点集拓扑原理与题解

（上）

J·D·鲍姆　著

梁鸿绩
虔克平　编译

天津师范学院数学系

序　　言

在写本书时，我一直关注在一般院校的大学生，对这样一个学生在他的学院历程中，及早给他讲授近世代数的重要性已普遍地受到重视，可是在大学课程里引进拓扑学的必要性似乎没有那末突出，我觉得，在数学里泛函分析构成一个大型的综合，从而明确作为分析学的基础的代数学和拓扑学两方面的重大意义，因此我试图提供一个导引性的拓扑学课本，意思是想与近世代数的许多现行课本并列，我希望在不远的将来，一学期的拓扑学课程可以为绝大多数的大学数学专业科目所采用，这样就使近代分析的课程也能和大学的学生见面。

本书的精神是几何的和公理的并存，对强调几何手段的理由，是我相信学生已经具备几何方面的基本训练。因此，如果运用几何的直观则对拓扑学的领域是最容易入门的。关于公理方法的理由有两方面：第一，它与学生在近世代数的经验是平行的。第二，它使本书与数学发展趋势保持一致。

除了前面说的主要宗旨之外，还有两个次要的意图，因为导引课程的点集拓扑学不仅对分析提供一个基础，也对点集拓扑和代数拓扑的进一步工作提供一个基础，所以我打算包括进一些适合于不止对分析学有兴趣的学生的题材。主要的一系列课题当然是那些对分析有重要意义的材料。不过也有撇开这个主要性质的，即对分析来说是次要的一些内容。这种次要题材对那些愿意钻研点集拓扑或代数拓扑的学生来说是有重要意义的。

另一个想法是打算让读者来决定本书的形式。在开头的一些证明，讲的都很详细。这些证明对内行的教学工作者来说显得是细得过分了。但是，我有这种经验，学生学习这种性质的课程，头一次接触公理的数学，在开头阶段是需要一点帮助的。到后面几章，学生得更多的依靠自己的力量，因那时的各个证明已不再包含那样多的十分详尽的细节了。关于证明方面所讲的情况，同样地也适用于习题，开头的那些习题都是简单的，有的简直是微不足道的，而后面的特别是最后一章的习题就很显著地对学生提出要求。对本书里提到的概念没有打算给出原始的出处，而由参考书来弥补给学生提供进一步的学习，在好些这样的参考书里，可以找到这些原始出处的详尽说明，因此本书再包含那些似乎是多余的。

本书的初稿曾给奥勃林学院的学生试用过。我发现这课本的材料可以够用一学期十五周不致紧张。如果这看来是分量太重，目录上的某几节可以删去也不致妨害课本的连续性。如有必要缩短课程，第一章的第八节，第三章的第三节和第四节，第四章的第四节和第五节，第五章的第三节都可删去。习题包含许多重要的例子是说明理论所必需的，而且强调，即使不是全部也是绝大部分都得做。有很少几个练习题指定为《学期论文》，这几个练习题是作为进一步研究的题目或作为教师的教学手段而提出来的，有的教师宁愿指定学生写学期论文而不采取最后考试的传统办法。

定理、定义、引理和推论是按每章依次接连编号的，例如在第三章，这类对象的第十个是编为“3·10”，接着写在3·10这个号数之后的是用以指出这个对象的名目。练习题是按每章开头是1连续编号的。例如，第二章里的第十二个练习题是只简单地编一个号“2·12”，

在以后提到时，称做“练习2·12”。每个定理证明完了都用符号“■”表示而不实际说证明完成。

我向若·赫·冰教授和莫·勒·克梯斯教授表示感谢，感谢他们使我受到许多宝贵的启示；我也感谢茹斯·爱德华和伊利莎白·卡特在打印手稿上的帮助；还感谢给本书初稿查出许多印刷错误的很多学生，他们人数太多，不能一一说出每个人了。但是无论如何，对任何错误的最后责任都必须落在我的身上。

J D·鲍姆

目　　　　录

绪　　论

§1 引　　言

当前绝大多数的数学领域都以不定义的对象的类和规范这种对象的状况的一套公理开始。这样做对数学科学有许多好处。最大的好处也许是，我们所遇到的任何数学体系，如果它遵循一特殊数学领域的公理，则也将遵循在这领域内成立的一切定理。因为公理的发展是由一套不定义的对象开始，在着手于手公理自身的发展之前，学习一点集论就是很自然的了。

§2 集

作为一个数学领域的集论，自身也有公理的发展。但这里我们不采取这种观点，而宁愿在相当大的程度上依赖直观去建立这个理论。依照康托，我们把"集"这个字理解为任何的一个类，即"我们看到的或想到的那些确定的一个一个的对象m所形成的整体M"。聚拢起来而构成集的那些对象叫做该集的元或成员。但整个集是被看为单一的实体。集一般用大写罗马字母A、B等或书写体$\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$等或者德文字母$\mathfrak{A}$、$\mathfrak{B}$等来表示，集的元一般用小写罗马字母表示。

