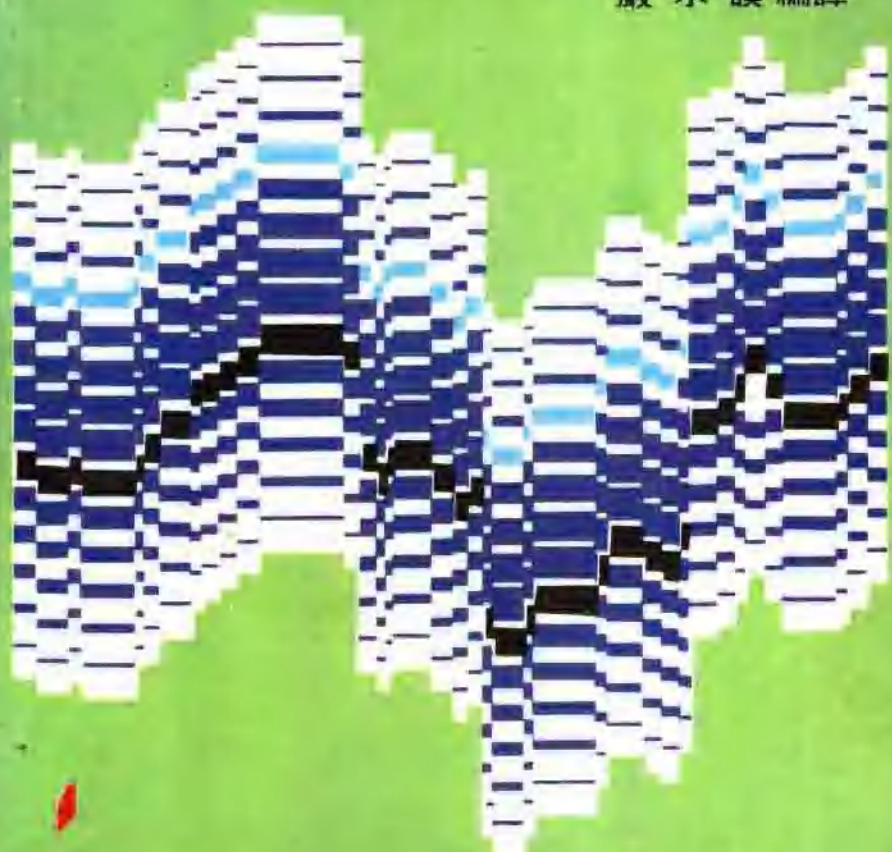


大專・高中新數學叢書②

新課程

數 與 式

前東北大副教授 勝浦捨造 原著
嚴 水 謨 編譯



晨光出版社

嚴水謨編譯

數 與 式



414122



A0942849

編輯大意

正確地理解數與式，同時能夠正確地計算出來，是為學習所有數學的基礎，此自不待言。尤其是，

- 1、研究數與式解答問題，實際上考慮的是式子的計算。若不能用適當的方法正確地計算出，則不但無法得到研究的結論而且連問題也解不來。

觀之在校高中學生之實態，因練習不夠，故對於數與式的計算未能充分理解，以致於就私下斷定『我的數學太差了！』像這樣的人不在少數。

又，演算與剩餘系等新教材的思考方法，以數學基礎而言，是非常重要的，但對這些新教材感到困惑者亦大有人在。

本書，關於數與式，已概括高級中學的內容，

依 愈來愈廣，愈來愈深，也愈來愈容易了解。

之宗旨，能使不精於數學者通曉，通曉者更能精通。又，所有之擴展問題或應用問題均編錄於內，相信做為大學入學考試之參考書最適當不過的。

本書的特點為：

解說・例題・擴展問題→習題 四者反覆學習，不知不覺地實力就能增強，此精巧微妙之處實為本書最大之特點。若能充分活用本書，深信讀者諸君之實力必能倍增無疑。

原著者

前 言

在編輯大意裡已提到過，本書對於不擅長於數學者亦能充分了解，精於數學者更能漸漸培養出深厚的興趣來。本書為具有此種特色之參考書，因此本書有下列各項之特點。

■ 小項目主義

各分門別類儘可能採用小項目。使該學習之處一目了然，本書之說明一面符合教科書，同時

愈來愈廣，愈來愈深，也愈來愈容易了解。

說明終了，附有「精粹」一欄，為重要公式之總彙集，學習重點均列記於此，使讀者更能倍增學習之效率。

■ 例題，擴展問題→習題

說明若能了解，再由例題，擴展問題，習題三者

反覆學習，不知不覺地實力就會增強。

此精巧微妙之處，實為本書最大之特長。由例題→擴展問題的順序，內容逐漸加深，但在「解法」「要點」欄裏對於問題的思考方法及解答要領均有指示，希望讀者對此兩種問題，能反覆演練，務其達於近乎記憶之程度。總之，數學的學習是

一步一步地累積上去的。

因此，特別推薦此種反覆學習的方法。若例題，擴展問題兩者已充分了解，則對於「習題」將能駕輕就熟。反之，若對「習題」感到困難，則表示前面的學習並未全盤了解。

■ 練習問題

分為A、B兩階段。A部分相當於例題，擴展問題的程度，B部分包含有較深的問題。大學聯考對於此種程度的問題出題率最高，故此為有志於投考大學諸君不可或缺的問題集。

雖有人常說，學習數學不能靠記憶，但這是沒有將問題的思考方法同時記憶所致。本書不是僅僅介紹記憶的方法，而是針對「數學原來是這樣去思考的」給予讀者適當的指導，然後推薦應用廣泛的記憶方法。深信擁有本書之讀者諸君，必能真正地理解數學，同時增強數學的應用實力。

目次

編輯大意	1
前 言	2
重要名詞一覽表	5
1. 集 合	6
