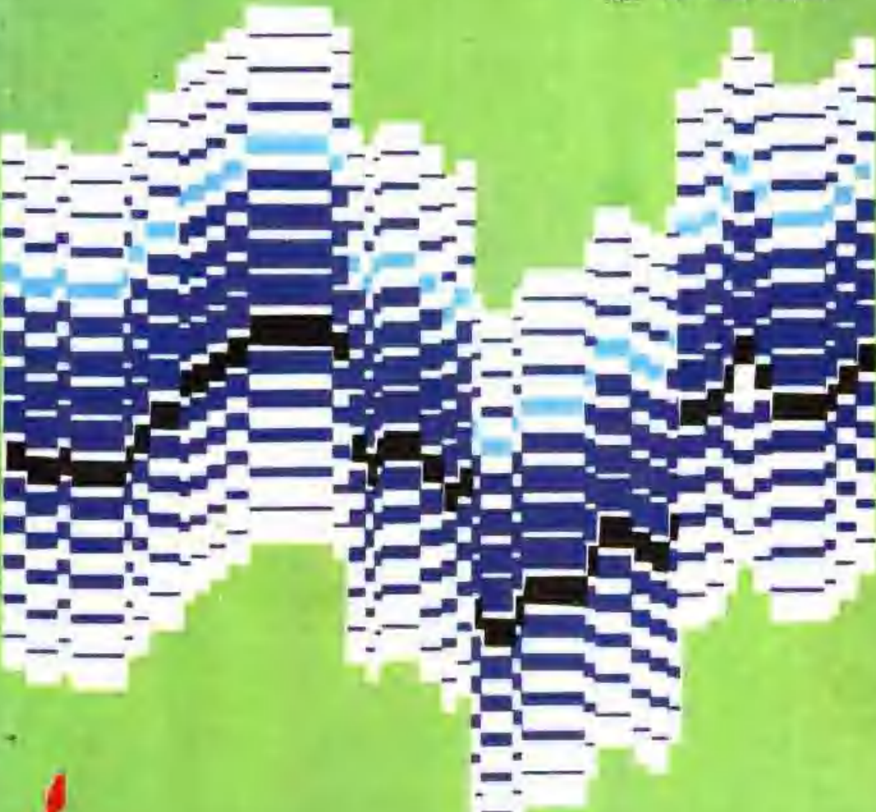
大專・高中新數學叢書 ②

新課程

數 與 式

前東北大副教授 勝浦捨造 原著
嚴 水 謨 編譯



晨光出版社

嚴水謨編譯

數 與 式

編輯大意

正確地理解數與式，同時能夠正確地計算出來，是爲學習所有數學的基礎，此自不待言。尤其是，

1、研究數與式解答問題，實際上考慮的是式子的計算。若不能用適當的方法正確地計算出，則不但無法得到研究的結論而且連問題也解不來。

觀之在校高中學生之實態，因練習不夠，故對於數與式的計算未能充分理解，以致於就私下斷定『我的數學太差了！』像這樣的人不在少數。

又，演算與剩餘系等新教材的思考方法，以數學基礎而言，是非常重要的，但對這些新教材感到困惑者亦大有人在。

本書，關於數與式，已概括高級中學的內容，

依　愈來愈廣，愈來愈深，也愈來愈容易了解。

之宗旨，能使不精於數學者通曉，通曉者更能精通。又，所有之擴展問題或應用問題均編錄於內，相信做爲大學入學考試之參考書最適當不過的。

本書的特點爲：

解說→例題→擴展問題→習題 四者反覆學習，不知不覺地實力就能增強，此精巧微妙之處實爲本書最大之特點。若能充分活用本書，深信讀者諸君之實力必能倍增無疑。

原著者

前　言

在編輯大意裡已提到過，本書對於不擅長於數學者亦能充分了解，精於數學者更能漸漸培養出深厚的興趣來。本書爲具有此種特色之參考書，因此本書有下列各項之特點。

■　小項目主義

各分門別類儘可能採用小項目。使該學習之處一目瞭然，本書之說明一面符合教科書，同時

愈來愈廣，愈來愈深，也愈來愈容易了解。

說明終了，附有「精粹」一欄，爲重要公式之總彙集，學習重點均列記於此，使讀者更能倍增學習之効率。

■　例題→擴展問題→習題

說明若能了解，再由例題，擴展問題，習題三者

反覆學習，不知不覺地實力就會增強。

此精巧微妙之處，實爲本書最大之特長。由例題→擴展問題的順序，內容逐漸加深，但在「解法」「要點」欄裏對於問題的思考方法及解答要領均有指示，希望讀者對此兩種問題，能反覆演練，務其達於近乎記憶之程度。總之，數學的學習是