我们有两种方法指出什么是集的元。如果这集"很小"，我们能把集的元简单地表列出来。这种作法的一贯的方式是把元列出于波形括号或大括号内，并用逗号把每个元和下一个元分开。例如，$A=\{1,2,3\}$。若碰到的集"很大"，再用这个方法就麻烦了，这时我们提出用给出集的所有元所具有的某些公共性质来表明该集。例如，$A=\{x \mid x$是小于4的正整数$\}$。再者，我们的记号是前后一致的；在大括号里先用一个字母表明本集的代表元（如例中的x），跟着画一条直线，然后写出这代表元与集的所有元都具有的公共性质。

我们用一种写法指明某一特殊的元是一个集的成员，例如$2\in A$，读为"2是集A的元"或"2是A的成员"，或者简单地读为"2属于A"。当某一元不属于某一集，比如，4不属于A我们就写作$4\notin A$，这读作"4不属于A"。上面提到的任何一句的反义情况都如此。

若对每个$x\in A$也都有$x\in B$，则集A叫做集B的子集或集A含于集B，这时写为$A\subseteq B$或$B\supseteq A$。若$A\subseteq B$和$B\subseteq A$同时成立，这时集A和集B恰有相同的元，写为$A=B$．对空集，也就是没有任何元的集是用符号ϕ表示。并注意下列的普遍事实：$A\subseteq A$，$A=A$，$\phi\subseteq A$，当而且仅当$A=\phi$时，$A\subseteq\phi$．注意，"$\subseteq$"是一个传递关系，即$A\subseteq B$和$B\subseteq C$包含$A\subseteq C$。

有一种记法$A\subset B$，是指$A\subseteq B$但$A\neq B$，虽然我们对此将很少使用但也会偶然碰到。为了否定一个集含于另一个集内，即断言$A\subseteq B$是错误的，我们写作$A\nsubseteq B$。

这里我们提醒学生，这是第一次提醒学生，今后在继续读本书时还将多次地提醒他，数学记号是高度变化的。集的包含记号也就是"$\subseteq$"和集的真包含记号，即"$\subset$"就是这个情形。有的著者对集的包含单用符号"$\subset$"而且绝不引入集的真包含概念。因此在读别的著作

时，学生应当注意核对不同的记号都是按怎样的方法定义的。

练　　习

0·1. 证明前面说过的普遍事实，即对任何的集A，下列的每个论断都成立：

(a) $A\subseteq A$.

(b) $A=A$.

(c) $\phi\subseteq A$.

(d) 当且仅当$A=\phi$时，$A\subseteq\phi$.

0·2. 对任意的集A、B和C证明下列结论：

(a) 若$A\subseteq B$且$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$.

(b) 若$A\subset B$且$B\subset C$，则$A\subset C$.

§3 集的代数

现在我们定义关于集的两个运算。第一是两个集的联合或并，写作$A\cup B$，是用$A\cup B=\{x\mid x\in A$或$x\in b\}$定义的。“或”字是用来表明它的非排斥意义，这使既属于A又属于B的那种元仍然在$A\cup B$内。关于两个集的第二种运算是“交”的运算，写为$A\cap B$，这是由$A\cap B=\{x\mid x\in A$，且$x\in B\}$定义的，关于集的运算的下列法则由定义可以相当容易地推导出来：

1\. (a) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.

(b) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

2\. (a) $A\cup B=B\cup A$.

(b) $A\cap B=B\cap A$.

3\. (a) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(b) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

4\. (a) $A\cup A=A$.

(b) $A\cap A=A$.

5\. (a) $A\subseteq A\cup B$.

(b) $A\supseteq A\cap B$.

6\. (a) $A\subseteq C$且$B\subseteq C$，则$A\cup B\subseteq C$.

(b) $A\supseteq C$且$B\supseteq C$，则$A\cap B\supseteq C$.

7\. (a) $A\cup\phi=A$.

(b) $A\cap\phi=\phi$.

如前所述，当而且仅当$A\subseteq B$且$B\subseteq A$时有$A=B$，因此，为了证明上述的大部分命题，我们需证两个包含。作为示范，我们来证2.(a)，设$x\in A\cup B$，则$x\in A$或$x\in B$，从而$x\in B$或$x\in A$，由此，$x\in B\cup A$，从而得出$A\cup B\subseteq B\cup A$，设$x\in B\cup A$，则$x\in B$或$x\in A$，从而有$x\in A$或$x\in B$，由此$x\in A\cup B$，于是得出$B\cup A\subseteq A\cup B$，从刚刚证明的两个包含就得出$A\cup B=B\cup A$。

一般地，假定我们正在讨论的集都是某一泛集U的子集，然后定义A的余集，并用A^c表示。这是由$A^c=\{x\mid x\in U$且$x\notin A\}$定义的。两个集A和B的差定义为$A-B=\{x\mid x\in A$且$x\notin B\}$。由这两个定义可以得出运算法则的另一个一览表。那就是：

