，数列 $\{b_n\}$ 满足首项 $b_1=a$（a 为常数），且 $b_n=a_n\cdot a_{n+1}$（$n=1,2,3,\cdots$）

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

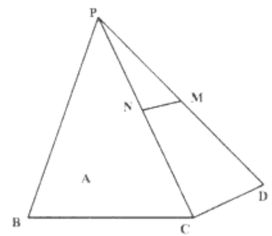
（Ⅱ）求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n（写成关于 n 的表达式）．

密〇封〇装〇订〇线

密封线内不要答题

（17）（本小题满分 15 分）

如图，四棱锥 $P—ABCD$ 的底面是正方形，$PA\perp$底面 $ABCD$，$PA=AD=2$，点 M、N 分别为棱 PD、PC 的中点．



（Ⅰ）求证：$PD\perp$平面 AMN；

（Ⅱ）求三棱锥 $P—AMN$ 的体积；

（Ⅲ）求二面角 $P—AN—M$ 的大小．

（18）（本小题满分 13 分）

已知椭圆的中心在原点，其一条准线方程为 $x=-4$，它的一个焦点和抛物线 $y^2=4x$ 的焦点重合．

（Ⅰ）求该椭圆的方程；

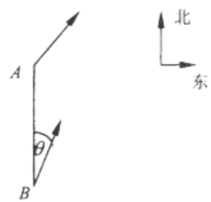
（Ⅱ）过椭圆的右焦点且斜率为 k（$k\neq 0$）的直线 l 和椭圆分别交于点 A、B，线段 AB 的垂直平分线和 x 轴相交于点 P（m，0），求实数 m 的取值范围．

(19)（本小题满分 13 分）

甲船由 A 岛出发向北偏东 45°的方向作匀速直线航行，其速度为 $15\sqrt{2}$ 浬/小时．在甲船从 A 岛出发的同时，乙船从 A 岛正南 40 浬处的 B 岛出发，朝北偏东 θ（其中 θ 为锐角，且 $\mathrm{tg}\theta=\frac{1}{2}$）的方向匀速直线行驶，速度为 $10\sqrt{5}$ 浬/小时．如图所示．

（Ⅰ）求出发后 3 小时两船相距多少浬？

（Ⅱ）两船在航行中能否相遇？试说明理由．



(20)（本小题满分 13 分）

集合 A 是由适合以下性质的函数 $f(x)$ 组成的：对于任意的 $x\geqslant 0$，$f(x)\in[-2,4)$，且 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数．

（Ⅰ）判断函数 $f_1(x)=\sqrt{x}-2$ 及 $f_2(x)=4-6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x\ (x\geqslant 0)$ 是否在集合 A 中？若不在集合 A 中，试说明理由；

（Ⅱ）对于（Ⅰ）中你认为是集合 A 中的函数 $f(x)$，不等式 $f(x)+f(x+2)<2f(x+1)$ 是否对于任意的 $x\geqslant 0$ 总成立？证明你的结论．

高三数学（文科）第二学期期中练习
参考答案及评分标准

2004.4

一、选择题（每小题5分，共40分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	C	C	B	A	C	A

二、填空题（每小题5分，其中第一空3分，第二空2分；共30分）

(9) 2π；　$\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$　　(10) $\{x|x>3\}$；　$(3,\ \frac{7}{2})$

(11) $(\pm 2,\ 0)$；　$y=\pm\sqrt{3}x$　　(12) 4π；　$-\pi$

(13) $\{x|x>0\}$；　$(-\infty,\ -1]$　　(14) 9；　41

三、解答题（共80分）

(15)（本小题满分12分）

解：(Ⅰ) $z=z_2-z_1=-\cos^2\theta-\sin^2\theta+i(\cos2\theta-1)$ ………… 3分

$=-1-2i\sin^2\theta$ ………… 5分

(Ⅱ) 点 P 的坐标为 $(-1,\ -2\sin^2\theta)$ ………… 6分

由点 P 在直线 $y=\frac{1}{2}x$ 上，即 $-2\sin^2\theta=-\frac{1}{2}$. ………… 9分

$\therefore \sin^2\theta=\frac{1}{4}$，则 $\sin\theta=\pm\frac{1}{2}$

$\because \theta\in(0,\ 2\pi)$，$\therefore \theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}$. ………… 12分