一步一步地累積上去的。

因此，特別推薦此種反覆學習的方法。若例題，擴展問題兩者已充分了解，則對於「習題」將能駕輕就熟。反之，若對「習題」感到困難，則表示前面的學習並未全盤了解。

■　練習問題

分爲A、B兩階段。A部分相當於例題，擴展問題的程度，B部分包含有較深的問題。大學聯考對於此種程度的問題出題率最高，故此爲有志於投考大學諸君不可或缺的問題集。

雖有人常說，學習數學不能靠記憶，但這是沒有將問題的思考方法同時記憶所致。本書不是僅僅介紹記憶的方法，而是針對「數學原來是這樣去思考的」給予讀者適當的指導，然後推薦應用廣泛的記憶方法。深信擁有本書之讀者諸君，必能眞正地理解數學，同時增強數學的應用實力。

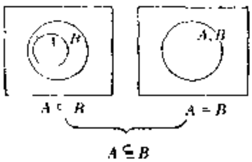
目　次

重要名詞一覽表

說明記事

1.集　合

集　　合	集合……某一定範圍內的事物的全體。
元　　素 元	組成一個集合的東西，叫做這集合的元素，又稱「元」。
$x \in A$	x 是集合 A 的元素時，記作 $x \in A$ 或 $A \ni x$，即「x 屬於 A」「x 在 A 集合中」或「A 含有 x 元素」。
$x \notin A$	x 不是集合 A 的元素時，記作 $x \notin A$ 或 $A \not\ni x$， 例　$2 \in N$，$-1 \notin N$，$1.5 \notin N$（N 是自然數的集合） $2 \in Z$，$-1 \in Z$，$1.5 \notin Z$（Z 是整數的集合） $2 \in Q$，$-1 \in Q$，$1.5 \in Q$（Q 是有理數的集合）
表示集合的方法	(1)　表示條件的方法……$\{x \mid x$ 這集合的元素所具有的性質$\}$ (2)　記述元素的方法……$\{a, b, c, d\}$ 例　1 至 5 的整數的集合，記作； (1)　$\{x \mid 1 \leq x \leq 5$，x 是整數$\}$ (2)　$\{1, 2, 3, 4, 5\}$
$A=B$	$A=B$……A 集合和 B 集合的元素都相同，（集合 A 等於集合 B）
$A \neq B$	$A \neq B$……A 集合和 B 集合的元素不都相同， 例　若 $A=\{x \mid x^2=1\}$，$B=\{1, -1\}$，則 $A=B$ 若 $A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{2, 3, 4\}$，則 $A \neq B$
部分集合 $A \subseteq B$	部分集合，$A \subseteq B$……集合 A 的各元素，都是集合 B 的元素，（$A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$），叫做 A 包含於 B，或 B 包含 A， 若 $A \subseteq B$ 且 $A \supseteq B$，則 $A=B$
眞部分集合 $A \subset B$	眞部分集合 $A \subset B$……$A \subseteq B$ 且 $A \neq B$，即 A 的集合的元素都屬於 B 集合的元素，但 B 集合的元素，不都是 A 集合的元素。



空集合 ϕ

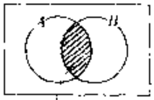
空集合，ϕ……沒有元素的集合。

空集合 ϕ 是任意一個集合的部分集合。

$A\cap B$

$A\cap B$……集合 A 和集合 B 的**公共元素所成的集合**。

$A\cap B=\{x\mid x\in A，且 x\in B\}$



$A\cap B$

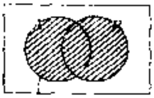
交　集

A 和 B 的**公共部分**，又叫做**交集**。

$A\cup B$

$A\cup B$……集合 A 和集合 B 的**公共元素和非公共元素**所成的集合。

$A\cup B=\{x\mid x\in A 或 x\in B\}$



$A\cup B$

聯　集

（和集合）

A 和 B 的**聯集**。（和集合）

例　若 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,3\}$，$C=\{3,4\}$

則 $A\cap B=\{2\}$，$A\cap C=\phi$，$B\cup C=\{2,3,4\}$

當兩集合 A，B，先把 A 集合的元素寫在前端，後把 B 集合的元素寫在後端，則 $a\in A$，$b\in B$ 時，記作 (a,b)。

例　若 $A=\{1,2\}$，$B=\{3,4\}$，可寫成 $(1,3)$，$(1,4)$，$(2,3)$，$(2,4)$

從 A，B 所組成的 (a,b)，(a',b')

