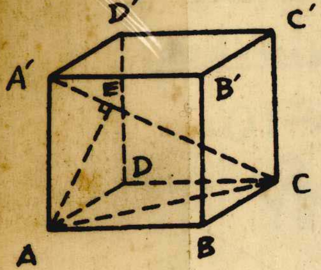
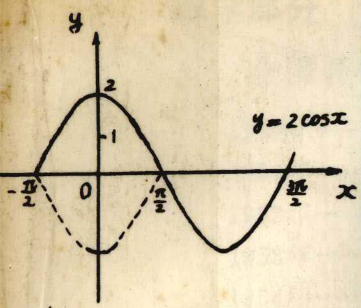
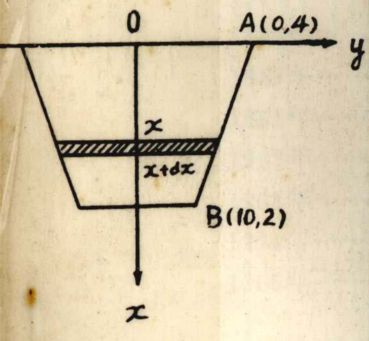
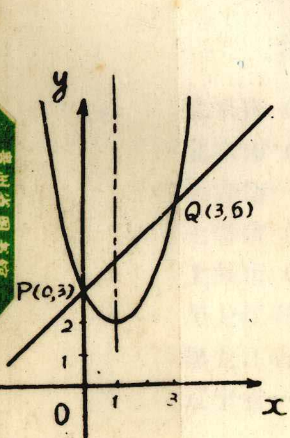
数学试题解









1978

山西大学

目　录

数学部分

全国高等学校统一招生数学试题解答

一九七七年全国各省、市、自治区高等学校招生数学试题解答

附　录

全国高等学校統一招生数学試題
解答汇集

一九五〇年华北高校联合招生試題

甲组　第一部分

（一）将下列各题正确答案填入括号内（注：必要时编者略加解释）：

1、方程 $x^3-2x^2-2x+4=0$ 的一根为2，其它二根应为〔(C)二个实根〕。

（A）二个零；（B）一个零，一个实根；（C）二个实根；（D）一个实根，一个复根；（E）二个虚根。

∵原方程一根为2，∴经综合除法，方程可写为

$(x-2)(x^2-2)=0$，故其它二根应为实根

2、已知 $\lg\sin 26°20'=9.6470-10$ 及 $\lg\sin 26°30'=9.6495-10$。

若 $\lg\sin x=9.6486-10$，则x的近似值为〔（D）26°26′〕．

（A）26°23′；（B）26°24′；(C）26°25′；（D）26°26′；（E）26°27′。

利用平均值估计即可

3、若（r，θ）为一点之极坐标，则 $r=20\cos\theta$ 之图形为〔（A）园〕

（A）园；（B）椭园；（C）双曲线；（D）抛物线；（E）二平行直线。

（解）$r=20\cos\theta$ 为一园心在极轴上、半径为10且过极点的园的极坐标方程

4、$x^2+2xy+y^2+x+y-2=0$ 的图形为〔（E）二平行直线〕

（A）园；（B）椭园；（C）双曲线；（D）抛物线；（E）二平行直线。

∵原方程可以化为 $(x+y-1)(x+y+2)=0$

5、展开二项式 $(a+b)^{17}$ 之第十五项为〔（B）$680a^3b^{14}$〕。

（A）$2380a^{15}b^2$；（B）$680a^3b^{14}$；(C)$736a^{14}b^3$；(D）$(a+b)^{15}$；（E）a^8b^7

因为根据二项式定理，它的第十五项应为 $C_{17}^{14}\ a^{17-14}\ b^{14}=680a^3b^{14}$

（二）将正确答案填在虚线上（注：必要时编者略加解释）：

1、二直线 $x+y+4=0$ 与 $5x-2y=10$ 相交之锐角的正切为 $\dfrac{7}{3}$。

∵二直线的斜率为$k_1=-1$，　$k_2=\frac{5}{2}$，则相交锐角之正切为

$$\operatorname{tg}\theta=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|=\left|\frac{-1-\frac{5}{2}}{1-\frac{5}{2}}\right|=\left|\frac{7}{3}\right|=\frac{7}{3}$$