集合，元素， $x \in A$ ， $x \notin A$ ，表示集合的方法， $A=B$ $A \neq B$ ，部分集合， $A \subseteq B$ ，真部分集合， $A \subset B$ ，空集合 ϕ ， $A \cap B$ ，交集， $A \cup B$ ，聯集，積 ($A \times B$)	
2. 數的四則	10
四則運算，基本法則，單位元素，反元素，減法反元素，乘法反元素	
3. 數的集合與演算	14
自然數的集合和四則，整數的集合和四則，有理數的集合和四則，無理數的集合和四則，實數的集合和四則，二項演算	
4. 剩餘系統	20
剩餘類，剩餘類與加法，剩餘類與乘法，剩餘系，加法表，乘法表，計算的基本法則，單位元素，加法反元素，乘法反元素，減法，減法與反元素，除法，除法與反元素	
5. 平方根	26
平方根，根號 ($\sqrt{\quad}$)，複號 ($\pm$)，平方根的計算公式，有理化分母，有理數，無理數，實數，無理數和有理數的和與積	
6. 大小關係	32
實數的大小關係， $a \geq b$ ，順序關係，不等式的性質	
▶練習問題 (1~13)	36
7. 整式與整式的加法、減法	38
單項式，單項式的次數，係數，注意特定文字，多項式，整式，整式的項，常數項，整式的次數，同類項，括弧，去括弧，整式的加減	
8. 整式的乘法	44
指數法則，計算的基本法則，單項式與多項式的乘法，多項式與多項式的乘法，展開式，乘法公式	
9. 整式的除法	50
指數法則，單項式除法，多項式除法，除式，被除式，餘式	

4 目 次

▶練習問題 (14~26)	56
10. 因式分解	58
因式分解, 因式, 公式, 種類	
11. 整式的最高公因式, 最低公倍式	64
因式, 倍式, 公因式, 最高公因式, 公倍式, 最低公倍式, 質因式, 互質, 最高公因式與最低公倍式的關係, 輾轉相除法, $G.C.F. \rightarrow L.C.M.$	
12. 恒等式	70
恒等式, 方程式, 恒等變形, 恒等式的基本性質, 係數比較法	
13. 餘式定理, 因式定理	74
符號 $f(x), A(x), P(x)$ 等, 餘式定理, 因式定理	
▶練習問題 (27~42)	80
14. 分式	82
分式, 有理式, 分母不為零, 分式的基本性質, 約分, 最簡分式, 通分, 公分母	
15. 分式的計算	86
加法, 減法, 乘法, 除法	
16. 部分分式	92
分為部分分式, 帶分式化	
17. 比例式	96
比 $a:$, 比值, 比的前項, 後項, 比例式, 外項, 內項, 內項的積與外項的積, 比的性質, 基本性質, 連比, 和比定理	
▶練習問題 (43~52)	100
18. 無理式	102
無理式, 有理式, $\sqrt{a^2}$ 的意義, 絕對值 $ a $, 二重根號	
19. 式值	106
兩個文字的對稱式, 基本對稱式, 三個文字的對稱式	
20. 等式的證明	110
等式 $A=B$ 的證明, 從已知條件求證明, 從結論求證明	
21. 整式的性質	118
最高公因式, 最低公倍式 $G.C.F., L.C.M.$, 之求法, 倍式(約式)之區別, 連續整式的積, 整式的分類, 剩餘類	
▶練習問題 (53~69)	124
習題解答	126
練習問題解答	143