8.（a）　$\phi^c=U$。

　（b）　$U^c=\phi$。

9.（a）　$A\cup A^c=U$

　（b）　$A\cap A^c=\phi$。

10.　$(A^c)^c=A$。

11. 若$A\subseteq B$，则$A^c\supseteq B^c$；反之也对。

12.（a）　$A\cup B)^c=A^c\cap B^c$。

　（b）　$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$。

13.　$A-B=A\cap B^c$。

上面的法则12（a）和（b）叫做迪谋根法则，不久我们将遇到这两个等式的一般形式。学生将通过每个等式的证明确信上述法则的真实性。这里再一次提醒学生，对余集所使用的记号A^c与在别的课本里见到的记号可能是不同的。

现有的表对我们的需要大概够了，但一套练习的结果给出许多别的关系，这也偶尔有用。

练　　习

证明下列各题，其中A、B和C都表示某一泛集U内的集。

0·3.　$A\subseteq B$一般不包含$B\subseteq A$。

0·4.　当且仅当$A\cup B=B$时，$A\subseteq B$。

0·5.　当且仅当$A\cap B=A$时，$A\subseteq B$。

0·6.　$A\cap(B-C)=B\cap(A-C)=(A\cap B)-C=(A\cap B)-(A\cap C)$。

0·7.　$A-B=A-(A\cap B)$。

0·8.　当且仅当$A\subseteq B^C$时，$A\cap B=\phi$。

0·9.　若$A\cup B=U$，且$A\cap B=\phi$，则$B=A^c$。

0·10.　$(A-B)^c=B\cup A^c$。

0·11.　$(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$。

0·12.　$(A-C)\cup(B-C)=(A\cup B)-C$。

0·13.　$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$。

0·14.　$A-(A-B)=A\cap B$。

0·15.　$A\cup(B-A)=A\cup B$。

0·16.　$A\cap(B-A)=\phi$。

显然，对联合或交应用结合律，前面的1（a）和1（b）都能取为集的任何有限类的联合或交。但是，如果不仅取为集的有限族而能取为集的任意族的联合及交，那是很有用的。为了定义这样的概念，我们籍助指数集或者也叫标号集来做到这一点。我们可以设想指数集为一套标号，使得集族的每个集都与这指数集的一个标号结合，因此，设A是指数集并对每

个$\alpha\in A$结合一个集B_α，然后定义

$$\bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha=\{x|x\in B_\alpha，对某一\alpha\in A\}$$

和
$$\bigcap_{\alpha\in A} B_\alpha=\{x|x\in B_\alpha，对所有的\alpha\in A\}.$$

若A是空集，则定义

$$\bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha=\phi \quad 和 \quad \bigcap_{\alpha\in A} B_\alpha=U.$$

于是得出下列的运算法则：

14．若$\alpha\in A$，则$\bigcap\limits_{\alpha\in A} B_\alpha\subseteq B_\alpha\subseteq\bigcup\limits_{\alpha\in A} B_\alpha$ $(A\neq\phi)$.

15．（a）若对每个$\alpha\in A$，$B_\alpha\subseteq C$，则$\bigcup\limits_{\alpha\in A} B_\alpha\subseteq C$.

（b）若对每个$\alpha\in A$，$B_\alpha\supseteq C$，则$\bigcap\limits_{\alpha\in A} B_\alpha\supseteq C$.

16．若对每个$\alpha\in A(A\neq\phi)$，$B_\alpha\subseteq C_\alpha$，则$\bigcup\limits_{\alpha\in A} B_\alpha\subseteq\bigcup\limits_{\alpha\in A} C_\alpha$和$\bigcap\limits_{\alpha\in A} B_\alpha\subseteq\bigcap\limits_{\alpha\in A} C_\alpha$.

17．（a）$\bigcup\limits_{\alpha\in A}(B_\alpha\cup C_\alpha)=(\bigcup\limits_{\alpha\in A} B_\alpha)\cup(\bigcup\limits_{\alpha\in A} C_\alpha)$.

（b）$\bigcap\limits_{\alpha\in A}(B_\alpha\cap C_\alpha)=(\bigcap\limits_{\alpha\in A} B_\alpha)\cap(\bigcap\limits_{\alpha\in A} C_\alpha)$.

18．$\bigcap\limits_{\alpha\in A}(C\cup B_\alpha)=C\cup(\bigcap\limits_{\alpha\in A} B_\alpha)$ $(A\neq\phi)$.

19．对$A\neq\phi$，$\bigcup\limits_{\alpha\in A}(C\cap B_\alpha)=C\cap(\bigcup\limits_{\alpha\in A} B_\alpha)$.