2、x、y都是实数，$i=\sqrt{-1}$，且$(x+yi)(2+4i)=(x-yi)(1+i)$

则　<u>$x=0$，$y=0$。</u>

因原关系式可化为$(2x-4y)+(4x+2y)i=(x+y)+(x-y)i$，则有

$$\begin{cases}2x-4y=x+y\\4x+2y=x-y\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}x-5y=0\\x+y=0\end{cases}\quad\text{故}\quad x=y=0$$

3、$\begin{vmatrix}a & d & a+5d\\ b & e & b+5e\\ c & f & c+5f\end{vmatrix}=\underline{\ 0\ }$。根据行列式的性质即得。

4、已知x在第四象限内，$\sin^2x=\frac{1}{9}$，则tgx之值至第二位小数为 <u>-0.35</u>。

因　$\sin x=-\frac{1}{3}$则，$\operatorname{tg}x=-\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2x}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\approx-0.35$。

5、参数方程　$x=1+2t$，$y=t(t+1)$之直角坐标方程为 <u>$4y=x^2-1$</u>。

消去参数t，将前式代入后式得　$y=\frac{x-1}{2}\left(\frac{x-1}{2}+1\right)$

$\therefore 4y=x^2-1$

甲組　第二部分

1、证明　$\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=(\operatorname{tg}x+\sec x)^2$

（证）左端$=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2x}=\frac{1+2\sin x+\sin^2x}{\cos^2x}$

$=\sec^2x+2\operatorname{tg}x\cdot\sec x+\operatorname{tg}^2x=(\operatorname{tg}x+\sec x)^2=$右端，

∴等式成立

2，设方程　$x^3-5x^2+tx+s=0$，其中t，s为实数，已知此方程之一根为2—3i，求t及s之值

（解）已知2—3i为其一根，则2＋3i亦为其一根，故方程左端含有因子

$[x-(2-3i)][x-(2+3i)]=x^2-4x+13$。

用$x^2-4x+13$除左端，其余式$(t-17)x+(s+13)$为0，

故 $t=17$，$s=-13$

3、用数学归纳法，证明公式：

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

（证）当 $n=1$ 时，易于验证所给公式成立。

设 $n=k$ 时，公式成立，即有

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

今证当 $n=k+1$ 时，公式亦成立，此时

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)$$

$$=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)=\left(\frac{1}{3}k+1\right)(k+1)(k+2)$$

$$=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$$

故当 $n=k+1$ 时，公式成立。

∴ 所给公式对于任意自然数 n 都成立

4、设 $P_1(x_1,y_1)$及 $P_2(x_2,y_2)$为二定点，过 P_1 作直线交 y 轴于 B，过 P_2 作直线与过 P_1 之直线垂直且交 x 轴于 A。求 AB 中点之轨迹。

（解）设过点 $P_1(x_1,y_1)$作直线 $y=kx+b$，它与 y 轴交于点 $B(o,b)$，

则 $b=y_1-kx_1$，∴B 点坐标为 $(o,y_1-k_1x_1)$ 。

而过 $P_2(x_2,y_2)$作与上直线相垂直的直线 $y=k'x+c$。

必有 $k'=-\frac{1}{k}$，故此直线的方程为 $y=-\frac{1}{k}x+c$，它与 x 轴交于点 A (a,o)，∵$c=y_2+\frac{1}{k}x_2$，故 $a=ky_2+x_2$，

∴A 点坐标为 $(x_2+ky_2,\ o)$。

设 AB 的中点坐标为 $(x,\ y)$，则

$$x=\frac{x_2+ky_2}{2},\qquad y=\frac{y_1-kx_1}{2}$$

消去 k，于是得 $\frac{2x-x_2}{y_2}=\frac{y_1-2y}{x_1}$

化简得

$$2x_1x+2y_2y-(x_1x_2+y_1y_2)=0$$

此即所求之 AB 中点的轨迹方程——为一直线。证明（略）。

5、P 为抛物线 $y^2=4x$ 上之一点，QR 为抛物线上一弦，且与其轴垂直。设 PQ交抛物线之轴于 M，PR 交抛物线之轴于 N。证明 MN 线段为抛物线之顶点平分。

