大專升學必備

標準 高等代數學 下册

陳明哲編著

中央書局

標準高等代數學

下 册 目 次

第十四章 排列與組合

第十五章 數學歸納法、二項式定理、多項式定理

第十六課 或 然 率

第十七章　複　　數

第十八章　方程式論

第十九章　行列式

第二十章 無限級數

附　　錄

(一)　分式之極限值

(二)　重　　根

(三)　施斗模氏定理

(四)　高階等差級數

(五)　一次不定方程式之整數解

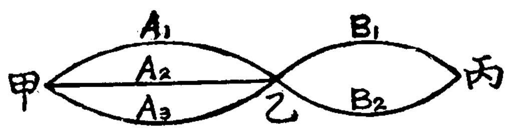
補　充　問　題

第十四章　排列與組合

一、基 本 定 理

設作甲事有 m 種不同做法，乙事有 n 種不同做法，則連續做此二事，共有 mn 種不同做法。

（例題）　由甲地至乙地有路三條，由乙地至丙地有路二條，則由甲地經乙地至丙地，必有 $3\times2=6$ 條路可通。如圖示共有 A_1B_1；A_1B_2；A_2B_1；A_2B_2；A_3B_1；A_3B_2 六條路。



系：設有甲，乙，丙……諸事，如甲事有 m 種不同做法，乙事有 n 種不同做法，丙事有 p 種不同做法，……則依次連續做此諸事，共有 mnp……種不同做法。

〔例題〕　在 300 與 800 之間悉由不同數字所作成之奇數有若干？

（解）　百位為偶數者有 4 與 6 之二種。

由題意個位數字必為 1, 3, 5, 7, 9 中之任一個。故佔在十位數字者為由十個數字中除去佔百位及個位數字之二個外所餘八個數字中之任一個即可。

故在 300 與 800 間之奇數中，百位數字為偶數者有 $2\times5\times8=80$ 種。(由基本定理) 次百位數字為奇數者有 3, 5 與 7 三數字，其取法有 3 種。而可佔個位之數字，則為所餘之四個，其取法有 4 種，可佔在十位之數字有八個，其取法有 8 種，故在 300 與 800 間之奇數中，百位為奇數者，有 $3\times4\times8=96$ (由基本定理)，故所求之個數為 $80+96=176$。

二　排列之定義 (Permutation)

從 n 個不同之物中，每次取其 r 個，依各種順序排列之，則稱之為

排列，排列之種類，謂之排列數，常以符號 ${}_nP_r$ (亦可記爲 P_r^n) 表之。n 與 r 限於正整數，且 r 不得大於 n。

例如：設有 a, b, c, d 四個文字(即 $n=4$) 中，每次取 1 個 ($r=1$) 或 2 個 ($r=2$) 或 3 個 ($r=3$) 或 4 個 ($r=4$) 而排列之，則得如次：

$r=1$	2	3	4	$r=1$	2	3	4
a	ab	abc	$abcd$	b	ba	bac	$bacd$
		abd	$abdc$			bad	$badc$
	ac	acb	$acbd$		bc	bca	$bcad$
		acd	$acdb$			bcd	$bcda$
	ad	adb	$adbc$		bd	bda	$bdac$
		adc	$adcb$			bdc	$bdca$
c	ca	cab	$cabd$	d	da	dab	$dabc$
		cad	$cadb$			dac	$dacb$
	cb	cba	$cbad$		db	dab	$dbac$
		cbd	$cbda$			dbc	$dbca$
	cd	cda	$cdab$		dc	dca	$dcab$
		cdb	$cdba$			dcb	$dcba$

由上表得知，從四個文字取一個之排法有四種，如取二個，則其排法爲剛所取每一文字後，附以餘下三個文字中之任一個，即得 $4\times3=12$ 種。如取三個，則其排法爲前得 12 種後各附以餘下二個文字中之任一個，即得 $4\times3\times2=24$ 種。如取四個則，其排法爲前得 24 種後各附以餘下之一個，故其排法無增減。

如用 ${}_nP_r$ 表示，則得 ${}_4P_1=4$, ${}_4P_2={}_4P_1\times3=4\times3$

${}_4P_3={}_4P_2\times2=4\times3\times2$, ${}_4P_4={}_4P_3\times1=4\times3\times2\times1=4!$ ${}_4P_3=$