20．$$\left.\begin{array}{ll}(a) & (\bigcup\limits_{\alpha\in A} B_\alpha)^c=\bigcap\limits_{\alpha\in A} B_\alpha{}^c \\ (b) & (\bigcap\limits_{\alpha\in A} B_\alpha)^c=\bigcup\limits_{\alpha\in A} B_\alpha{}^c\end{array}\right\}（迪谋根法则）$$

作为对刚刚讨论过的类型的联合与交叉一可供选择的记法，我们有时采用下述定义：设$\mathscr{F}$是集$\{B\}$的族，则

$$\bigcup_{B\in\mathscr{F}} B=\{x|x\in B，对某一个B\in\mathscr{F}\}.$$并且类似定义交。

下述记法也偶然使用：若$\mathfrak{A}$是集$\{A\}$的族，X是某一个固定的集，则$\mathfrak{A}\cap X$表示族$\{A\cap X|A\in\mathfrak{A}\}$。

最后，设X_i，$i=1,2,\cdots\cdots,n$是n个集，则这些集的笛卡尔乘积$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} X_i=\{(x_1,x_2,\cdots\cdots x_n)|x_i\in X_i\}$．这等于是说，$n$个集的笛卡尔乘积恰是所有可能的$n$数组的集，其中每个$n$数组的第$i$项是从集$X_i$选出的。在仅是两个集的情况下，常常写成$X_1\times X_2$以代替$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{2} X_i$．例如若$A=\{1\ \ 2\}$，$B=\{a,b,c\}$，

则
$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}.$$
以后，我们将相当详细地讨论笛卡尔乘积。

练　　习

0·17. 验证迪谋根法则 [20,(a) 和 (b)] 在 $A=\phi$ 的情况下也象 $A\neq\phi$ 的情况下一样成立。

0·18. 实直线 R 与自身的笛卡尔乘积是实平面，若第一象限是集

$$\{(x, y) \mid x>0、y>0 \quad x, y\text{实数}\}$$

试把第一限象写为笛卡尔乘积。

0·19. 若 $R^+=\{x \mid x\text{实数}, x>0\}$，$\mathfrak{A}$ 是 R^+ 的所有子集的族。

若 $B=[-1,1]=\{x \mid x\text{实数}, -1\leqslant x\leqslant 1\}$，试描述 $\mathfrak{A}\cap B$。

§4. 欧拉—温示意图

在处理集论的问题时，集与集之间的关系的图象化方法常常是有帮助的，这样的图象或示意图通常叫做温示意图或欧拉示意图，或叫做欧拉—温示意图。通常是把泛集画为一个大长方形，而有关的集是用长方形里边的区域表示。描绘 $A\cap B$ 的欧拉—温示意图，显示于图0·1。

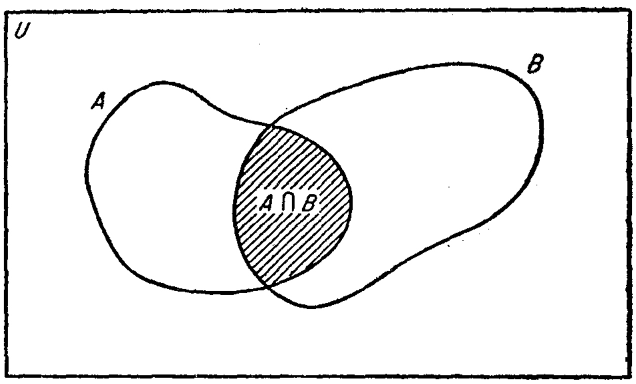

图　0·1

应当注意，示意图本身不证明集论里的特殊结果；但是这常常给出关于如何做出证明的某种提示。例如在下面的图 0·2 和图 0·3 里，这个特点显示出来了。这给等式 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ 的证明提供一个线索。

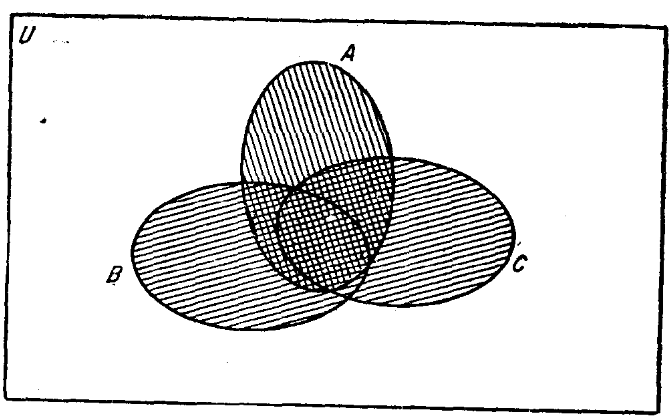

图0·2 （表示$A\cap(B\cup C)$）

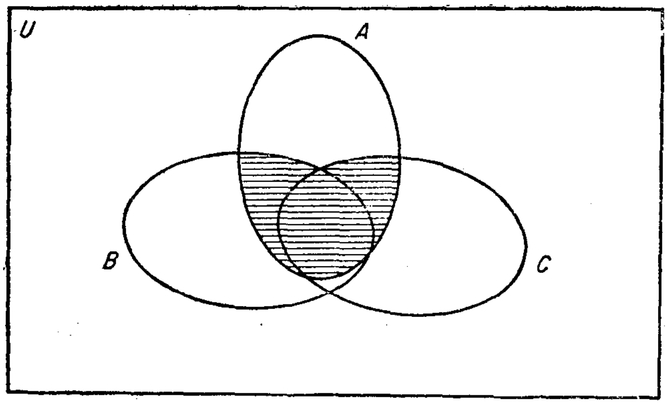

图0.3（表示$(A\cap B)\cup(A\cap C)$）

练　　习

0.20. 画欧拉——温示意图，说明下列的每个情况：

（a）$A\subseteq B$.