（证）如图，今证MO＝ON。

设 $P(x_o,y_o)$，$Q(a^2,2a)$，则 $R(a^2,-2a)$，

而 $P(x_o,y_o)$为抛物线 $y^2=4x$ 上一点，

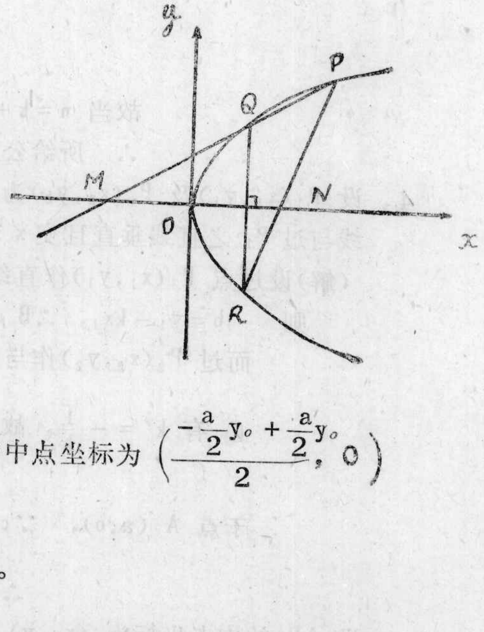
故 $x_o=\frac{1}{4}y_o^2$，于是 $P(\frac{1}{4}y_o^2,\ y_o)$。

因此，PQ 直线的方程为

$$\frac{y-2a}{y_o-2a}=\frac{x-a^2}{\frac{1}{4}y_o^2-a^2}$$

令 $y=0$，则 $x=\frac{-a}{2}\cdot\frac{y_o^2-4a^2}{y_o-2a}+a^2=-\frac{a}{2}y_o$。

即M点的坐标为$\left(-\frac{a}{2}y_o,0\right)$



PR 直线的方程为

$$\frac{y+2a}{y_o+2a}=\frac{x-a^2}{\frac{1}{4}y_o^2-a^2}$$

令 $y=0$，

则 $x=\frac{a}{2}\cdot\frac{y_o^2-4a^2}{y_o+2a}+a^2=\frac{a}{2}y_o$。

即N点的坐标为 $\left(\frac{a}{2}y_o,0\right)$ 于是 MN 的中点坐标为 $\left(\frac{-\frac{a}{2}y_o+\frac{a}{2}y_o}{2},\ 0\right)$

即为 (0,0)

∴MN 为抛物线之顶点 O 平分。

乙、丙組　第一部分

（一）将正确答案填入括号内（注：必要时编者略加解释）

1.设 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$， 下列各式何者正确？

((A) $\frac{e}{f}=\frac{a+c}{b+d}$； (B) $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{c+e}{d+f}$(E) $\frac{a+c-e}{b+d-f}=\frac{e}{f}$)

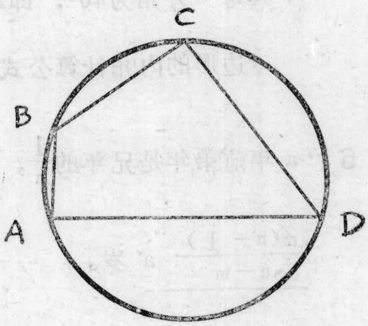
根据比例性质即得：

(A) $\frac{e}{f}=\frac{a+c}{b+d}$；(B) $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{c+e}{d+f}$；(C) $\frac{ad}{bc}=\frac{e}{f}$；(D) $\frac{ac}{bd}=\frac{e}{f}$

(E) $\frac{a+c-e}{b+d-f}=\frac{e}{f}$

2.园内接四边形 ABCD,若$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DA}=1:2:3:4$，则 A,B,C,D 各角为 ((D)90°，126°，90°，54°，)

(A) 45°，135°，45°，135°；(B) 36°，72°，108°，144°；(C) 72°，108°，72°，108°；(D) 90°，126°，90°，54°。



$\because \angle A$ 的度数 $=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}$ 的度数

$=\frac{1}{2}(2+3)\frac{360°}{10}=90°$

$\angle B$ 的度数 $=\frac{1}{2}\overset{\frown}{ADC}$的度数

$=\frac{1}{2}(4+3)\frac{360°}{10}=126°$等等

3、若$\frac{1}{a}=\frac{1}{n}+K$，则a等于$\left(\frac{n}{1+nk}\right)$。

(A) $\frac{n}{1+nk}$；(B)$n-\frac{1}{k}$；(c)$n-k$；(D)$n+\frac{1}{k}$；(E) $\frac{1+nk}{n}$。

4、若$\lg 5.8=0.7634$，$\lg 2.19=0.3404$，则$\lg(580\times 2190)$等于(6.1038)。

(A)0.5770；(B)1.1038；(C)6.1038；(D)264.06；(E)416.74。

利用$\lg(580\times 2190)=\lg 580+\lg 2190$

5、若 $\sin A=\frac{2}{\sqrt{29}}$，$\cos A=\frac{5}{\sqrt{29}}$，$tgA=\frac{2}{5}$；

$\sin B=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos B=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$tgB=\frac{1}{2}$，则 $tg(A+B)$等于 $\left(1\frac{1}{8}\right)$