三、排列之公式

公式： $_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$

（證明） 由 n 個不同之文字，每次取一個之排列法有 $_nP_1=n$ 種。若每次取二個而排列之，則其排在第一位之方法有 n 種，其餘 $(n-1)$ 個文字，各可居於第二位，故由 n 個文字，每次取其二個之排法有 $n(n-1)$

即 $_nP_2=n(n-1)$ 種。

若每次取三個而排列之，則其第一，第二位即被任何二個文字佔定後，其餘 $(n-2)$ 個文字各可居於第三位，但其首二位之排列數爲 $n(n-1)$，故由 n 個文字，每次取其三個文字之排法有 $n(n-1)(n-2)$

即 $_nP_3=n(n-1)(n-2)$ 種。

由是推之，若由 n 個文字中，每次取其 r 個，而排列之，則其排法有

$$_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

若盡取其 n 個而排列之，則 (1) 式之 $r=n$

故得 $_nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$

爲簡便起見 $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$ 常以 $\lfloor n$ 或 $n!$ 表示之。

故 $_nP_n=n!$

n 或 $n!$ 讀爲 n 之階乘。

又 (1) 之右邊等於

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots\cdots2\cdot1}{(n-r)\cdots\cdots2\cdot1}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\text{故得 }{}_nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$_nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1=n!\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

〔例1〕 如 $_{2n+1}P_4=140\times{}_nP_3$，試求 n 之值。

（解） $_{2n+1}P_4=(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)$

$140{}_nP_3=140n(n-1)(n-2)$

$$(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)=140n(n-1)(n-2)$$

即 $4n(2n+1)(2n-1)(n-1)=140n(n-1)(n-2)$

$\because n \geq 3$，兩邊同除以 $4n(n-1)$，得

$4n^2-1=35n-70$

$4n^2-35n+69=0$

$(4n-23)(n-3)=0$

$\therefore n=\frac{23}{4}$ 或 $n=3$

$\because n$ 爲正整數，故得 $n=3$

〔例2〕 試證 ${}_nP_r={}_{n-1}P_r+r\,{}_{n-1}P_{r-1}$

（解） 右邊 $={}_{n-1}P_r+r\,{}_{n-1}P_{r-1}=(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-1-r+1)$

$+r(n-1)(n-2)\cdots\cdots[n-1-(r-1)+1]$

$=(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)[(n-r)+r]$

$=n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)={}_nP_r=$ 左邊

〔例3〕 用 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9，十個數字排成三位數，共有幾種排法？但不許數字重複。

（解） 三位數即爲由三個數字組成之數，故得其排法有 ${}_{10}P_3=10\times9\times8=720$ 種。但其中含有百位數爲 0 之數，其實此數爲二位數，故須除去。

但由 1,2,3,……9 九個數字中每次二個作成二位數有 ${}_9P_2=72$ 種。

所求之排法有 ${}_{10}P_3-{}_9P_2=648$ 種。

〔例4〕 用 0,1,2,3,4,5 六個數字，不許數字重複，排列成能以 5 除盡之三位數，問共有若干數？

（解） 凡能用 5 除盡之數，其末位數字必爲 5 與 0。

如末位限定爲 5，其排列數爲 ${}_5P_2$。

如末位限定爲 0，其排列數爲 ${}_5P_2$。

但首位爲 0，末位爲 5 之排列數爲 ${}_4P_1$，此爲二位數，必須删除。故所求之排列數爲 $2\times{}_5P_2-{}_4P_1=36$ 種。

〔例5〕 將漢書 5 册，英文書 3 册，每次全取而排列之，若英文書 3 册必須互相隣接不許隔開時，其排法有幾種？

（解） 依題意英文書 3 册不許隔開，故可看待爲一册，其本身可互換位置，故其排法有 ${}_3P_3$ 種。漢書有 5册，其排法有 ${}_5P_5$。由基本定理知共有 ${}_5P_5\times{}_3P_3$ 種排法。又可將英文書 3 册排在漢書之前，或在漢書第一册之後，或第二册之後，或第五册之後，其排法有 6 種。