當 $a=a'$ 且 $b=b'$ 時，$(a,b)=(a',b')$

積

$A\times B$

從 A，B 所組成的 (a,b) 全部所成的集合，叫做 A 和 B 的**積**，記作 $A\times B$

例　若 $A=\{1,2\}$，$B=\{3,4\}$

則 $A\times B=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$

$B\times A=\{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$

精　粹

集合的用語，記號

元素，$x\in A$，$A=B$，部分集合，$A\subseteq B$，真部分集合，$A\subset B$，空集合，ϕ，公共元素，交集，$A\cap B$，聯集，$A\cup B$，積，$A\times B$

例題 1. 設自然數的集合＝N，整數的集合＝Z，有理數的集合＝Q，試問；

(1) 以上三集合N, Z, Q的包含與包含於的關係如何？

(2) 填充

① $Z \cap Q = \boxed{}$　　② $Z \cup Q = \boxed{}$

③ $Z = N \cup \{-x \mid x \in N\} \cup \boxed{}$（但空格內不記$N$或$\{-x \mid x \in N\}$的公共元素。）

解法 (1) 自然數的集合　$N = \{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$

整數的集合　$Z = \{\cdots\cdots, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots\}$

所以N是Z的眞部分集合，即$N \subset Z$。

有理數就是可用分式$\frac{a}{b}$（a, b是整數，且$b \neq 0$）的形成表示的數，不問何種整式，例如；

$$3 = \frac{3}{1} \quad , \quad -4 = \frac{-4}{1} \quad , \quad 0 = \frac{0}{1}$$

都可用分母爲1的分數表示出來，亦即**整數都是有理數的一種**。

因此，可謂Z是Q的部分集合，但如1.5 雖然是有理數，但不屬於整數，，故Z是Q的眞部分集合，即$Z \subset Q$。

由上述的討論，得$N \subset Z$，$Z \subset Q$，由這兩種關係又可得$N \subset Q$，卽可記作$N \subset Z \subset Q$。

(2)，①②兩小題，因Z是Q的眞部分集合，所以$Z \subset Q$，此時交集$Z \cap Q$和聯集$Z \cup Q$的結果如何？

③小題的$\{-x \mid x \in N\}$是「把集合N的所有元素，加上一個負（－）號所成的集合」亦即$\{-1, -2, -3, \cdots\cdots\}$，若詳記之，則$\{x \mid x = -n, n \in N\}$，故空格內應記作0爲元素的集合。