重要名詞一覽表

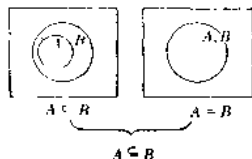
餘式定理	74	數值代入法	71, 72
因式	58	整式	39
因式定理	75	質因式	65
因式分解	58	質因式分解	118
L.C.M.	118	對稱式	106
和比定理	97	帶分式	92
加法表	21	互質	65
完全平方式	73	單位元素	10
加法反元素	11, 22	積	7
乘法反元素	11, 22	展開	45
最簡公式	82	同類項	39
公共元素	7	二項演算	15
空集合 (ϕ)	7	二重根號	102
係數	38	倍式	64
係數比較法	71, 72	背理法	16
四則運算法則	10, 21, 44	反元素	11, 22
元素	6	封閉性	17
交換律	10, 21, 44	比值	96
恒等式	70	比例式	96
恒等變形	70	不定方程式	122
公倍式	65	部分集合	6
公分母	83	部分分式	92
降冪排列	42	分式	82
公因式	64	分配律	10, 21, 44
輾轉相除法	66, 118	平方根	26
根號	26	交集	7
最低公倍式	65, 118	係數比較法	71
最高公因式	64, 118	和集合	7
G.C.F.	118	複號	26
指數法則	44, 50	無理式	102
四則運算	10	無理數	27
實數	27	因式	64
集合	6	約分	82
大小關係	32	有理化	26
昇冪排列	42	有理式	82, 102
乘法公式	45	互除法	66, 118
乘法表	21	元	6
剩餘系	21, 119	連比	97
剩餘類	20, 119	有理數	27
真部分集合	6	聯集	7

說明記事

無理數 $\sqrt{2}$ 的證明	37	二次方程式的解法與二次式的因式分解	81
巴斯噶三角形	57		

1. 集 合

集 合	集合……某一定範圍內的事物的全體。
元 素	組成一個集合的東西，叫做這集合的元素， 又稱「元」。
元	
$x \in A$	x 是集合 A 的元素時，記作 $x \in A$ 或 $A \ni x$ ，即「 x 屬於 A 」 「 x 在 A 集合中」或「 A 含有 x 元素」。
$x \notin A$	x 不是集合 A 的元素時，記作 $x \notin A$ 或 $A \not\ni x$ ， 例 $2 \in N$ ， $-1 \notin N$ ， $1.5 \notin N$ (N 是自然數的集合) $2 \in Z$ ， $-1 \in Z$ ， $1.5 \notin Z$ (Z 是整數的集合) $2 \in Q$ ， $-1 \in Q$ ， $1.5 \in Q$ (Q 是有理數的集合)
表示集合的方法	(1) 表示條件的方法…… $\{x \mid x \text{ 這集合的元素所具有性質}\}$ (2) 記述元素的方法…… $\{a, b, c, d\}$ 例 1 至 5 的整數的集合，記作； (1) $\{x \mid 1 \leq x \leq 5, x \text{ 是整數}\}$ (2) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
$A = B$	$A = B$ …… A 集合和 B 集合的元素都相同，(集合 A 等於集合 B)
$A \neq B$	$A \neq B$ …… A 集合和 B 集合的元素不都相同， 例 若 $A = \{x \mid x^2 = 1\}$ ， $B = \{1, -1\}$ ，則 $A = B$ 若 $A = \{1, 2, 3\}$ ， $B = \{2, 3, 4\}$ ，則 $A \neq B$
部分集合	部分集合， $A \subseteq B$ ……集合 A 的各元素，都是集合 B 的元素， ($A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$)，叫做 A 包含於 B ，或 B 包含 A ， 若 $A \subseteq B$ 且 $A \supseteq B$ ，則 $A = B$
真部分集合	真部分集合 $A \subset B$ …… $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$ ， 即 A 的集合的元素都屬於 B 集合的元素，但 B 集合的元素， 不都是 A 集合的元素。