故所求之排法共有 ${}_5P_5\times{}_3P_3\times6=4320$ 種。

〔例6〕　某童子軍以左右手分執不同顏色之三旗作旗語，問其法有若干種？

（解）　因其左手可於三旗中任取其一，餘二旗以右手執而排列之，其法有 ${}_3P_1\times{}_2P_2$ 種，又其左手可取其二，餘一以給右手，其法有 ${}_3P_2\times{}_1P_1$ 種，又其左手取三而排列之法有 ${}_3P_3$，或左手不取而右手執三旗以排列之，其法有 ${}_3P_3$ 種，故得 ${}_3P_3+{}_3P_1\,{}_2P_2+{}_3P_2\,{}_1P_1+{}_3P_3=6+6+6+6=24$

即共有24種方法。

〔例7〕　於 *fancies* 中之字母，每次全取而排列之，問

（i）　字首字尾用子音者有幾法？

（ii）　子音居奇位置者有幾法？

（iii）　字母 c 不在中央者有幾法？

（解）　母音 a, i, e 三文字，子音 f, n, c, s 四文字。

（i）　字首用子音有 ${}_4P_1$ 法，字尾可用餘下三個子音中任取一個填下去，其法 ${}_3P_1$，中間五位用其餘五個字母任意排列有 ${}_5P_5$ 法，故其所求之排法有 ${}_4P_1\times{}_3P_1\times{}_5P_5=1440$

（ii）　奇位置爲1, 3, 5, 7，子音排在奇位置者，其排法有 ${}_4P_4$ 法，次母音排在偶位置者有 ${}_3P_3$ 法，故所求之排法共有 ${}_4P_4\times{}_3P_3=144$

（iii）　全字母之排列有 ${}_7P_7$ 法，因字母 c 在中央之排列有 ${}_6P_6$ 法（即 c 排在中央，其餘位置由其餘6個字母填入之法有 ${}_6P_6$）故字母 c 不在中央之排法爲 ${}_7P_7-{}_6P_6=4320$

習　題　六　十

（1）　計算下列各題：

（a）　${}_8P_3$　　（b）　${}_5P_3\times{}_6P_2$　　（c）　${}_nP_6$　　（d）　${}_nP_{n-r}$

（2）　試求下列各式之 n 之值：

（i）　${}_{2n}P_3=100\times{}_nP_2$　　（ii）　${}_{2n}P_4=127\times{}_{2n}P_3$

（3）　從1, 2, 3, ……9 九個數字中，任取三個不同數字，可得若干個三位數？

（4）　用1, 2, 5, 8可作4位數中奇數有幾個？

（5）　設由8個數1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 中取出5個不同數字作成五位數，其第一位，第三位及第五位限用奇數，問可作成若干不同之數？（西南聯大）

（6）　七盞排成一列，其中一指定之盞不得在列首或列尾，共有幾種排列法？

(7) 設有男生七人，女生三人，排成一列；若女生三人必須互相隣接而不許隔開，問其排法有幾？（北平、中山大學）

(8) 用數字 1, 2, 3, 4, 5, 6 所作 6 位數中，以 25 可除盡之數有若干？

(9) 由五個數字 1, 2, 3, 4, 5 作種種排列，所得之五位數，其中大於 2300 的有多少個？但數字不許重複。

(10) 四面顏色不同之旗，每次懸掛一面或數面，上下排列，可表示若干信號？

(11) 划船時只能划右舷的有 4 人，只能划左舷的也有 4 人，此 8 人划這船的排法有若干？

(12) 在 *numerical* 一語中每次取五字母排列之，其奇位用子音時，共有排列法若干？

(13) 用 *triangle* 各字母所作排列中，其兩端皆無 a 或 n 之任一字母之排列數多少？

(14) 某鐵路共有 15 站，其中五站為大站，餘為小站，今擬將大站與大站間之車票製成紅色，小站至小站間車票製成藍色，餘為白色，問紅、藍、白色車票各幾種？

習題六十解

(1) (a) 336　(b) 1800　(c) $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$

(d) $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(r+1)$

(2) (i) 由原式，得 $2n(2n-1)(2n-2)=100n(n-1)$，因 $n\geqq 2$ 兩邊除以 $n(n-1)$，得 $4(2n-1)=100$　$\therefore\ 2n-1=25,\ n=13$

(ii) 由原式，得 $2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)=127\cdot 2n(2n-1)(2n-2)$

