一类具有非线性项和波动算子的广义RLW方程的数值计算问题

北京九所 郭柏灵 余淑珍

§1、引 言

在(1)中研究了RLW方程的数值计算方法。在(2)中提出了具波动算子的线性RLW方程的物理问题。如同(3)中对非线性Klein—Gordon 方程的数值计算，本文考虑如下一类具有非线性项和波动算子的广义RLW方程

$$u_{tt}-u_{xx}+f_1(u_t)+f(u)_x-u_{xxt}+g(u)=0 \tag{1.1}$$

具初始条件

$$u|_{t=0}=u_0(x), \quad u_t|_{t=0}=u_1(x) \tag{1.2}$$

和边界条件

$$u|_{x=0}=u|_{x=1}=0 \tag{1.3}$$

的数值计算问题。其中$f(u)$，$f_1(u)$，$g(u)$均为已知的实函数。通过理论分析和数值计算，我们发现非齐项$g(u)$的正、负号，增长阶数以及它和$f(u)$增长阶数的相互制约对于方程（1.1）的物理图象起着很重要的作用，特别我们具体地计算出（1.1）物理解"blow up"的图象。在§2中，我们对该方程定解问题的一类差分格式证明它的收敛性和稳定性。在§3中，我们对几种差分格式和若干物理模型给出结果，作简单比较，并予以说明。

§2、一类差分格式及其收敛性

设$Q=[0,1]\times[0,T]$为矩形区域，我们以直线$t=mk$，

$X=pk$ 分区域Q为许多小网格，其中 m 为整数，$m\in\{0,[T/k]\}$，P为整数，$p\in\{0,[h^{-1}]\}$，设内点网格的全体为 Q_h，其余含边界点的网格为 S_h，以 $\Omega(t)$ 表示 $(t=\text{const})\cap Q_h$ 记

$$\varphi_x(x,t)=\frac{1}{h}[\varphi(x+h,t)-\varphi(x,t)]=D_+\varphi\,,$$

$$\varphi_{\bar{x}}(x,t)=\frac{1}{h}[\varphi(x,t)-\varphi(x-h,t)]\,,$$

$$\varphi_{\hat{x}}(x,t)=\frac{1}{2\tau}[\varphi(x+h,t)-\varphi(x-h,t)]\,.$$

同样可定义 φ_t，$\varphi_{\bar{t}}$，我们定义离散模如下：

$$\|\varphi\|^2_{\Omega(t)}=h\sum_{\Omega}\varphi^2(x,t)\,,\quad \|\varphi\|_{Q_h}=Kh\sum_{Q_h}\varphi^2(x,t)\,,$$

$$(f,g)_h=h\sum_{\Omega}f(x,t)g(x,t)\,,\quad \|\varphi\|^2_{\ell,\Omega}=\|\varphi\|^2_{\Omega(t)}+\sum_{|S|\le\ell}\|D_t^S\varphi\|^2_{\Omega(t)}\,,$$

$$\|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)}=\sup_{x_i\in\Omega}|\varphi(x_i)|\,,\quad \|D_+^\ell\varphi\|_{L_\infty}=\sup_{x_i\in\Omega}|D_+^\ell\varphi|$$

现考虑相应于问题（1.1）—（1.3）的差分定解问题为

$$\begin{cases}\varphi_{t\bar{t}}-\varphi_{x\bar{x}}+f_1(\varphi_{\bar{t}})+f(\varphi)_{\hat{x}}-\varphi_{x\bar{x}\bar{t}}+g(\varphi)=0 & (2.1)\\ \varphi|_{S_h}=0\,,\quad \varphi|_{t=0}=u_0(x)\,,\quad \varphi_t|_{t=0}=u_1(x) & (2.2)\end{cases}$$

对于问题（2.1）（2.2）的解，我们作如下的估计。

引理1（差分算子Sobolev不等式[4]）给定 $\varepsilon>0$，存在常数C依赖于 ε 和n，使得

$$\begin{aligned}&\|D_+^\ell\varphi\|_{L_\infty(\Omega)}\le\varepsilon\|\varphi\|_{n,\Omega}+C\|\varphi\|_\Omega\,,\quad \ell<n\,,\\ &\|\varphi\|_{\ell,\Omega}\le\varepsilon\|\varphi\|_{n,\Omega}+C\|\varphi\|_\Omega\,,\quad \ell\le n\end{aligned}\qquad(2.3)$$