空集合 ϕ 空集合, ϕ ……沒有元素的集合。

空集合 ϕ 是任意一個集合的部分集合。

$A \cap B$ $A \cap B$ ……集合 A 和集合 B 的公共元素所成的集合。

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$$

交 集 A 和 B 的公共部分, 又叫做交集。

$A \cup B$ $A \cup B$ ……集合 A 和集合 B 的公共元素和非公共元素所成的集合。

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

聯 集 A 和 B 的聯集。(和集合)

(和集合) 例 若 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 4\}$

$$\text{則 } A \cap B = \{2\}, A \cap C = \phi, B \cup C = \{2, 3, 4\}$$

當兩集合 A, B , 先把 A 集合的元素寫在前端, 後把 B 集合的元素寫在後端, 則 $a \in A, b \in B$ 時, 記作 (a, b) 。

例 若 $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$, 可寫成 $(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)$

從 A, B 所組成的 $(a, b), (a', b')$

當 $a = a'$ 且 $b = b'$ 時, $(a, b) = (a', b')$

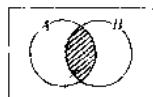
積 從 A, B 所組成的 (a, b) 全部所成的集合, 叫做 A 和 B 的積, 記作 $A \times B$

$A \times B$

例 若 $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$

$$\text{則 } A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

$$B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$$



$A \cap B$



$A \cup B$

● 精 粹 ●

集合的用語, 記號

元素, $x \in A$, $A = B$, 部分集合, $A \subseteq B$, 真部分集合, $A \subset B$, 空集合, ϕ , 公共元素, 交集, $A \cap B$, 聯集, $A \cup B$, 積, $A \times B$

例題 1. 設自然數的集合 $= N$, 整數的集合 $= Z$, 有理數的集合 $= Q$, 試問;

(1) 以上三集合 N, Z, Q 的包含與包含於的關係如何?

(2) 填充

- ① $Z \cap Q = \square$ ② $Z \cup Q = \square$
 ③ $Z = N \cup \{-x \mid x \in N\} \cup \square$ (但空格內不記 N 或 $\{-x \mid x \in N\}$ 的公共元素。)

解法 (1) 自然數的集合 $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

整數的集合 $Z = \{\dots, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

所以 N 是 Z 的真部分集合, 即 $N \subset Z$ 。

有理數就是可用分式 $\frac{a}{b}$ (a, b 是整數, 且 $b \neq 0$) 的形成表示的數, 不問何種整式, 例如;

$$3 - \frac{3}{1}, \quad -4 = \frac{-4}{1}, \quad 0 = \frac{0}{1}$$

都可用分母為 1 的分數表示出來, 亦即整數都是有理數的一種。

因此, 可謂 Z 是 Q 的部分集合, 但如 1.5 雖然是有理數, 但不屬於整數, 故 Z 是 Q 的真部分集合, 即 $Z \subset Q$ 。

由上述的討論, 得 $N \subset Z, Z \subset Q$, 由這兩種關係又可得 $N \subset Q$, 即可記作 $N \subset Z \subset Q$ 。

(2), ①②兩小題, 因 Z 是 Q 的真部分集合, 所以 $Z \subset Q$, 此時交集 $Z \cap Q$ 和聯集 $Z \cup Q$ 的結果如何?