(A) $-\frac{1}{12}$；(B) $\frac{3}{4}$；(c) $-\frac{1}{8}$；(D) $1\frac{1}{8}$；(E) $\frac{1}{8}$。

利用 $tg(A+B)=\frac{tgA+tgB}{1-tgA\cdot tgB}$

(二) 将正确答案填在虚线上（注：必要时编者略加解释）：

1、Sin330°之值为$-\frac{1}{2}$。因为$\sin 330°=\sin(360°-30°)=-\sin 30°$

2、 x^3-4x^2+5x-2的因子是 $(x-1)^2，(x-2)$。

分解因式 $x^3-4x^2+5x-2=x^2(x-2)-(2x^2-5x+2)$

$=x^2(x-2)-(2x-1)(x-2)$

$=(x^2-2x+1)(x-2)=(x-1)^2(x-2)$

3、书一本定价为 p 元，因为折扣，实价较定价少d 元，则该书实价是定价的百分之 $\frac{p-d}{p}\cdot 100\%$

4、若一多边形之每一外角各为40°，则此多边形有 9 边。

∵其每一外角为40°，即每一内角为140°，则此多边形为一正多边形，由正多边形的内角计算公式有$\frac{n-2}{n}180°=140°$，∴$n=9$

5、a 年前弟年是兄年的$\frac{1}{n}$，今年弟年是兄年的$\frac{1}{m}$，则兄今年是 $\frac{m(n-1)}{n-m}a$ 岁。

设今年兄年是 x 岁，由题意得 $\frac{x-a}{n}+a=\frac{x}{m}$，解之即得

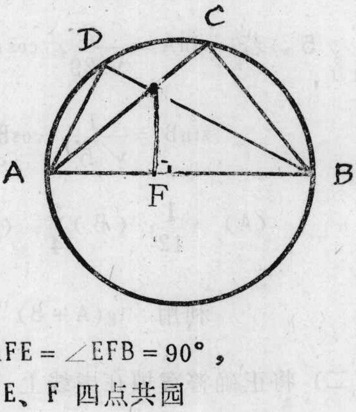
乙丙組　第二部分

1、设 AB 是一园的直径，过 AB 作AC及BD二弦相交于E，则

$$AE\cdot AC+BE\cdot BD=AB^2$$

（证法一）如图，△ECB∽△EDA，则 $AE\cdot EC=BE\cdot ED$、

∵∠C＝90°， 则有



$AB^2=AC^2+BC^2$ 和$BC^2=BE^2-EC^2$，

于是$AB^2=(AE+EC)^2+BC^2$

$=AE^2+EC^2+2AE\cdot EC+BE^2-EC^2$

$=AE^2+AE\cdot EC+BE\cdot ED+BE^2$

$=AE(AE+EC)+BE(BE+ED)$

$=AE\cdot AC+BE\cdot BD$

∴$AE\cdot AC+BE\cdot BD=AB^2$　得证

（证法二）过E 作AB的垂线，垂足为F，∵∠AFE＝∠EFB＝90°，

∴A、D、E、F 四点共园，B、C、E、F 四点共园

利用割线定理有： $AE\cdot AC=AF\cdot AB$

$BE\cdot BD=FB\cdot AB$

故 $AE \cdot AC + BE \cdot BD = AF \cdot AB + FB \cdot AB = AB(AF + FB) = AB^2$

2、A，B，C为△ABC之内角，则$tgA + tgB + tgC = tgA \cdot tgB \cdot tgC$

（证）若△ABC　为直角三角形时，　等式显然成立。

若△ABC不是直角三角形时，　∵$A + B + C = \pi$，则

$$tgc = tg[\pi - (A + B)] = -tg(A + B) = -\frac{tgA + tgB}{1 - tgA \cdot tgB} = \frac{tgA + tgB}{tgA \cdot tgB - 1}.$$

即　$tgC(tgA \cdot tgB - 1) = tgA + tgB$

故　$tgA + tgB + tgC = tgA \cdot tgB \cdot tgC$　得证

3、分解因式：①$x^3 + 2x^2 + 2x + 1$；

②$x^2 + 2xy - 8y^2 + 2x + 14y - 3$；

③$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2$；

（解）① $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = x^2(x + 1) + (x^2 + 2x + 1)$