(16)（本小题满分14分）

解：(Ⅰ) $\because a_1=1$，$b_1=a$，又 $b_1=a_1\cdot a_2$，

$\therefore a_2=\frac{b_1}{a_1}=a$

$\because \{a_n\}$ 成等比数列，

$\therefore a\neq 0$ 且公比 $q=a$. ………… 3分

因此，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为：$a_n=a_1q^{n-1}=a^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$

………… 5分

(Ⅱ) 由（Ⅰ）知，$a_n=a^{n-1}$，$a_{n+1}=a^n$，

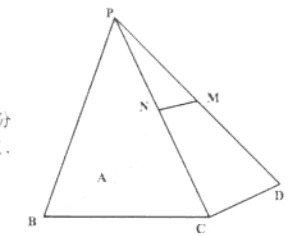
$\therefore b_n=a_na_{n+1}=a^{n-1}a^n=a^{2n-1}$， ………… 7分

$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a^{2n+1}}{a^{2n-1}}=a^2$（常数）.

即 $\{b_n\}$ 是以 a 为首项，a^2 为公比的等比数列. ………… 10分

$$\therefore S_n=\begin{cases} n & (a=1) \\ -n & (a=-1) \\ \frac{a(1-a^{2n})}{1-a^2} & (a\neq\pm1) \end{cases}$$ ………… 14分

(17)（本小题满分15分）



(Ⅰ) 证明：$\because ABCD$ 是正方形，$\therefore CD\perp AD$

$\because PA\perp$ 底面 $ABCD$

$\therefore AD$ 是 PD 在平面 $ABCD$ 内的射影，

$\therefore CD\perp PD$ ………… 3分

在 $\triangle PCD$ 中，M、N 分别是 PD、PC 的中点，

则 $MN/\!/CD$，$\therefore MN\perp PD$

在 $\triangle PAD$ 中，$PA=AD=2$，M 为 PD 的中点，

$\therefore AM\perp PD$

则 $PD\perp$ 平面 AMN ………… 5分

(Ⅱ) 解：$\because CD\perp AD$，$CD\perp PD$

$\therefore CD\perp$ 平面 PAD.

$\because MN/\!/CD$，$\therefore MN\perp$ 平面 PAD

又 $AM\subset$ 平面 PAD

$\therefore MN\perp AM$，$\angle AMN=90°$.

在 $Rt\triangle PAD$ 中，$PA=AD=2$，M 为 PD 的中点.

$\therefore AM=PM=\sqrt{2}$.

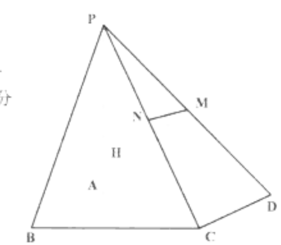
又 $MN=\frac{1}{2}CD=1$

$\therefore S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}AM\cdot MN=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ………… 8分

$\because PM\perp$ 平面 AMN，$\therefore PM$ 为三棱锥 $P—AMN$ 的高.

$V_{三棱锥P—AMN}=\frac{1}{3}S_{\triangle AMN}\cdot PM=\frac{1}{3}$. ………… 10分

(Ⅲ) 解：作 $MH\perp AN$ 于 H，连接 PH



$\because PM\perp$ 平面 AMN，$\therefore PH\perp AN$

$\therefore \angle PHM$ 为二面角 $P—AN—M$ 的平面角 ……

………… 13分

$\because PM\perp$ 平面 AMN，$\therefore PM\perp MH$.

在 $Rt\triangle AMN$ 中，$MH=\frac{AM\cdot MN}{AN}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

在 $Rt\triangle PMH$ 中，

$\operatorname{tg}(\angle PHM)=\frac{PM}{MH}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}$

$\therefore \angle PHM=60^\circ$

则二面角 $P—AN—M$ 的大小为 60°. …………………………………… 15 分

(18)(本小题满分 13 分)

解:(Ⅰ)抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标为 $(1,0)$, …………………………………… 1 分