③小題的 $\{-x \mid x \in N\}$ 是「把集合 N 的所有元素, 加上一個負(-)號所成的集合」亦即 $\{-1, -2, -3, \dots\}$, 若詳記之, 則 $\{x \mid x = -n, n \in N\}$, 故空格內應記作 0 為元素的集合。

解答 (1) $N \subset Z \subset Q$

(2) ① Z ② Q ③ $\{0\}$

擴展問題

設有理數的集合 $=Q$ ，無理數的集合 $=P$ ，實數的集合 $=R$ ，試問：

- (1) $Q \cap P, Q \cup P$
- (2) Q 和 R, P 和 R 的包含關係如何？
- (3) $(Q \cap R) \cap P, (Q \cup R) \cap P$

要 點

- (1) 「有理數以外的數叫做無理數」
「有理數和無理數總稱為實數」
有了上述觀念，便可了解其交集及聯集。

- (3) 參考(1)，(2)並從括弧開始變化

解答 (1) 一數不能屬於有理數，又屬於無理數，因此並無屬於 Q 又屬於 P 兩集合的元素，

$$\therefore Q \cap P = \phi \cdots \cdots \cdots \text{(答)}$$

有理數的集合 Q 和無理數的集合 P 的聯集是實數的集合 R ，即

$$Q \cup P = R \cdots \cdots \cdots \text{(答)}$$

(2) 上述 $Q \cup P = R$ ，可知有理數的集合 Q ，是實數的集合 R 的部分集合，且 Q 是 R 的真部分集合，

$$Q \subset R \cdots \cdots \cdots \text{(答)}$$

同理，無理數的集合 P 亦是實數的集合 R 的真部分集合，故 $P \subset R \cdots \cdots \cdots \text{(答)}$

$$\begin{aligned} (3) \quad (Q \cap R) \cap P &= Q \cap P \quad (\because Q \subset R \therefore Q \cup R = Q) \\ &= \phi \quad (\text{由(1) } Q \cap P = \phi) \\ (Q \cup R) \cap P &= R \cap P \quad (\because Q \subset R \therefore Q \cup R = R) \\ &= P \quad (\because P \subset R \therefore R \cap P = P) \end{aligned}$$

習 題 (解答在126頁)

1. 設自然數的集合 $=N$ ，整數的集合 $=Z$ ，問下列各題的集合，如非空集合，請寫出五個元素；

$$(1) \quad E = \{2x \mid x \in Z\} \quad (2) \quad F = \{2x - 1 \mid x \in Z\} \quad (3) \quad E \cap N$$

$$(4) \quad E \cap F$$

2. 若 $A = \{1, 2\}$ ， $B = \{2, 3, 4\}$ ，請寫出下列各集合的元素；

$$(1) \quad A \times B \quad (2) \quad B \times A \quad (3) \quad A \times A$$

2. 數的四則

四則運算 加法、減法、乘法、除法的四種運算，叫做四則運算。

其結果叫做和、差、積、商。

基本法則 數的加法和乘法，依據下列基本法則；

交換律 $a+b=b+a$ $ab=ba$

結合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$ $(ab)c=a(bc)$

分配律 $a(b+c)=ab+ac$

例 $67+58+33=(67+58)+33$
 $=67+(58+33)$ 結合律
 $=67+(33+58)$ 交換律
 $=(67+33)+58 \cdots \cdots \textcircled{1}$ 結合律
 $=100+58=158$

$4 \times 37 \times 25=(4 \times 37) \times 25$
 $=4 \times (37 \times 25)$ 結合律
 $=4 \times (25 \times 37)$ 交換律
 $=(4 \times 25) \times 37 \cdots \cdots \textcircled{2}$ 結合律
 $=100 \times 37=3700$

如上例①②得知；

$$\begin{array}{ccc} \text{↖} & & \text{↖} \\ 67+58+33=100+58 & & 4 \times 37 \times 25=100 \times 37 \\ & & \\ & & =3700 \end{array}$$