$= x^2(x + 1) + (x + 1)^2 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$

② $x^2 + 2xy - 8y^2 + 2x + 14y - 3$

$= (x^2 - x) + (3x - 3) - (2xy - 2y) + (4xy + 12y - 8y^2)$

$= (x - 1)(x + 3 - 2y) + 4y(x + 3 - 2y) = (x - 2y + 3)(x + 4y - 1)$

③ $x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2$

$= x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 + 2x^2y^2 - 2x^2y^2$

$= (x^2 + y^2)^2 - 2z^2(x^2 + y^2) + z^4 - 4x^2y^2$

$= (x^2 + y^2 - z^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + y^2 - z^2 + 2xy)(x^2 + y^2 - z^2 - 2xy)$

$= [(x + y)^2 - z^2][(x - y)^2 - z^2]$

$= (x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(x - y - z)$

4、设p为△ABC三边和之半，r为内切园的半径，又知

$tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{p(p - a)}}$　　求证：$r = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)(p - c)}{p}}$

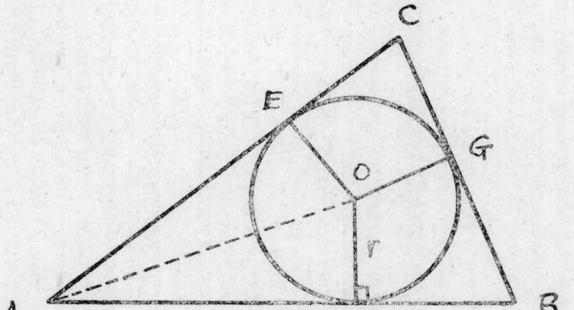
（证）

$p = \frac{a + b + c}{2} = AF + BG + CE$

$= AF + BG + CG$

$= AF + BC$

$= AF + a$



则　$AF = p - a$.

已知　$tg\frac{A}{2}$

故　$r = AFtg\frac{A}{2} = (p - a)\sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{p(p - a)}} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)(p - c)}{p}}$

得所欲证

5、设一调和级数之第 p 项为 a，第 q 项为 b，第 r 项为 c，则

$$(q-r)bc+(r-p)ca+(p-q)ab=0$$

（证）设调和级数为 $\frac{1}{m}$，$\frac{1}{m+d}$，$\frac{1}{m+2d}$，……，$\frac{1}{m+(n-1)d}$，……

则 $a=\frac{1}{m+(p-1)d}$，$b=\frac{1}{m+(q-1)d}$，$c=\frac{1}{m+(r-1)d}$

于是 $(q-r)bc+(r-p)ca+(p-q)ab$

$$=\frac{q-r}{[m+(q-1)d][m+(r-1)d]}+\frac{r-q}{[m+(p-1)d][m+(r-1)d]}$$

$$+\frac{p-q}{[m+(p-1)d][m+(q-1)d]}$$

$$=\frac{(q-r)[m+(p-1)d]+(r-q)[m+(q-1)d]+(p-q)[m+(r-1)d]}{[m+(p-1)d][m+(q-1)d][m+(r-1)d]}$$

$$=0$$

（经过计算化简，上式分子

$$(q-r)[m+(p-1)d]+(r-q)[m+(q-1)d]+(p-q)[m+(r-1)d]=0)$$

证完

一 九 五 一 年

第一部分　占40%

1、设有联立方程 $x+y=8$，$2x-y=7$ 求 x，y。

（解）解此联立方程，得 $x=5$，$y=3$。

2、若一三角形的重心与外接园心重合，则此三角形为何种三角形？

（解）此种三角形为等边三角形。因为此种三角形的三边的中线与三边的垂直平分线重合。

3、当太阳的仰角是60°时，若旗杆之影长为1丈，则旗杆长为若干丈？

（解）旗杆长应为1丈·$tg60^\circ=\sqrt{3}$丈

4、若$\dfrac{x}{a-b}=\dfrac{y}{b-c}=\dfrac{z}{c-a}$，而 a，b，c 各不相等，则 $x+y+z=$？

（解）$\because \dfrac{x}{a-b}=\dfrac{y}{b-c}=\dfrac{z}{c-a}$，根据等比定理有

$$\frac{x+y}{a-c}=\frac{z}{c-a}，即\frac{x+y}{z}=\frac{a-c}{c-a}=-1$$

$\therefore\ x+y+z=0$

5、试题十道，选答八道，则选法有几种？

（解）选法有 $c_{10}^{8}=\dfrac{10\cdot9\cdots\cdots[10-(8-1)]}{8!}=\dfrac{10\cdot9\cdots\cdots3}{8!}=\dfrac{10\cdot9}{2}=45$种