（b）$A\cap B\neq\phi$.

（c）$A\subset B^c$.

（d）$A\cap B\neq\phi$，$B\cap C\neq\phi$，$C\cap D\neq\phi$，
$D\cap A\neq\phi$，$A\cap C=\phi$，$B\cap D=\phi$.

§5　关　　系

我们将不一般地研究关系，而把注意力局限于两种对今后特别有用的关系。但是，我们先一般地定义关系的概念。集A内的一个关系，就是序对（a，b）的类，其中$a\in A$，$b\in A$。通常用R表示关系，记号aRb表示序对（a，b）是确定这关系的类的一个元。

等价关系是一个关系，它具有下述的三个性质：

（1）对每个$a\in A$，$a\,R\,a$（反射性）。

（2）若$a\,R\,b$，则也有$b\,R\,a$（对称性）。

（3）若$a\,R\,b$和$b\,R\,c$，则也有$a\,R\,c$（传递性）。

若R是集A内的一个等价关系，则用$R(a)$或用［a，R］或用［a］表示这样的集：$\{b|\ b\in A,\ a\,R\,b\}$，并称这个集［a］为由a确定的等价类。若关于集A的一个划分是指集A的子集的族$\mathscr{F}$，这些子集是不相交的（即B，$C\in\mathscr{F}$，$B\neq C$包含$B\cap C=\phi$）而且它们的并是A，则下述的重要的定理成立：

0.1. 定理. 集A内的每个等价关系都导致A的一个等价类的划分。反之，A的每个划分$\mathscr{F}$也都导致A内的一个等价关系，那些等价类正是$\mathscr{F}$的集。

证明：设 $\mathscr{F}=\{[a] \mid a\in A\}$ 由于每个 $a\in A$，$a\in[a]$. 所以

$$\bigcup_{a\in\mathscr{F}}[a]=A.$$

现在假定 $[a]\cap[b]\neq\phi$，则能选出 $c\in[a]\cap[b]$，从而由 $[a]$ 和 $[b]$ 的定义有 $c\,R\,a$ 和 $c\,R\,b$，再由 R 的对称性和传递性有 $a\,R\,b$. 设 $d\in[a]$，则 $d\,R\,a$，且因已有 $a\,R\,b$，从 R 的传递性就得出 $d\,R\,b$，从而 $d\in[b]$. 类似地，对任何 $e\in[b]$ 也有 $e\in[a]$，由是 $[a]=[b]$，因此，这等价类是要么不相交要么重合，从而 $\mathscr{F}$ 是 A 的一个划分。

反之，设 $\mathscr{F}$ 是 A 的一个划分，定义 $a\,R\,b$ 为当且仅当 a 和 b 属于同一个集 $B\in\mathscr{F}$，从而就得出 R 是一个等价关系且 R 的等价类正是 $\mathscr{F}$ 的集，证明的细节留给读者。∎

顺序关系是我们要考虑的第二种。一般地，顺序关系是传递的关系。但是，我们把我们所需要的两种特殊类型的顺序关系区分开来，头一个是半序关系。我们把集 S 内的半序关系定义为满足下列条件的一种关系：

（1）对 $x\in S$，$x\,R\,x$.

（2）对 x，$y\in S$，$x\,R\,y$ 和 $y\,R\,x$ 一起包含 $x=y$.

（3）对 x，y，$z\in S$，$x\,R\,y$ 和 $y\,R\,z$ 一起包含 $x\,R\,z$.

半序关系的典型例子是关系 $A\subseteq B$，这是某一泛集 U 的所有子集的族内的关系。

我们所需要的第二个顺序关系是全序关系，由于我们的目的，我们定义全序关系为半序关系，其中另一个条件成立：

（4）若 x、$y\in S$ 且 $x\neq y$，则不是 $x\,R\,y$ 就是 $y\,R\,x$.

全序关系的典型例子是在全体实数的集内的关系 $x\leqq y$。

应当提醒学生，可能遇到不同于上述的全序关系的定义，持别如下所述有时也被作为全序关系的定义：

集 S 内的全序关系是一个关系，它满足下列条件：

（1）对任何 x，$y\in S$，下述三者有一且只有一个成立：$x\,R\,y$，$y\,R\,x$，$x=y$

（2）对 x，y，$z\in S$，$x\,R\,y$ 和 $y\,R\,z$ 一起包含 $x\,R\,z$.