一個只有加法或乘法的計算，可由任何順序去計算，此可由交換律和結合律的觀念獲得正確的說明。

單位元素 於加法，0 有特殊性質；

$$3+0=3, \quad (-5)+0=-5, \quad 1.8+0=1.8$$

不論任何數，若加以 0，其和仍為原數。

且，具備這樣性質的數，在加法亦只有 0 而已。

不管 a 是任何實數，使與 a 的和仍等於 a 的數是 0，亦只有 0，0 叫做加法單位元素。

$$a + 0 = 0 + a = a \quad (a \text{ 是任意實數})$$

0 是加法的單位元素，1 即為乘法的單位元素。

不管 a 是任何實數，使與 a 的積仍等於 a 的數是 1，亦只有 1，1 叫做乘法單位元素。

$$a \times 1 = 1 \times a = a \quad (a \text{ 是任意實數})$$

其次，進一步來研討加法和減法，乘法和除法的關係；

加法反元
素

有實數 a ，當 $a + x = 0$ 時，實數 x 可記作 $-a$ ， $-a$ 叫做 a 的反元素（加法反元素）

例 3 的反元素 $= -3$ ， -5 的反元素 $= 5 = -(-5)$

減法與反
元素

有實數 a, b 若 $b + x = a$ ，則實數 $x = a - b$

$$b + (a - b) = a$$

「 a 減去 b 」與「 a 加 b 的反元素」兩者意義相同，

$$a - b = a + (-b) \quad (\text{參考練習問題 11})$$

乘法反元
素

$a \neq 0$ (a 是實數)，若 $a \times x = 1$ ，則 x 可記作 $\frac{1}{a}$ ， $\frac{1}{a}$ 叫做 a 的乘法反元素。

除法與反
元素

有實數 a, b (都不等於 0)，若 $b \times x = a$ ，則 $x = a \div b$ ，亦即 $\frac{a}{b}$ 。

$$\therefore b \times \frac{a}{b} = a$$

「 a 除以 b 」與「 a 乘以 b 的反元素」，兩者意義相同。

$$a \div b = a \times \frac{1}{b}$$

● 精 粹 ●

- (1) 計算的基本法則 交換律，結合律，分配律。
- (2) 單位元素 加法……0，乘法……1。
- (3) a 的反元素 加法…… $-a$ ，乘法…… $\frac{1}{a}$ ($a \neq 0$)

例題 2. 利用運算基本法則，證下列公式的成立；

$$(b+c)a=ba+ca \cdots \cdots (A)$$

解法 分配律 $a(b+c)=ab+ac$

利用交換律，則 $(b+c)a=a(b+c)$ ， $ab=ba$ ， $ac=ca$ ，

用以上兩法則便可證明。

解答 依交換律 $(b+c)a=a(b+c)$

$$\text{依分配律} \quad =ab+ac$$

$$\text{再依交換律} \quad =ba+ca$$

故， $(b+c)a=ba+ca$

例題 3. 利用運算基本法則，和減法與反元素的關係，說明下列式的變化的正確；

$$(6-7)+4=(6+4)-7$$

解法 將減法與反元素的關係 $a-b=a+(-b)$ 適用於 $6-7$ 的部分，即可成立；

$$(6-7)+4=\{6+(-7)\}+4$$

的加法形式。

其次，用運算基本法則，可得；

$$\{6+(-7)\}+4=(6+4)+(-7)$$

最後，依減法與反元素的關係，可寫成；

$$(6+4)+(-7)=(6+4)-7$$

解答 $(6-7)+4$

$$\text{依減法與反元素的關係：} = \{6+(-7)\}+4$$

$$\text{依結合律：} = 6+\{(-7)+4\}$$

$$\text{依交換律：} = 6+\{4+(-7)\}$$

$$\text{依結合律：} = (6+4)+(-7)$$

$$\text{再依減法與反元素的關係：} = (6+4)-7$$

擴展問題

利用運算基本法則，試證下列公式；

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

但，應用前頁例題2的公式(A)

要點

設 $x+a=m$ ，
則 $(x+a)(x+b) = m(x+b)$
依分配律；
 $= mx + mb$
將原假設 m 代入
 $= (x+a)x + (x+a)b$
再將 $x+a$ 當作
一個式去利用法
則。