6、若一点 p 的极坐标是（r，θ），则它的直角坐标为何？

（解）p点直角坐标为（x，y），则$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

7、若方程 $x^2+2x+k=0$ 的两根相等，则 $k=$？

（解）二次方程的两根相等，则其判别式必为0，即 $2^2-4\cdot1\cdot k=0$，

$\therefore\ k=1$

8、列举二种证明两三角形相似的方法。

（列举略）

9、当 $(x+1)(x-2)<0$ 时，x 值的范围如何？

（解）要使已给不等式成立，

当 $x+1>0$，$x-2<0$，即当 $-1<x<2$ 时；

或当 $x+1<0$，$x-2>0$，即 $x<-1$，$x>2$，此结论矛盾。

∴当 $-1<x<2$ 时，不等式成立

10、若一直线通过原点，且垂直于直线 $ax+by+c=0$，求该直线方程。

（解）设所求直线方程为 $y=kx+d$，因它过原点，故 $d=0$

已知直线 $ax+by+c=0$ 之斜率为 $k'=-\frac{a}{b}$，但所求直线与之垂直，则其

斜率 $k=-\frac{1}{k'}=\frac{b}{a}$，

∴ 该直线之方程为 $y=\frac{b}{a}x$

11、$\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项为何？

（解）展开式中的常数项应为 $c_6^3\, x^3\left(\frac{1}{x}\right)^3=c_6^3=20$

12、方程 $\cos 2\theta=0$ 的通解是什么？

（解）$\because \cos 2\theta=0$，故 $2\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$，∴通解为 $\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$

13、系数是实数的一元三次方程，最少有几个根是实数？最多有几个？

（解）这种方程最少有一个实数根，最多有三个实数根，因为复数根成对出现。

14、$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -5 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}=?$ （解）此行列式的值为 100

15、曲线 $x^2-4y^2=1$ 的渐近线的方程为何？

（解）已给曲线为 $x^2-\frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$，∴其渐近线为 $y=\pm\frac{1}{2}x$

16、三平行平面与一直线交于 A、B、C 三点，又与另一直线交于 A'、B'、C' 三点，已知 $AB=3$，$BC=7$，$A'B'=9$，求 $A'C'$。

（解）因两直线被三平行平面所截，则对应线段成比例，故有

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{A'B'}，\quad 于是 \quad B'C'=\frac{BC}{AB}\cdot A'B'=\frac{7}{3}\cdot 9=21$$

$$\therefore \quad A'C'=A'B'+B'C'=9+21=30$$

17、有同底同高的园柱和园锥，已知园柱的体积 18 立方尺，求园锥的体积。

（解）因 园柱体积＝底面积×高，园锥体积＝$\frac{1}{3}$底面积×高

现在园柱与园锥同底同高

$\therefore$ 园锥体积 $=\dfrac{1}{3}$ 园柱体积 $=\dfrac{1}{3}\cdot 18=6$ 立方尺

18、已知 $\lg 2=0.3010$，求 $\lg 5=?$

（解）$\lg 5=\lg\dfrac{10}{2}=\lg 10-\lg 2=1-0.3010=0.6990$

19、二抛物线 $y^2=12x$ 与 $2x^2=3y$ 的公共弦的长度是多少？

（解）此二抛物线的交点坐标是联立方程

$$\begin{cases} y^2=12x \\ 2x^2=3y \end{cases}\quad \text{的解}$$

解之，得它们的交点为 $A(0,0)$ 及 $B(3,6)$

$\therefore$ 它们的公共弦的长为 $AB=3\sqrt{5}$

20、国旗上的五角星的每个顶角是多少度？

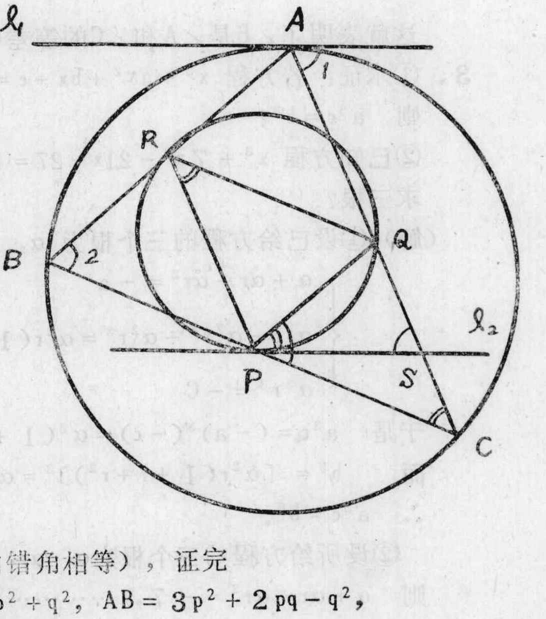
（解）正五角星的每个顶角是 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{360^\circ}{5}=36^\circ$