$\therefore\ n\geqq 2$，兩邊除以 $2n(2n-1)(2n-2)$，得 $2n-3=127$　$\therefore\ n=65$

(3) ${}_9P_3=9\times 8\times 7=504$ 個。

(4) 1 或 5 在個位者為奇數，如此之數各有 $3!$，故所求個數為 $3!\times 2=12$ 個。

(5) 8 個數字中為奇數者，有 1, 3, 5, 7 四個：4 個中取一個置第一位之方法有四，再取一個置第三位之方法有 3，又再取一個置第五位之方法有 2；8 個數字已取去三個後還剩下五個，由 5 個中取一個置第二位之法有 5，再取一個置第四位之法有 4，依基本定理，5 個全取之方法為：$4\times 3\times 2\times 5\times 4=480$ 種。

(6) 七童之排列數為 $7!$，因該童在列首之排列數為 $6!$　在列尾之排列數亦為 $6!$，故得排列方法為 $7!-2\times 6!=3600$。

(7) 因女生三人必須相隣，故視為一人，而 10 人排列實等於 8 人排列，即有 $8!$ 方

法。但女生三人相隣排列法有 3！，故全部排列法爲 3！×8！。

(8) 以 25, 50, 75, 00 爲尾之數均可用 25 整除。其他不能以 25 整除，然由所設數字不能造成其末尾爲 75, 50 或 00。故所求數等於以 25 爲尾之數。而 25 爲尾之數之個數等於由 1, 3, 4, 6 四個數取出四個所作的排列數，故所求之個數爲 ${}_4P_4=24$。

(9) 用五個數作成五位數之個數有 ${}_5P_5=5!$。而其中亦有比 2300 小之數。可分爲如次：

(i) 1佔在首位時，用 2, 3, 4, 5 四個數字作成四位數之方法有 ${}_4P_4=4!$

(ii) 21 佔首二位時，用 3, 4, 5 三個數字作三位數之方法有 ${}_3P_3=3!$

故所求之個數爲 $5!-4!-3!=90$。

(10) 不論每次取旗幾面，每有一種排列法，即可表示一種信號，故所求信號數共有 ${}_4P_1+{}_4P_2+{}_4P_3+{}_4P_4=4+12+24+24=64$。

(11) 右舷 4 人之排法有 ${}_4P_4=4!$ 對右舷每一種排法，左舷 4 人之排法亦有 ${}_4P_4=4!$ 故所求之數 $=4!\times4!=576$。

(12) ***numerical*** 中子音有五個 (n, m, r, c, l)，從此五個子音取三個排在奇數位 (第一、第三、第五) 之方法有 ${}_5P_3$ 種。對此 ${}_5P_3$ 之每種用其他字母 (9－3) 取出 2 個排在偶數位之方法有 ${}_6P_2$ 種。故所求之排列法爲 ${}_5P_3\times{}_6P_2=1800$

(13) 從 a, n 以外之字母 t, r, i, g, l, e 取出二個排在兩端之法有 ${}_6P_2$ 種。對此各排列，把兩端二個字母以外的六個字母排在中間六個位置的法有 ${}_6P_6$，故 a, n 不在兩端之排列數爲 ${}_6P_6\times{}_6P_2=21600$。

(14) 紅色車票共 ${}_5P_2=20$ 種，藍色車票共 ${}_{10}P_2=90$ 種，
白色車票計 ${}_{15}P_2-{}_{10}P_2-{}_5P_2=210-90-20=100$ 種。

四、循環排列 (Circular Permutation)

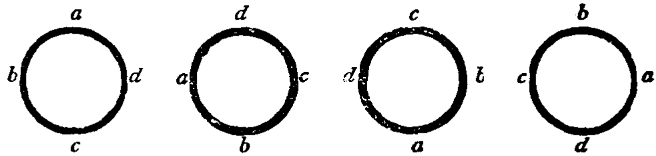
由 n 個相異物件中，每次取 n 個，不許重複，沿一圓周或一閉曲線上而排列之，稱爲循環排列其排列數爲 $(n-1)!$。