这种定义全序关系的典型例子是全体实数的集内的关系 $x<y$，但是由于我们的目的，我们采取在前面给出的全序关系的定义。

练　　　习

0.21. 在正整数的集 Z^+ 内，设 $x\,R\,y$ 意味着 $x-y$ 可以被 7 除（即 $x-y=7K$，其中 K 是整数）. 证明 R 是一个等价关系并叙述等价类。

0.22. 在正整数的集 Z^+ 内，设 $m\leqslant n$ 意味着 m 能整除 n（即 $n=mK$，其中 $K\in Z^+$）证明"$\leqslant$"是关于 Z^+ 的一个半序。

§6 无　　限　　集

我们将在第二章的开头定义并稍微比较详细地讨论函数。但目前我们需要一个特殊类型的函数，我们按下述方法定义 A 与 B 之间的一对一的对应：首先考虑 f（函数或对应）为序

对 (a, b) 的一个集，其中 $a\in A$，$b\in B$，使如 (a, b) 和 $(a, b')\in f$，则 $b=b'$。这就是说 f 是单值的。因为我们设想 f 是给点（或元）$a\in A$ 指派一个值 $b\in B$，这常常写作 $f(a)=b$。对这记号学过微积分的学生是熟悉的，加之，我们强调每个 $a\in A$ 是作为第一元出现于序对 $(a, b)\in f$ 内的。于是这就保证 f 分派给每点（或元）$a\in A$，一个且只有一个值 $b\in B$。在这样情况下，f 叫做函数。为要 f 是一个一对一的对应，我们进一步强调每个 $b\in B$ 作为第二元出现于某一序对 $(a,b)\in f$ 内，并且若 (a, b) 和 $(a', b)\in f$，则 $a=a'$。这就等于是仅一个元 a 具有元 $b\in B$ 作为它的值 $f(a)$，并且每个元 $b\in B$，必出现作为某元 $a\in A$ 的值。

一对一的对应的实际作用是它分派给每个 $a\in A$ 恰好一个 $b\in B$，并且分派给每个 $b\in B$ 也恰好一个 $a\in A$。一对一的对应的典型例子是函数 $f(x)=x+1$。其中 A 和 B 都是实数集。不是一对一的对应的函数的例子是函数 $f(x)=x^2$，在这里 A 是全体实数的集，而 B 只是非负实数的集。

如果一个给定集的某一子集与正整数的集 Z^+ 之间存在有一对一的对应，则这个给定集叫做无限的，若此集的自身与 Z^+ 之间有一对一的对应，则此集叫做可数无限的，不是无限的集叫做有限的。或是有限或是可数无限的集，叫做可数的。“可计算”一词常常看作是可数的同义语。

下述断语是这些定义的简单结果：若 A 是无限的且 $A\subseteq B$，则 B 是无限的。若 B 是有限的且 $A\subseteq B$，则 A 是有限的。若 A 是无限的和 $a\in A$，则 $A-\{a\}$ 是无限的。

现在我们引进一个公理，它将使后面许多定理的证明成为可能。这样的一些证明也可能不用这个公理的假设，但在目前这个似乎很不大可能。早已清楚，这个附加公理，即选择公理的假设不会给已有的体系引进任何新的矛盾。这个公理是这样：

选择公理：设 $\mathscr{F}=\{B_\alpha \mid \alpha\in A,\ A$ 为指数集$\}$ 是不相交的非空集的非空类，则存在一个集 C，使对每 $\alpha\in A$，$C\cap B_\alpha$ 是单一个元的集。

我们可以设想 $C\cap B_\alpha$ 内的唯一的元为 b_α，并且可以规定，$f(\alpha)=b_\alpha$ 来定义一个从 A 到 C 的函数。在此情形下，f 叫做选择函数，因为它给我们从每个 B_α 选出一个元。实际上，选择公理的等价命题有很多，这里我们无意追求这些。稍后，我们将需要这公理的一个别的形式，叫做曹恩引理，但得到适当的地方再讲这个。在本章的末尾给有兴趣的学生指定一点合适的书籍作为参考资料，可以进一步探索这一课题。

下面是有限集和无限集的定义的简单推论：

设 F 是有限集，Z_n 是整数集 $\{k \mid 0<k<n\}$，则或者 $F=\phi$ 或者对某一个整数 n 使在 Z_n 和 F 之间有一个一对一的对应。反之，如果或者 $F=\phi$，或者对某一个 n 使在 Z_n 和 F 之间存在一个一对一的对应，则 F 是有限的。

从最后这段论述，容易得出，两个有限集的并仍是有限的，而且若 A 是无限的，F 是有限的，则 $A-F$ 仍是无限的。

现在我们来考虑某些结果，对此要更多地留意证明的细节。首先我们假定读者熟悉实数系，而且特别是知道正整数集是良序的，即它具有这样的性质，每个非空的正整数集都有最小元。

第一个结果粗略地说，在各种集的族里最小的集是可数集。若要求更细的分类，则可以说有限集是最小的，而且紧跟着的是可数无限集。我们证明：

0.2. **定理**. 可数集的子集仍是可数的。

证明：设A是可数集。并设$B\subseteq A$，如B是有限，则证明已完，因此可以假定B是无限集，设f是A与正整数集Z^+之间的一对一的对应，其中按通常的函数符号用$f(n)$表示A对应于整数n的元，设n_1是使$f(n_1)\in B$的最小整数，这样的整数存在，因为正整数集是良序的，然后再设n_2是使$f(n_2)\in B-\{f(n_1)\}$的最小整数。归纳地设n_k是使$f(n_k)\in B-\bigcup_{i=1}^{k-1}\{f(n_i)\}$的最小整数，注意，在后的集$B-\bigcup_{i=1}^{k-1}\{f(n_i)\}$对每个$k$是非空的。否则，我们将能在正整数集$Z_k$和$B$之间构造出一个一对一的对应，这包含$B$是有限的。然后，我们用$g(k)=f(n_k)$定义$Z^+$和$B$之间的一对一的对应，这个对应的存在证明了$B$是可数的。