解答 在 $(x+a)(x+b)$ 的式中，
先將 $x+a$ 當做一個式，並利用分配律，

$$\text{原式} = (x+a)x + (x+a)b$$

依前頁公式(A)；

$$= (x^2 + ax) + (xb + ab)$$

依結合律；

$$= \{ (x^2 + ax) + xb \} + ab$$

依結合律；

$$= \{ x^2 + (ax + xb) \} + ab$$

依交換律；

$$= \{ x^2 + (ax + bx) \} + ab$$

再依前頁公式(A)；

$$= \{ x^2 + (a+b)x \} + ab$$

$$= x^2 + (a+b)x + ab$$

故， $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

注意

從前頁 $(6-7)+4 = (6+4)-7$ 的結果，得知，假使把 $6-7+4-5+3$ 寫成 $6+(-7)+4+(-5)+3$ ，仍係把加法，減法混合題一概改寫為加法的計算方式，或利用結合律、交換律而演化成為加法的計算式。

又可把 $6+(-7)+4+(-5)+3$ 寫成 $6+4+3+\{(-7)+(-5)\}$ ，使正數，負數部分分開後加以計算。

故得， $6-7+4-5+3 = 6+4+3-7-5 = 13-12 = 1$

習題

(解答在126頁)

3. 設 $a \neq 0$ ，試證實數 a 的反元素的反元素 $= a$

3. 數的集合與演算

自然數的集
合和四則

例如： $3+2=5$ ，或 $4+8=12$ ，將兩個自然數相加，其結果還是自然數。

這種觀念，於任意自然數的加法，皆可成立。

即：自然數的集合 N 的任意兩元素 a, b ，其和 $a+b$ 仍屬於 N ，這種性質，叫做；

自然數的集合，對加法有封閉性。

對於乘法，正如加法一樣，將自然數 a, b 相乘所得 ab ，仍然是自然數，即；

自然數的集合，對乘法有封閉性。

但是，在減法和除法，如 $4-8$ 和 $3\div 2$ ，其結果卻不是自然數，亦即；

自然數的集合，對於減法和除法沒有封閉性。

整數的集
合和四則

其次，讓我們來研討整數的情形，設有

整數的集合 $Z=\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$

又 a, b 都屬於 Z ，則 $a+b, a-b$ 或 ab 依然是整數，即；

整數的集合，對於加法、減法、乘法有封閉性。

但 $3\div 2$ 或 $4\div (-5)$ 其結果並非整數，故

整數的集合，對於除法沒有封閉性。

有理數的集
合和四則

用分數 $\frac{a}{b}$ (a, b 是整數， $b \neq 0$) 表示的形式，叫做有理數

，整數亦是有理數的一種（參考第8頁）

今任意取兩個有理數，其和、差、積、商仍然是有理數，即；

有理數的集合，對於四則有封閉性。（但，除法時，除數不為0）

無理數的集
合和四則

[例題] 10. (30頁) 兩個無理數的和、積不一定是無理數，其差或商亦不一定是無理數，即；

實數的集合
和四則

無理數的集合，對於四則都沒有封閉性。

實數的集合包括有理數的集合和無理數的集合（參考第9頁）即有理數、無理數都是實數。

今任取實數的兩元素，則其和、差、積或商，仍然是一個實數，即；

實數的集合，對於四則都有封閉性。（但，除法時，除數不為0）

二項演算

總而言之，今有一集合 S ，設 a, b 是 S 集合的兩元素，即兩元素的和 $a+b$ ，差 $a-b$ ，積 $a \times b$ ，商 $a \div b$ 的對應關係，叫做二項演算，或簡稱為演算。

若一集合 S ， $a \in S$ 且 $b \in S$ ，假如 a, b 兩元素的二項演算仍然屬於 S 時，我們說集合 S 對於該二項演算有封閉性。

二項演算可應用於四則以外的情形。

例 若 a, b 都是整數

$$\text{設 } a \times b + a + b = a * b$$

$$\text{亦即 } a * b = a \times b + a + b$$

上述演算仍為二項演算之一類，

不問整數的值如何，這種演算的結果還是整數。

我們說，整數的集合對於這種演算有封閉性。

$$\begin{array}{l} 2 * 1 = 5 \\ 3 * 7 = 21 \\ -4 * 5 = -19 \\ 0 * 3 = 3 \end{array}$$

● 精 粹 ●

自然數的集合 對於加法、乘法有封閉性。

整數的集合 對於加法、減法、乘法有封閉性。

有理數的集合和實數的集合 對於四則有封閉性。

二項演算（演算） 是把集合的兩元素的關係求其結果。