设椭圆的方程为:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$

由题意得 $\frac{a^2}{c}=4$ …………………………………… 2 分

又 $c=1$, $\therefore a^2=4$, 从而 $b^2=a^2-c^2=3$

所求椭圆方程为:$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………………………………… 5 分

(Ⅱ)设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$ $(k\neq 0)$

将其代入椭圆方程,得 $3x^2+4k^2(x-1)^2=12$

整理得:$(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$. …………………………………… 7 分

显然 k 可以是不为 0 的任意实数

设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, AB 中点 $M(x_0,y_0)$

则 $x_0=\frac{4k^2}{3+4k^2}$,

$y_0=k(x_0-1)=k\left(\frac{4k^2}{3+4k^2}-1\right)=-\frac{3k}{3+4k^2}$ …………………………………… 9 分

AB 的垂直平分线方程为:$y+\frac{3k}{3+4k^2}=-\frac{1}{k}\left(x-\frac{4k^2}{3+4k^2}\right)$

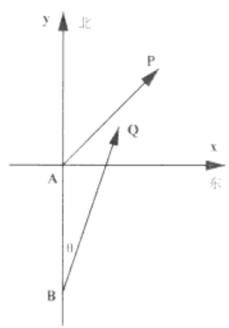
令 $y=0$, 得 $x=\frac{k^2}{3+4k^2}$, 即 $m=\frac{k^2}{3+4k^2}$ …………………………………… 11 分

$\because k\neq 0 \quad \therefore m\neq 0$ 且 $m\neq\frac{1}{4}$

$\therefore k^2=\frac{3m}{1-4m}>0$, $\therefore 0<m<\frac{1}{4}$ …………………………………… 13 分

(19)(本小题满分 13 分)

解:以 A 为原点,BA 所在的直线为 y 轴建立如图所示的平面直角坐标系.



设在 t 时刻甲,乙两船分别在点 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ 的位置.

则 $x_1=15\sqrt{2}t\cos 45^\circ=15t$, $y_1=x_1=15t$. ……… 2 分

由 $\text{tg}\theta=\frac{1}{2}$ 可得,$\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

直线 BQ 的方程为 $y=2x-40$.

$x_2=|BQ|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=|BQ|\sin\theta=10\sqrt{5}t\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=10t$,

$y_2=2x_2-40=20t-40$. ……………………………… 5 分

(Ⅰ)令 $t=3$, P、Q 两点的坐标分别为 $(45,45)$, $(30,20)$.

$|PQ|=\sqrt{(45-30)^2+(45-20)^2}=\sqrt{850}=5\sqrt{34}$.

即两船出发后 3 小时时,相距 $5\sqrt{34}$ 里. …………………………………… 8 分

(Ⅱ)射线 AP 方程为 $y=x$ $(x\geqslant 0)$, 射线 BQ 的方程为 $y=2x-40$ $(x\geqslant 0)$.

它们的交点 $M(40,40)$. …………………………………… 9 分

若甲,乙两船相遇,则应在 M 点处.

此时 $|AM|=\sqrt{40^2+40^2}=40\sqrt{2}$, 甲到达 M 点所用时间为:

$t_甲=\frac{|AM|}{15\sqrt{2}}=\frac{40\sqrt{2}}{15\sqrt{2}}=\frac{8}{3}$(小时), …………………………………… 10 分

$|BM|=\sqrt{(40-0)^2+(40+40)^2}=40\sqrt{5}$, 乙到达 M 点所用时间为:

$t_乙=\frac{40\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}=4$(小时). …………………………………… 12 分

$\because t_甲\neq t_乙$, $\therefore$ 甲、乙两船不会相遇. …………………………………… 13 分

(20)(本小题满分 13 分)

解:(Ⅰ)函数 $f_1(x)=\sqrt{x}-2$ 不在集合 A 中. …………………………………… 3 分

这是因为当 $x=49>0$, $f_1(49)=5>4$, 不满足条件; ……………………… 5 分

$f_2(x)=4-6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在集合 A 中. …………………………………… 8 分

(Ⅱ)$\because f(x)+f(x+2)-2f(x+1)$

$=4-6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+4-6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}-8+12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ ……………………… 10 分

$=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x\left[2\cdot\frac{1}{2}-1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$

$=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(-\frac{1}{4}\right)<0$

$\therefore f(x)+f(x+2)<2f(x+1)$ 对于任意 $x\geqslant 0$ 总成立. …………… 13 分

(囿于篇幅,若有其它正确解法请按相应步骤给分.)