我们了解下面这个结果很重要：可数集的可数族的并仍是可数的，这结果的正式叙述如下：

0.3. 定理. 设A是可数的指数集，并对每个$\alpha\in A$都有一个可数集B_α与之结合，则集$\bigcup_{\alpha\in A}B_\alpha$也是可数集。

在证明之前先注意一点，因已知可数集的子集是可数的，我们还能假定每个集B_α和集A都是可数无限的，若不然（即当有某些集是有限的），则可以用另外的元补充该有限集使成为可数无限的。我们将证明这样作成的并是可数的，而我们原来要考虑的并是这个并的子集，于是那个并作为可数集的子集是可数的。类似地，我们也能假定所有的B_α都是互不相交的（即对$\alpha\neq\beta$有$B_\alpha\cap B_\beta=\phi$）。因若不然，我们可以把所有$B_\alpha$的一切元设想为都互不相同，这样作成并，并保持把同样的元看为不同，并对这个集证明是可数的，然后把我们原来要考虑的那个并设想为把同样的元看为不同的这个并的子集。再因可数集的子集仍为可数的，这样，证明就完成了。

证明：根据刚才所指出的，我们假设A及每个B_α都为可数无限的，而且B_α是互不相交，由A是可数无限的，Z^+和A之间存在有一个一对一的对应f，因此对每个$\alpha\in A$，对应唯一一个整数使$f(n)=\alpha$。让我们以指数n代替指数α给集B_α重新命名，其中当然是$f(n)=\alpha$，于是得到集B_n，$n=1,2,3,\cdots\cdots$的族，再由每个B_n都是可数无限的，又在Z^+与B_n之间存在有一个一对一的对应f_n，使对每个$b\in B_n$存在唯一一个整数k使$f_n(k)=b$，我们用两个指数n和k把b标记为b_{nk}，按这个方式，并$\bigcup_{\alpha\in A}B_\alpha$内的每个元都附加唯一的一个指数对。这样显然可以作成下列的图式：

$$\begin{array}{llll}
B_1: & b_{11} & b_{12} & b_{13}\cdots\cdots\\
B_2: & b_{21} & b_{22} & b_{23}\cdots\cdots\\
B_3: & b_{31} & b_{32} & b_{33}\cdots\cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\ \cdots\cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\ \cdots\cdots
\end{array}$$

现在我们建立下列的一对一的对应：

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16\\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow\\
b_{11} & b_{12} & b_{21} & b_{13} & b_{22} & b_{31} & b_{14} & b_{23} & b_{32} & b_{41} & b_{15} & b_{24} & b_{33} & b_{42} & b_{51} & b_{16}
\end{array}$$

等等，这里是，先数指数和为2的元，再数指数和为3的那些元，然后再数指数和为4的那些元，等等，而每个这样的和（即2，3，4……）把这些元排列成使头一个指数是按整数的自然次序出现的。这样一来，Z^+和$\bigcup_{\alpha\in A}B_\alpha$之间一对一的对应的存在就证实了。这也就

证明了可数多个可数集的并仍是可数集。

可能看来好象什么都不比可数无限集更复杂，即每个无限集必定是可数无限的，但事情并不是这样，下面我们给出一个由康托得出的古典的证明，即证明零和一之间的实数不是可数的。事实上，假设区间（0，1）内的实数的集是可数的并假定 Z^+ 和这些数之间的一对一的对应已经建立起来，我们用下列图式表明这个对应：

$$
\begin{array}{lllll}
1 \longleftrightarrow & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\cdots\cdots \\
2 \longleftrightarrow & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\cdots\cdots \\
3 \longleftrightarrow & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\cdots\cdots \\
4 \longleftrightarrow & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\cdots\cdots \\
\vdots & \vdots & & & \cdots\cdots \\
\vdots & \vdots & & & \cdots\cdots
\end{array}
$$

其中每个a_{ij}表示一个数码，即 $0 \leqslant a_{ij} \leqslant 9$，而且对实数的这种可以交互选用的十进小数表示法，例如$\frac{2}{10}$可以写为.200……，也可写为.1999……，我们总是选取末尾是一连串零的表示方法，现在这个一对一的对应使得对每个正整数有(0 1)内的某个实数与之对应。反之，对（0 1）内的每个实数有某一整数与之对应，从而，上面给出的十进小数的无限系列的表按下述意义是完备的，即(0 1)的每一个实数，都出现在这个表内，然后若能在零和一之间找到一个实数是不在这个表以内的，那
就导致一个矛盾，而这正是我们着手要做的。我们定义 $b = b_1b_2b_3\cdots\cdots$ 如下：若 a_{ii} 是5令 $b_i = 6$；若 $a_{ii} \neq 5$ 令 $b_i = 5$。显然，b 不等于表内十进小数中的任何一个，因为它和第 n 个小数在第 n 位上不同，又显然有$\frac{5}{9} \leqslant b \leqslant \frac{2}{3}$，从而 $b \in (0.1)$，这个矛盾指出 Z^+ 和(0.1)之间这样的一对一的对应是不存在的。由于（0.1）含有集 $\left\{\frac{1}{n}\middle| n = 2, 3, \cdots\right\}$，显然是无限的，所以（0.1）内的实数集是不可数的。