引理2、若满足以下条件：(1) $g'(u)\ge0$，

$$G(u)=\int_0^u g(z)\,dz\ge0\,,\quad f_1(u)u\ge0$$

(2)存在常数$\alpha>0$，使得 $f^2(u)\le\alpha G(u)$，且 $f(0)=0$

(3) $u_0(x)\in \overset{\circ}{H}{}^1$，$u_1(x)\in L_2$，$G(u_0)\in L_1$ 则对问题（2.1）（2.2）的解有估计

$$\|\varphi_t\|^2_{\Omega(T)}+\|\varphi_x\|^2_{\Omega(T)}+(G(\varphi),1)_h\le E_0 \tag{2.4}$$

其中常数E_0与h无关。

引理3。若满足引理2条件，则有

$$\|\varphi\|_{L_\infty}\le E_1 \tag{2.5}$$

其中常数E_1与h无关。

引理4。若满足引理2条件，且满足

(1) $f_1(u)\in C^1$　(2) $f(u)\in C^2$，$g(u)\in C^1$

(3) $u_0(x)\in H^2\cap H_0^1$，$u_1(x)\in H_0^1$，则有估计

$$\|\varphi_{tt}\|^2_{\Omega(T)}+\|\varphi_{tx}\|^2_{\Omega(T)}\le E_2 \tag{2.6}$$

其中常数E_2与h无关。

推论1.　$\|\varphi_{xx}\|^2_{\Omega(T)}\le E_3$ (2.7)

其中常数E_3与h无关。

推论2.　$\|\varphi_{xxt}\|^2_{\Omega(T)}\le E_4$ (2.8)

其中常数E_4与h无关。

定义：函数u（x，t）称为问题（1.1）－（1.3）在〔0，1〕×〔0，∞〕上的广义解，如果 $u(x,t)|_{t=0}=u_0(x)$，$u_t|_{t=0}=u_1(x)$，且满足条件（对一切$T>0$）

(1) $u(x,t)\in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$，$u_t\in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$，$u_{tt}(x,t)\in L^\infty(0,T;L_2(\Omega))$，其中$\Omega=[0,1]$

(2) $\int_0^T\int_\Omega[u_{tt}-u_{xx}+f_1(u_t)+f(u)_x-u_{xxt}+g(u)]\Phi(x,t)\,dx\,dt=0$，

$\forall\,\Phi(x,t)\in C^0(0,T;L_2(\Omega))$，且 $\Phi|_{x=0}=\Phi_{x=1}=0$.

定理1. 若满足引理4条件，则问题(1, 1)-(1, 3)的广义解是存在的。

显然，若对方程(1, 1)的系数和初始条件加上更高的光滑性条件，则对差分解可作更高阶导数的一致性估计，由此我们可得到问题(1, 1)-(1, 3)的光滑解。

以下讨论差分定解问题(2, 1)(2, 2)解的收敛性。现设定解问题(1, 1)-(1, 3)的光滑解在区域$Q=[0, 1]\times[0, T]$上存在。我们有如下定理

定理2. 若满足引理4条件，且设$u(x, t)$和$\varphi(x, t)$分别为问题(1, 1)-(1, 3)和问题(2, 1)-(2, 2)的解，则有

$$\|u-\varphi\|_{C^1(\Omega)}=O(K+h^2) \qquad (2.9)$$

于此

$$\|u-\varphi\|^2_{C^1(\Omega)}=\|(u-\varphi)_t\|^2_\Omega+\|(u-\varphi)_x\|^2_\Omega+\|u-\varphi\|^2_\Omega .$$

定理3. 差分定解问题(2, 1)(2, 2)的解关于模$\|\cdot\|_{C^1(\Omega)}$依初始值是稳定的。

§3. 数值计算结果

我们进行数值计算的差分定解问题如下：

$$\phi_{t\bar t}-\varphi_{x\bar x}+\phi_{\bar t}+(\phi^2)_{\hat x}+g(\phi)=0$$

$$\phi|_{t=0}=u_0(x_j),\quad \phi_t|_{t=0}=u_1(x_j)\quad j=0,\cdots N.$$

$$\phi|_{x_0}=\phi|_{x_N}=0$$

于此 $x_0=-10$, $x_N=Nh=10$, $x_j=x_{j-1}+h$.