第二部分　占60%

1、P、Q、R 顺次为 $\triangle ABC$ 中 BC、CA、AB 三边的中点，试证园 ABC 在 A 点的切线与园 PQR 在 P 点的切线平行。

（证）如图，由题意即要证明：

大园的切线 l_1 与小园的切线 l_2 平行。



连结 P，Q，R，

则 RPCQ 为一平行四边形，

于是 $\angle QRP=\angle QCP$（对角）

而 $\angle QRP=\angle QPS$（弦切角）

$\therefore\ \angle QPS=\angle QCP$

又在 $\triangle QPS$ 与 $\triangle QCP$ 中，

$\angle PQC$ 公用，$\angle QPS=\angle QCP$

$\therefore \angle QSP=\angle QPC$

但 $\angle QPC=\angle 2$（$PQ\parallel AB$——三角形之中位线性质）

$\angle 2=\angle 1$　（弦切角）

故 $\angle QSP=\angle 1$

$\therefore\ l_1\parallel l_2$　（内错角相等），证完

2、设 $\triangle ABC$ 三边 $BC=4pq$，$CA=3p^2+q^2$，$AB=3p^2+2pq-q^2$，

求 $\angle B$，并证 $\angle B$ 为 $\angle A$ 及 $\angle C$ 的等差中项。

（解）由余弦定理有

$$\cos B=\frac{BC^2+AB^2-CA^2}{2AB\cdot BC}=\frac{(4pq)^2+(3p^2+2pq-q^2)^2-(3p^2+q^2)^2}{2(3p^2+2pq-q^2)(4pq)}$$

$$=\frac{(4pq)^2+(3p^2+2pq-q^2+3p^2+q^2)(3p^2+2pq-q^2-3p^2-q^2)}{2(4pq)(3p^2+2pq-q^2)}$$

$$=\frac{(4pq)^2+(6p^2+2pq)(2pq-2q^2)}{2(4pq)(3p^2+2pq-q^2)}$$

$$=\frac{(4pq)^2+(12p^3q-8p^2q^2-4pq^3)}{2(4pq)(3p^2+2pq-q^2)}$$

$$=\frac{4pq(3p^2+2pq-q^2)}{2(4pq)(3p^2+2pq-q^2)}$$

$$=\frac{1}{2}$$

∴ $\angle B=\dfrac{\pi}{3}$

另外，$\angle B=\pi-(\angle A+\angle C)$，而$\angle B=\dfrac{\pi}{3}$。

于是 $\angle B=3\angle B-(\angle A+\angle C)$

即 $\angle B=\dfrac{1}{2}(\angle A+\angle C)$

这就表明了∠B是∠A和∠C的等差中项。　　证毕

3、①求证：若方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个根可以排成等比级数，则 $a^3c=b^3$；

②已知方程 $x^3+7x^2-21x-27=0$ 的三个根可以排成等比级数，求三根？

（解）①设已给方程的三个根为 α，αr，αr^2，则由维脱公式有

$$\begin{cases}\alpha+\alpha r+\alpha r^2=-a\\ \alpha^2r+\alpha^2r^2+\alpha^2r^3=\alpha^2r(1+r+r^2)=b\\ \alpha^3r^3=-C\end{cases}$$

于是 $a^3c=(-a)^3(-c)=\alpha^3(1+r+r^2)^3\cdot\alpha^3r^3=\alpha^6r^3(1+r+r^2)^3$。

而 $b^3=[\alpha^2r(1+r+r^2)]^3=\alpha^6r^3(1+r+r^2)^3$，

∴ $a^3c=b^3$。

②设所给方程的三个根为α，αr，αr^2。

则 $\alpha+\alpha r+\alpha r^2=-7$，…………（1）

$\alpha^2r(1+r+r^2)=-21$，…………（2）

$\alpha^3r^3=27$，…………………………（3）

由（3）得 $\alpha r=3$，以它除（1）有

$$\frac{\alpha+\alpha r+\alpha r^2}{\alpha r}=\frac{-7}{3}，\ 即\ \frac{1+r+r^2}{r}=-\frac{7}{3}$$