练　　习

0.23．证明．若A是无限的且 $a \in A$，则$A-\{a\}$是无限的。

0:24．判断下述的正整数集 Z^+ 是不可数的"证明"：按通常的方式写出每个正整数，但在它头一个数码之前用一串无限个的零接排在左边。例如 17 就写作……00017，设集 Z^+ 是可数的并建立起这个明显的一对一的对应：$n \longleftrightarrow \cdots 000n$，例如 124与…000124 对应，按通常的次序写成一个表，即：

$$
\begin{array}{l}
\cdots\cdots\cdots\cdots 0001 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots 0002 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots 0003
\end{array}
$$

·等等

现构造一个新数如下：在上面表内一行一行地往下找对角线上记入的数码；若表的第 n 个数的第 n 位数码是5，令新数的第 n 位是6，若表的第 n 个数的第 n 位数码异于5，则令新数

的第 n 位为 5，这样构造的数与表内的第 n 个数在第 n 位上不相同，因此与表内所有的数都不同，从而上述的一对一的对应不是所要的对应，由此集 Z^+ 是不可数的。

§7　关于实数的几个假设

按照学生以前的学历，我们假定他是熟悉实数系，特别是假定他熟悉下列两种形式的数学归纳法：

1．若 S 是一个正整数集使如

（a）　　$1 \in S$，

（b）　　$K \in S$ 包含 $K+1 \in S$，

则 $S = Z^+$，即 S 等于全体正整数的集。

2．设 S 是一个正整数的集，使如

（a）　　$1 \in S$，

（b）　　对每个 $K < n$，$K \in S$，包含 $n \in S$，

则 $S = Z^+$，即 S 是全体正整数的集。

我们还假设正整数的集是良序的，即 Z^+ 的每个非空子集都有最小的数，这"最小"是按实数通常的大小次序。

设 T 是实数集，若对每个 $s \in T$，有 $s \leqslant t$，则说 t 是 T 的上界。若对每个 $s \in T$，有 $u \leqslant s$，则说 u 是 T 的下界。如果 a 是 T 的一个上界且对 T 的任何一个上界 b，有 $a \leqslant b$，则说 a 是 T 的最小上界（上 确 界），并记为 $\sup T = a$。类似地，若 c 是 T 的一个下界且对 T 的任何一个下界 d，有 $d \leqslant c$，则说 c 是 T 的最大下界（下 确 界）并记为 $\inf T = c$。我们假定任何具有上界的实数集都有上确界，任何具有下界的实数集也都有下确界。我们对实数区间使用如下惯用的表示法：

$$(a,\ b) = \{x \mid x \text{实数},\ a < x < b\}$$

$$[a,\ b) = \{x \mid x \text{实数},\ a \leqslant x < b\}$$

$$(a,\ b] = \{x \mid x \text{实数},\ a < x \leqslant b\}$$

$$[a,\ b] = \{x \mid x \text{实数},\ a \leqslant x \leqslant b\}$$

其中 a 和 b 是实数，我们也承认随意使用记号 $(a,\ \infty)$ $(\infty,\ b)$ $[a,\ \infty)$ 和 $(\infty,\ b]$ 这些记号都有明显的意义，例如：

$$(a,\ \infty) = \{x \mid x \text{实数},\ a < x\}$$

参　考　文　献

虽然在书后有参考书的总表，这里另列出一批书目，主要是涉及集论和有关材料的。

逻　辑　学

1．Christian, R.R., Introduction to Logic and Sets (Preliminary ed.; Boston: Ginn, 1958).

2．Rosser, J.B., Logic for Mathematicians (New York: McGraw, 1953).

3. Kleene, S. C., Introduction to Metamathematics (Princeton, N. J.: Van Nostrand, 1952).

集　论

1. Bourbaki, N., Théorie des Ensembles (Paris: Actualités Scientifiques et Industrielles, Herman et Cie., 846=1141, 1951).
2. Halmos, P.R., Naive Set Theory (Princeton, N.J.: Van Nostrand, 1960).
3. Kamke, E., Theory of Sets (New York: Dover, 1950).
4. Suppes, P., Axiomatic Set Theory (Princeton, N.J.: Van Nostrand, 1960).

实　数　系

1. Landau, E., Foundations of Analysis (New York: Chelsea, 1951).

有　关　历　史

1. Cantor, G., Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers (New York: Dover, n.d.).