解答 (1) $N \subset Z \subset Q$

(2) ① Z　② Q　③ $\{0\}$

擴展問題

設有理數的集合$=Q$，無理數的集合$=P$，實數的集合$=R$，試問；

(1) $Q\cap P$，$Q\cup P$

(2) Q和R，P和R的包含關係如何？

(3) $(Q\cap R)\cap P$，$(Q\cup R)\cap P$

要點

(1)「有理數以外的數叫做無理數」「有理數和無理數總稱爲實數」有了上述觀念，便可了解其交集及聯集。

(3)參考(1)，(2)並從括弧開始變化

解答 (1) 一數不能屬於有理數，又屬於無理數，因此並無屬於Q又屬於P兩集合的元素，

$\therefore\ Q\cap P=\phi$ ……………………（答）

有理數的集合Q和無理數的集合P的聯集是實數的集合R，即

$Q\cup P=R$ ……………………（答）

(2) 上述$Q\cup P=R$，可知有理數的集合Q，是實數的集合R的部分集合，且Q是R的眞部分集合，

$Q\subset R$ ……………………（答）

同理，無理數的集合P亦是實數的集合R的眞部分集合，故　$P\subset R$ ……………………（答）

(3) $(Q\cap R)\cap P=Q\cap P$（$\because Q\subset R\quad\therefore Q\cup R=Q$）

$=\phi$　（由(1)　$Q\cap P=\phi$）

$(Q\cup R)\cap P=R\cap P$（$\because Q\subset R\quad\therefore Q\cup R=R$）

$=P$　（$\because P\subset R\quad\therefore R\cap P=P$）

習題　（解答在126頁）

1. 設自然數的集合$=N$，整數的集合$=Z$，問下列各題的集合，如非空集合，請寫出五個元素；

(1) $E=\{2x\mid x\in Z\}$　(2) $F=\{2x-1\mid x\in Z\}$　(3) $E\cap N$

(4) $E\cap F$

2. 若$A=\{1,2\}$，$B=\{2,3,4\}$，請寫出下列各集合的元素；

(1) $A\times B$　(2) $B\times A$　(3) $A\times A$

2. 數的四則

四則運算　加法、減法、乘法、除法的四種運算，叫做**四則運算**。

其結果叫做**和**、**差**、**積**、**商**。

基本法則　數的加法和乘法，依據下列基本法則；

交換律　$a+b=b+a$　　$ab=ba$

結合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$　　$(ab)c=a(bc)$

分配律　$a(b+c)=ab+ac$

例　$67+58+33=(67+58)+33$

$=67+(58+33)$　結合律

$=67+(33+58)$　交換律

$=(67+33)+58$ …………①　結合律

$=100+58=158$

$4\times37\times25=(4\times37)\times25$

$=4\times(37\times25)$　結合律

$=4\times(25\times37)$　交換律

$=(4\times25)\times37$ …………②　結合律

$=100\times37=3700$

如上例①②得知；

$67+58+33=100+58$　　$4\times37\times25=100\times37$

$=158$　　$=3700$

一個只有加法或乘法的計算，可由任何順序去計算，此可由交換律和結合律的觀念獲得正確的說明。

單位元素　於加法，0有特殊性質；

$3+0=3$，$(-5)+0=-5$，$1.8+0=1.8$

不論任何數，若加以0，其和仍爲原數。

且，具備這樣性質的數，在加法亦只有0而已。

不管a是任何實數，使與a的和仍等於a的數是 0 ，亦只有 0 ，0 叫做**加法單位元素**。

$$a+0=0+a=a \quad (a\text{是任意實數})$$

0 是加法的單位元素，1 即爲乘法的單位元素。

不管a是任何實數，使與a的積仍等於a的數是 1 ，亦只有 1 ，1 叫做**乘法單位元素**。

$$a\times 1=1\times a=a \quad (a\text{是任意實數})$$

其次，進一步來研討加法和減法，乘法和除法的關係；

加法反元素

有實數a，當$a+x=0$時，實數x可記作$-a$，$-a$叫做a的反元素（**加法反元素**）

例 3的反元素$=-3$，-5的反元素$=5=-(-5)$

減法與反元素

有實數a，b 若$b+x=a$，則實數$x=a-b$

$$b+(a-b)=a$$

「a減去b」與「a加b的反元素」兩者意義相同，

$$a-b=a+(-b) \quad (\text{參考練習問題 11})$$

乘法反元素

$a\neq 0$（a是實數），若$a\times x=1$，則x可記作$\frac{1}{a}$，$\frac{1}{a}$叫做a的**乘法反元素**。

除法與反元素

有實數a，b（都不等於 0），若$b\times x=a$，則$x=a\div b$，亦即$\frac{a}{b}$。

$$\therefore \quad b\times\frac{a}{b}=a$$

「a除以b」與「a乘以b的反元素」，兩者意義相同。

$$a\div b=a\times\frac{1}{b}$$

● 精 粹 ●

(1) **計算的基本法則** 交換律，結合律，分配律。

(2) **單位元素** 加法……0，乘法……1。

(3) **a的反元素** 加法……$-a$，乘法……$\frac{1}{a}$（$a\neq 0$）

例題 2. 利用運算基本法則，試證下列公式的成立；

$$(b+c)a=ba+ca \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(A)}$$

〔解法〕 分配律 $a(b+c)=ab+ac$

利用交換律，則 $(b+c)=a(b+c)$，$ab=ba$，$ac=ca$，

用以上兩法則便可證明。

解答 依交換律 $(b+c)a=a(b+c)$

依分配律 $=ab+ac$

再依交換律 $=ba+ca$

故， $(b+c)a=ba+ca$

例題 3. 利用運算基本法則，和減法與反元素的關係，說明下列式的變化的正確；

$$(6-7)+4=(6+4)-7$$

〔解法〕 將減法與反元素的關係 $a-b=a+(-b)$ 適用於 $6-7$ 的部分，即可成立；

$$(6-7)+4=\{6+(-7)\}+4$$

的加法形式。

其次，用運算基本法則，可得；

$$\{6+(-7)\}+4=(6+4)+(-7)$$

最後，依減法與反元素的關係，可寫成；

$$(6+4)+(-7)=(6+4)-7$$

解答 $(6-7)+4$

依減法與反元素的關係： $=\{6+(-7)\}+4$

依結合律： $=6+\{(-7)+4\}$

依交換律： $=6+\{4+(-7)\}$

依結合律： $=(6+4)+(-7)$

再依減法與反元素的關係： $=(6+4)-7$

擴展問題

利用運算基本法則，試證下列公式；

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

但，應用前頁例題**2**的公式(A)