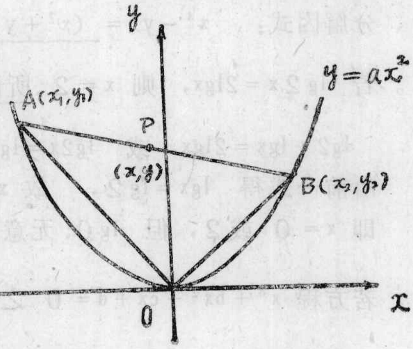
∴ $3r^2+10r+3=0$，解得 $r=-3$，$r=-\frac{1}{3}$。

根据 $\alpha r=3$ 。当 $r=-3$，则$\alpha=-1$，于是三根为-1，3，-9。

当$r=-\frac{1}{3}$则$\alpha=-9$，于是三根为-9，3，-1。

这两组根仅排列不同，故所给方程的三个根为-1，3，-9。

4、过抛物线顶点任作互相垂直的二弦，交此抛物线于两点。求证：此两点联线的中点的轨迹仍为一抛物线。



（证）设过抛物线$y=ax^2$顶点0互相垂直的二弦，交抛物线于两点A(x_1,y_1)及B(x_2y_2)，如图。于是AB的中点P的坐标为$(x,y)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$。

因点A，B都在已给抛物线上，

故 $y_1=ax_1^2$ ……………………………（1）

$y_2=ax_2^2$ ……………………………（2）

又因两弦垂直，有 $x_1x_2+y_1y_2=0$ ……（3）

（1）×（2）得 $y_1y_2=a^2x_1^2x_2^2$，代入（3）得

$x_1x_2+a^2x_1^2x_2^2=0$ 故有 $1+a^2x_1x_2=0$，$x_1x_2=-\frac{1}{a^2}$

考虑 $ax_1^2+2ax_1x_2+ax_2^2=y_1+y_2+2a\left(-\frac{1}{a^2}\right)$，

利用已知结果，整理之有

$a(x_1+x_2)^2=y_1+y_2-\frac{2}{a}$，即 $a\frac{(x_1+x_2)^2}{4}=\frac{y_1+y_2}{4}-\frac{1}{2a}$

亦即 $a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{1}{2a}$，$ax^2=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2a}$。

∴ $y=2ax^2+\frac{1}{a}$，即所求中点之轨迹为一抛物线

一 九 五 二 年

第一部分　占 60%

注意：第一部分共二十题，均答在题纸上，每题中印有一道虚线，将正确的答案就填写在虚线上，必要时略加解释。

1、分解因式：　$x^4-y^4=\underline{(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}$.

2。若　$\lg 2x=2\lg x$，则 $x=2$.所设方程可写为

$\lg 2+\lg x=2\lg x$，或　$\lg 2x=\lg x^2$。

由前一式得　$\lg x=\lg 2$，　故 $x=2$；由后一式得 $2x=x^2$

即 $x=0$ 或2，但 $\lg 0$ 无意义，故 $x\neq 0$，$\therefore x=2$

3、若方程 $x^3+bx^2+cx+d=0$ 之三根为 1，-1，$\frac{1}{2}$，则 $C=\underline{-1}$、

这是因为 C 为三根两两乘积之和。

4、若 $\sqrt{x^2+7}-4=0$，则 $x=\underline{\pm 3}$

5、$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\underline{-24}$.

6、两个园的半径都是4寸，并且一个园过另一个园的园心，则这两个园的公共弦之长是 $\underline{4\sqrt{3}}$ 寸。因所求长等于每边为4的正三角形之高的2倍。

7、$\triangle ABC$ 的面积是 60 平方寸，M 是 AB 的中点，N 是 AC 的中点，则 $\triangle AMN$ 的面积是15平方寸。

因　$\triangle AMN=\frac{1}{2}\triangle ABN=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\triangle ABC\right)=\frac{1}{4}\triangle ABC$.

8、正十边形的一个内角是 144 度。因 n 边形的内角和为（n—2）180°。

9、祖冲之的园周率 $\pi=22/7$，$355/113$，3.14159265.

10、球的面积等于其大园面积的4倍。因 $4\pi r^2=4(\pi r^2)$，r为球半径。

11、直园锥之底面半径为3尺，斜高为5尺，则其体积为 12π立方尺。