$$u_1(x)\equiv 0$$

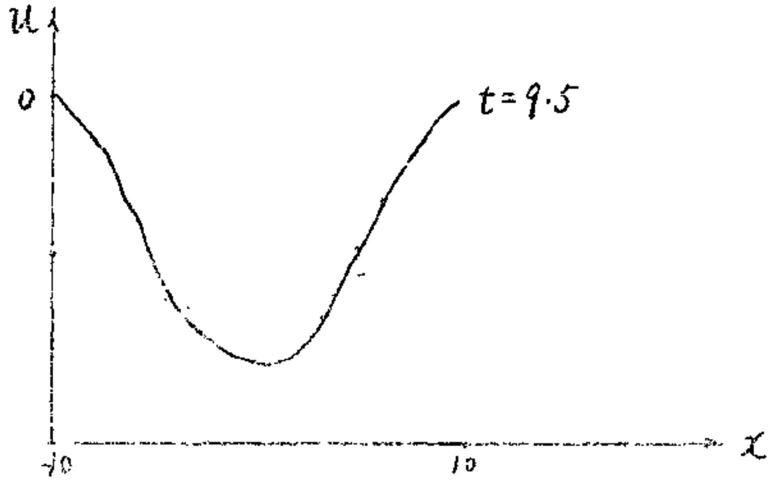
我们对以下具体问题进行了数值计算：

1. $g(\phi) = \phi^3$

(1)

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & -10 \le x \le 0 \\ 20x e^{-0.3/(1-x)^2} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & 10 \ge x \ge 1 \end{cases}$$

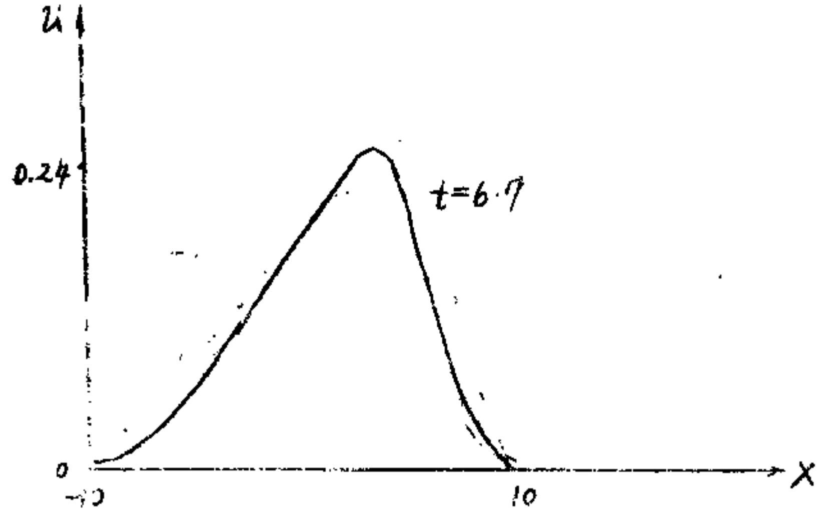
计算结果如图：



(2)

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & -10 \le x \le 0 \\ -20x e^{-0.3/(1-x)^2} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & 1 \le x \le 10 \end{cases}$$

计算结果如图。



2．$g(\phi)=-\phi^3$

$u_0(x)$按(1)，Δt，h均同于(1)，计算到$t=0.6$，正常，当$t=1.28$，ϕ值急剧上升至32，此后虽然一再缩小时间步长，终因图形太陡，计算失效而停止，即出现了"blow up"的计算图象。从物理上和数学上分析，可知$G(u)<0$，可能导致负能量的出现。

3．对$f(\phi)_x$项取不同格式计算的比较

设$f(\phi)=\phi^2$，取格式$(\phi^2)_{\hat{x}}$，如(1)所示。

若取格式$(\phi^2)_x$，当$t=5.775$，比较这两种格式所计算的结果是相近的。

若取线性化不迭代格式$\phi_i^{n-1}\dfrac{\phi_{i+1}^n-\phi_i^n}{h}$，在(1)条件下进行计算，计算结果表明是可行的。

参 考 文 献

(1) J. C. EILBECK, G. B. MCGUIRE, J. comp phys. 19(1975), 43−57.

(2) R. D. parmentier, Fluxons in Long Josephon Junctions, in "Soliton in Action" (Edited by K. Lonngren, and A. Scott, 1978)

(3) A. Menikoff, comm. pure. Math, vrℓ 25, 1972, 407−432

(4) W. A. Strauss, L. Vazquez, Reprinted from Journal of comp phys vrℓ 28 No. 2, 1978

(5) O, A. O auhnk, yMH, TOM 17, Bbl π, 3(105), 1962