(四) n 個人環坐一圓桌之方法有幾種？

設 n 個坐位之每個坐位均有區別之記號時，將 n 個人配坐於此圓桌坐位之方法與上節之 n 個相異之物件悉取排爲一列之方法相同爲 $n!$ 種。

實際上排列只論其互相之次序關係，例如將 a, b, c, d 之位置，如下圖順

皆移動，則其與未移動前之順序相同。



即將 n 個人順次換一坐位之 n 個排列法可算做一種。

故其方法有 $\dfrac{n!}{n}=(n-1)!$

此結果與將某一人固定而將所剩下之人依各種順序排列之排列數相同。
例如：8 人圍坐一圓桌應有坐法爲 $(8-1)!$ 種。

系：由 n 個相異物件中，每次取 r 個，不許重複，其循環排列法有

$\dfrac{{}_nP_r}{r}$ 種。

r 個在直線排列，則有 r 種，在循環排列，則變爲一種，(如上圖可知)。故其方法有 $\dfrac{{}_nP_r}{r}$。

〔例1〕 某君之家，有夫婦二人及其子女六人，圍圓桌而坐；限定夫婦二人並肩而坐，問共有若干不同坐法，又限其幼子坐於夫婦之中，問共有若干不同坐法？

（解）（i） 因限定夫婦二人並肩而坐，宛如一人，則其排列數有 $(7-1)!=6!$；但夫婦二人可易位，故其排列數有 $2!\times 6!=1440$ 種。

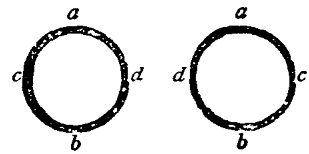
（ii） 因限定幼子坐於夫婦中間，此三人宛如一人，其排列數有 $(6-1)!=5!$；但夫婦二人可易位，故其排列數有 $2!\times 5!=240$ 種。

〔例2〕 七男七女不准同性相鄰，而圍坐於圓桌，問有若干方法？

（解） 如先使女人入席，其排列數有 $(7-1)!=6!$ 種，再使男人插入其間；此時圓桌上有 7 個空位，7 個男人入其 7 個空位之排列數有 $7!$ 種。
故其坐法有 $6!\times 7!=3628800$ 種。

又如將 n 個相異珠類，悉穿成一珠圈，其排列爲 $\dfrac{(n-1)!}{2}$，將 n 個相異之珠逼

結爲念珠或首飾時，如右圖（$n=4$）將一圖翻過來，則成爲他圖，此時若無需區別左轉及右轉，則此二種應算爲一種，故其方法爲 $\frac{(n-1)!}{2}$



〔例3〕 10粒相異之鑽石，問可穿成幾種鑽石圈？

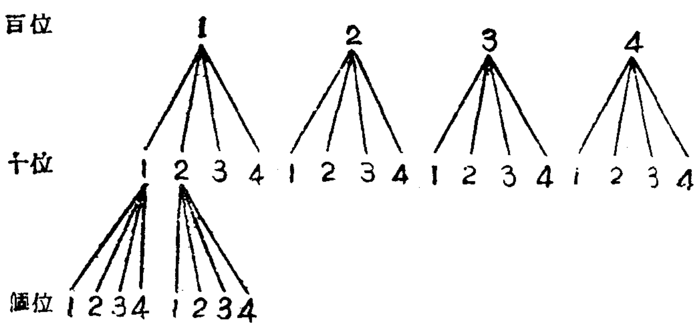
（解） $\frac{(10-1)!}{2}=\frac{9!}{2}=181440$ 種。

五、重複排列

由 n 個相異物件中，每次取 r 個，准許重複 r 次之直線排列稱爲重複排列。其排列數爲 n^r。

舉例說明如下：

例如：從 1, 2, 3, 4 之四個數字中，准許重複取出 3 個作成三位數時，佔百位之數，由 4 個中任取一個均可，故有 4 種。同理佔十位，個位均有四種。由基本定理知共有 $4\times4\times4=4^3$ 種。



因排成一列之 r 個位置中，每一個位置均可在 n 個物件中，任意選取一個，即均有 n 法，故 n 個物件在 r 個位置之重複排列法，按基本定理，應有 $n.n.n.\cdots\cdots$（乘至 r 個因數）$=n^r$ 種，其中 r 可大於 n。

〔例1〕 將5個相異物件分給二童之方法有幾種？

（解） 設 a, b, c, d, e 爲五個相異物件，a 可分給甲亦可分給乙，故 a 之分法有二種。又 b 亦同理有二種。故 a, b 分給二童之法有 2^2 種。
同理推之，共有 $2^5=32$ 種。