解答 在 $(x+a)(x+b)$ 的式中，

先將 $x+a$ 當做一個式，並利用分配律，

$$原式=(x+a)x+(x+a)b$$

依前頁公式(A)；

$$=(x^2+ax)+(xb+ab)$$

依結合律；

$$=\{(x^2+ax)+xb\}+ab$$

依結合律；

$$=\{x^2+(ax+xb)\}+ab$$

依交換律；

$$=\{x^2+(ax+bx)\}+ab$$

再依前頁公式(A)；

$$=\{x^2+(a+b)x\}+ab$$

$$=x^2+(a+b)x+ab$$

故， $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

要點 設 $x+a=m$，則 $(x+a)(x+b)=m(x+b)$ 依分配律；$=mx+mb$ 將原假設 m 代入 $=(x+a)x+(x+a)b$ 再將 $x+a$ 當作一個式去利用法則。

小常 從前頁 $(6-7)+4=(6+4)-7$ 的結果，得知，假使把 $6-7+4-5+3$ 寫成 $6+(-7)+4+(-5)+3$，仍係把加法，減法混合題一概改寫爲加法的計算方式，或利用結合律、交換律而演化成爲加法的計算式。

又可把 $6+(-7)+4+(-5)+3$ 寫成 $6+4+3+\{(-7)+(-5)\}$，使正數，負數部分分開後加以計算。

故得，$6-7+4-5+3=6+4+3-7-5=13-12=1$

習題 （解答在126頁）

3. 設 $a\neq0$，試證實數 a 的反元素的反元素 $=a$

3. 數的集合與演算

自然數的集合和四則

例如；3＋2＝5，或4＋8＝12，將兩個自然數相加，其結果還是自然數。

這種觀念，於任意自然數的加法，皆可成立。

即；自然數的集合N的任意兩元素a，b，其和$a+b$仍屬於N，這種性質，叫做；

自然數的集合，對加法有封閉性。

對於乘法，正如加法一樣，將自然數a，b相乘所得ab，仍然是自然數，即；

自然數的集合，對乘法有封閉性。

但是，在減法和除法，如$4-8$和$3\div2$，其結果卻不是自然數，亦即；

自然數的集合，對於減法和除法沒有封閉性。

整數的集合和四則

其次，讓我們來研討整數的情形，設有

整數的集合$Z=\{\cdots\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\cdots\}$

又a，b都屬於Z，則$a+b$，$a-b$或ab依然是整數，即；

整數的集合，對於加法、減法、乘法有封閉性。

但$3\div2$或$4\div(-5)$其結果並非整數，故

整數的集合，對於除法沒有封閉性。

有理數的集合和四則

用分數$\dfrac{a}{b}$（a，b是整數，$b\neq0$）表示的形式，叫做有理數，整數亦是有理數的一種（參考第8頁）

今任意取兩個有理數，其和、差、積、商仍然是有理數，即；

有理數的集合，對於四則有封閉性。（但，除法時，除數不爲0）

無理數的集合和四則

［例題］10.（30頁）兩個無理數的和、積不一定是無理數，其差或商亦不一定是無理數，即；

無理數的集合，對於四則都沒有封閉性。

實數的集合和四則

實數的集合包括有理數的集合和無理數的集合（參考第9頁）即有理數、無理數都是實數。

今任取實數的兩元素，則其和、差、積或商，仍然是一個實數，即；

實數的集合，對於四則都有封閉性。（但，除法時，除數不為0）

總而言之，今有一集合 S，設 a，b 是 S 集合的兩元素，即兩元素的和 $a+b$，差 $a-b$，積 $a\times b$，商 $a\div b$ 的對應關係，叫做**二項演算**，或簡稱為**演算**。

二項演算

若一集合 S，$a\in S$ 且 $b\in S$，假如 a，b 兩元素的二項演算仍然屬於 S 時，我們說集合 S 對於該二項演算有封閉性。

二項演算可應用於四則以外的情形。

例　若 a，b 都是整數

設 $a\times b+a+b=a*b$

亦即 $a*b=a\times b+a+b$

$2*1=5$

$3*7=21$

$-4*5=-19$

$0*3=3$

上述演算仍為二項演算之一類，不問整數的值如何，這種演算的結果還是整數。

我們說，整數的集合對於這種演算有封閉性。

● 精　粹 ●

自然數的集合　對於加法、乘法有封閉性。

整數的集合　對於加法、減法、乘法有封閉性。

有理數的集合和實數的集合　對於四則有封閉性。

二項演算（演算）　是把集合的兩元素的關係求其結果。