〔例2〕 准許重複時，將 $0, 1, 2, \cdots\cdots 9$ 十個數字排成十位數，問可排成若干？

（解） 先由 10 個數字，准許重複，每次取 2 個，則得 $10^2=100$ 種。但其中含有 $00, 01, 02, 03, \cdots\cdots 09$ 之十個不合條件之數，應棄之，故共有 $100-10=90$ 種。

六、物件不盡相異之排列

設 n 個物件中，有 p 個相同，其餘相異。若全取 n 個，不許重複，依不同之直線上次序而排，其排列數爲 $\dfrac{n!}{p!}$。

（例題） 設有 a, b, c, c, c 五個文字，全取而排列之，其排列法有 x 種。於 x 種排列中之任一種爲 $c\,a\,c\,b\,c$，若變 c, c, c 爲不相同之 c_1, c_2, c_3 而不變其他文字之位置，只互換 c_1, c_2, c_3 之位置，則可得 $3!$ 種。故此時之排列數爲 $3!x$ 種。又五個文字全取而排列之，其排列法有 ${}_5P_5=5!$ 因此，得 $3!x=5!$

故 $x=\dfrac{5!}{3!}$

推擴之，

設 n 個物件中，有 p 個，q 個，r 個相同物件之…組，其排列數爲 $\dfrac{n!}{p!q!r!}$。

（證） 設 n 個物件中，有 p 個 a，q 個 b，r 個 c，……等，令每次全取 n 個之排列數爲 A 種。在每個排列中將任意兩相同字母之位置互換時，此排列不變。但若於其每次排列中，變 p 個 a 爲 p 個不同之物件，則此 p 個之排列方法當有 $p!$ 種。故此時排列總數當爲 $A\times p!$ 種。又若於 $A\times p!$ 個排列中，令 q 個 b 變爲 q 個不同之物，則其排列總數當爲 $A\times p!\times q!$ 種。同理若 r 個以及其他各種相同之物件全變爲不同之物件，則其排列總數爲
$A\times p!\times q!\times r!\times\cdots\cdots$ 此時 n 個物件若皆變爲不同之物件，而由此 n 個

不同之物件盡取其數而排列之，其排列數爲 ${}_nP_n=n!$

$\therefore\ A\times p!\times q!\times r!\times\cdots\cdots=n!$

$\therefore\ A=\dfrac{n!}{p!q!\times r!}$

〔例1〕 今有一圓銀幣 5 枚，半圓輔幣 6 枚，二角輔幣 4 枚，分給兒童 15 人，每人 1 枚，問有若干分法？

（解） 十五個物件，分給十五個人，應有 $15!$ 種方法。但其中有五個一圓銀幣，六個半圓輔幣，四個二角輔幣；故有 $\dfrac{15!}{5!6!4!}=630630$ 種分法。

〔例2〕 用 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4 諸數碼排列成八位數有幾種？

（解） 八個數字中，1 有三個，2 有二個，故每次全取之排列法有

$A=\dfrac{8!}{3!2!}=3360$ 種排法。其中含有首位爲零之數，（即 0 排在首位其餘由七個數字塡下即得）其方法有 $\dfrac{7!}{3!2!}=420$，故所求之排列數爲

$3360-420=2940$ 種。

〔例3〕 英文字 *factoring* 諸文字，每次全取而排列之。

（i） 母音保持 a, o, i 順序者有幾種？

（ii） 子音保持 f, c, t, r, n, g 順序者有幾種？

（iii） 母音與子音均保持原順序者有幾種？

（解） （i） a, o, i 順序不變之排列法與三個同字母之排列法相同，即有

$A=\dfrac{9!}{3!}=6048$ 種排法。

（ii） f, c, t, r, n, g，順序不變之排法亦與六個同字母之排列法相同，即有 $A=\dfrac{9!}{6!}=504$ 種排法。

（iii） 母音與子音順序均不變之排法，亦與三個同字母，又六個同字母之排法相同，故有 $A=\dfrac{9!}{3!6!}=84$ 種排法。

〔例4〕 棋盤形的街道，有 10 條直街，5 條橫街；有一人由一角走至對角，要取徑最短，問有幾種走法？